

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P11-2002-101

Т. Л. Бояджиев

СПЛАЙН-КОЛЛОКАЦИОННАЯ СХЕМА
ПОВЫШЕННОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ

2002

1 Введение

Вопросам построения разностных схем для краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений посвящено внушительное количество работ. Отметим классические монографии А.А. Самарского [1] и Г.И. Марчука [2] (см. также работы [3] — [6]). Среди многочисленных работ, выполненных в ОИЯИ, Дубна, отметим статьи [7] — [10].

Метод коллокации обоснован в классической работе Капторовича [11]. Погрешность аппроксимации метода коллокации с использованием полиномиальных и тригонометрических базисных функций изучалась в работе [12]. Ввиду ряда причин практическое применение традиционного метода коллокации затруднительно. Однако метод коллокации с использованием финитных функций π , в частности, сплайнов [13] — [15] дает возможность построения широкого класса схем, реализация которых не сложнее классических разностных схем, имея в то же время ряд существенных преимуществ. Основное отличие метода сплайн-коллокации от традиционных разностных методов заключается в возможности найти приближенное аналитическое решение в виде некоторого сплайна на всем интервале интегрирования.

Для практических применений разрабатывались преимущественно схемы метода сплайн-коллокации с использованием B -сплайнов (см., например, [16] — [17], [8], а также список литературы в книгах [14] — [16]).

В настоящей работе рассматривается схема сплайн-коллокации, использующая кубические сплайны, для краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Численная реализация схемы приводит к системе алгебраических уравнений с блочно-диагональной матрицей. Для решения системы предложен метод, обобщающий классический метод прогонки.

Предлагаемая схема имеет следующие преимущества:

- получение приближенного аналитического решения в виде сплайна на всем интервале интегрирования;
- высокая точность $O(h^4)$ на равномерной сетке с шагом h для достаточно гладких решений;
- простота реализации на равномерных и неравномерных сетках;
- простое обобщение на задачи с разрывами производных.

Схема может быть использована при решении широкого класса нелинейных задач в разных областях физики. В частности, она применялась с успехом при решении ряда задач физики джозефсоновских переходов [18] — [20], теории бозонных [21] и смешанных бозонно-фермионных звезд [22], а также физики черных дыр с массивным дилатоном [23, 24].

При решении нелинейных краевых задач схему можно применять в рамках некоторого итерационного, например пьютоновского [25], процесса. Хорошо известно, что устойчивость и сходимость разностного решения нелинейной задачи прямым образом связаны со свойствами аппроксимации возникающей линеаризованной задачи. При условии устойчивости разностной схемы, а также обычных условий гладкости

коэффициентов линеаризованной задачи соответствующая разностная схема для нелинейной задачи имеет в некоторой окрестности изолированного точного решения дифференциальной задачи единственное решение, которое при измельчении сетки сходится к непрерывному точному решению.

2 Сплайн-коллокационная схема

Рассмотрим двухточечную краевую задачу для линейного ДУ

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x), \quad x \in (0, L), \quad (1a)$$

с краевыми условиями

$$\kappa_0 y(0) + \nu_0 y'(0) = \gamma_0 \quad \kappa_L y(L) + \nu_L y'(L) = \gamma_L, \quad (1b)$$

где $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ и $f(x)$ — заданные непрерывные на интервале $[0, L]$ функции, а постоянные $|\kappa_0| + |\nu_0| > 0$, $|\kappa_L| + |\nu_L| > 0$.

Для численного решения задачи (1) введем на отрезке $[0, L]$ сетку

$$\Omega_N \equiv \{x_{e+1} = x_e + h_e, \quad e = 1, 2, \dots, N-1, \quad x_1 = 0, x_N = L\}$$

из N узлов с переменным в общем случае шагом h_e . Приближенное решение на элементе $[x_e, x_{e+1}]$ отыскивается в виде кубического сплайна

$$S(x) = \phi(t)u_e^+ + \psi(t)h_e m_e^+ + \bar{\phi}(t)u_{e+1}^- + \bar{\psi}(t)h_e m_{e+1}^-, \quad (2)$$

где через $t = (x - x_e)/h_e$, $t \in [0, 1]$, обозначена локальная координата, $\{u_e^\pm, m_e^\pm\}$ — значения справа и слева сплайна $S(x)$ и его производной $m(x) \equiv S'(x)$ в узлах $e = 2, 3, \dots, N-1$ сетки. В граничных узлах с номерами 1 и N определены соответственно пары $\{u_1^+, m_1^+\}$ и $\{u_N^-, m_N^-\}$. Базисные функции $\phi(t)$ и $\psi(t)$ удовлетворяют условиям (точкой сверху обозначено дифференцирование по локальной переменной t)

$$\phi(0) = 1, \quad \psi(0) = 1,$$

а остальные значения функций и их производных в узлах элемента равны нулю. Явные выражения для величин $\phi(t)$ и $\psi(t)$ приведены, например, в книге [14]:

$$\phi(t) = (1-t)^2(1+2t), \quad \psi(t) = t(1-t)^2. \quad (3)$$

Для функций $\bar{\phi}(t)$ и $\bar{\psi}(t)$, участвующих в (2), выполнены соотношения

$$\bar{\phi}(t) = \phi(1-t), \quad \bar{\psi}(t) = -\psi(1-t). \quad (4)$$

Введем в рассмотрение невязку на элементе e :

$$\delta_e(x) \equiv a(x)S''(x) + b(x)S'(x) + c(x)S(x) - f(x). \quad (5)$$

Для отыскания $2N$ неизвестных $\{u_i^\pm, m_i^\pm\}$ определим $2N - 2$ точек коллокации x_{ej} , $j = 1, 2$, по формулам

$$x_{ej} = x_e + t_j h_e.$$

Здесь $t_1 = (1 - 1/\sqrt{3})/2$ и $t_2 = (1 + 1/\sqrt{3})/2$ — узлы Гаусса — Кристоффеля на интервале $[0, 1]$ (ниже через u_{ej} будем обозначать значение функции $u(x)$ в точке x_{ej} , т.е. $u_{ej} = u(x_{ej})$). Введем 2-векторы $\alpha_0 = (\kappa_0, \nu_0)$, $\alpha_N = (\kappa_L, \nu_L)$, $U_i = (u_i, m_i)^T$ и $R_e = (f_{e1}, f_{e2})^T$, а также 2×2 -матрицы $A_e = (A_{e,jk})$ и $B_e = (B_{e,jk})$, $k = 1, 2$, с элементами

$$A_{e,j1} = \frac{1}{h_e^2} \ddot{\phi}_j a_{ej} + \frac{1}{h_e} \dot{\phi}_j b_{ej} + \phi_j c_{ej}, \quad (6a)$$

$$A_{e,j2} = \frac{1}{h_e^2} \ddot{\psi}_j a_{ej} + \frac{1}{h_e} \dot{\psi}_j b_{ej} + \psi_j c_{ej}, \quad (6b)$$

$$B_{e,j1} = \frac{1}{h_e^2} \ddot{\phi}_j a_{ej} + \frac{1}{h_e} \dot{\phi}_j b_{ej} + \bar{\psi}_j c_{ej}, \quad (6c)$$

$$B_{e,j2} = \frac{1}{h_e^2} a_{ej} \ddot{\psi}_j + \frac{1}{h_e} b_{ej} \dot{\psi}_j + c_{ej} \bar{\psi}_j, \quad (6d)$$

где с учетом свойств симметрии (4)

$$\bar{\phi}_1 = \phi_2, \dot{\phi}_1 = -\dot{\phi}_2, \ddot{\phi}_1 = -\ddot{\phi}_2, \quad \bar{\phi}_2 = \phi_1, \dot{\phi}_2 = -\dot{\phi}_1, \ddot{\phi}_2 = -\ddot{\phi}_1,$$

$$\bar{\psi}_1 = -\psi_2, \dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_2, \ddot{\psi}_1 = -\ddot{\psi}_2, \quad \bar{\psi}_2 = -\psi_1, \dot{\psi}_2 = \dot{\psi}_1, \ddot{\psi}_2 = -\ddot{\psi}_1.$$

Значения базисных функций $\phi(t_j)$ и $\psi(t_j)$ и их производных в точках коллокации приведены в таблице.

ϕ_1	0.8849002	ϕ_2	0.1150998	ψ_1	0.1314458	ψ_2	0.0352208
$\dot{\phi}_1$	-1	$\dot{\phi}_2$	-1	$\dot{\psi}_1$	0.2886751	$\dot{\psi}_2$	-0.2886751
$\ddot{\phi}_1$	-3.4641016	$\ddot{\phi}_2$	3.4641016	$\ddot{\psi}_1$	-2.7320508	$\ddot{\psi}_2$	0.7320508

Далее потребуем, чтобы в точках коллокации x_{ej} невязка, определяемая формулой (5), обращалась в ноль, т.е. $\delta_e(x_{ej}) = 0$. Это приводит к двум уравнениям, соответствующим двум точкам коллокации $j = 1, 2$ на интервале $[x_e, x_{e+1}]$:

$$A_{e,j1} u_e^+ + A_{e,j2} m_e^+ + B_{e,j1} u_{e+1}^- + B_{e,j2} m_{e+1}^- = f_{ej}. \quad (7)$$

На отрезке $[0, L]$ уравнений вида (7) ровно $2(N - 1)$ и они содержат $4N$ неизвестных. Потребуем дополнительно, чтобы в каждом узле сплайн $S(x)$ и его производная были непрерывными. Это означает, что

$$u_e^- = u_e^+ = u_e, \quad m_e^- = m_e^+, \quad e = 2, \dots, N - 1.$$

При этих предположениях условия коллокации сводятся к $2N - 2$ линейным алгебраическим уравнениям для $2N$ неизвестных $\{u_i, m_i\}$. Система замыкается добавлением двух граничных условий (1b) в точках коллокации $x = 0$ и $x = L$.

Введем $2N$ -вектор неизвестных $U = \{U_i\}^T$, а также $2N$ -вектор правых частей $R = \{\gamma_e, f_{ej}, \gamma_L\}^T$, где индекс $e = 1, 2, \dots, N - 1$. В итоге реализация сплайн-разностной

схемы эквивалентна следующей двухточечной системе векторных линейных алгебраических уравнений

$$WU = R.$$

Матрица W системы имеет блочно-диагональную структуру [16], причем каждой внутренней точке коллокации соответствует блок размера 2×4

$$W = \begin{pmatrix} \kappa_0 & \nu_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1,11} & A_{1,12} & B_{1,11} & B_{1,12} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1,21} & A_{1,22} & B_{1,21} & B_{1,22} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & A_{2,11} & A_{2,12} & B_{2,11} & B_{2,12} & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & A_{2,21} & A_{2,22} & B_{2,21} & B_{2,22} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & A_{e,11} & A_{e,12} & B_{e,11} & B_{e,12} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & A_{e,21} & A_{e,22} & B_{e,21} & B_{e,22} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & A_{N-1,11} & A_{N-1,12} & B_{N-1,11} & B_{N-1,12} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & A_{N-1,21} & A_{N-1,22} & B_{N-1,21} & B_{N-1,22} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \kappa_L & \nu_L \end{pmatrix}.$$

В более подробной форме система алгебраических уравнений записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \alpha_0 U_1 &= \gamma_0, \\ A_e U_e + B_e U_{e+1} &= R_e, \quad e = 1, 2, \dots, N-1, \\ \alpha_N U_N &= \gamma_L. \end{aligned} \quad (8)$$

В классической книге [4] системы вида (8) решаются сведением к трехточечным векторным уравнениям с последующим применением стандартного метода матричной прогонки. Здесь мы используем простой численный алгоритм, учитывающий особенности линейной системы (8). Будем искать решение в виде

$$U_e = \chi_e + \sigma_e U_{e+1}, \quad (9)$$

где χ_e — искомые 2-векторы, а σ_e — искомые 2×2 -матрицы. Далее предположим, что все матрицы A_e невырождены, т.е. $\det A_e \neq 0$. Подставляя во вторую группу уравнений (8), приходим к последовательности уравнений

$$A_e \chi_e = R_e, \quad A_e \sigma_e = -B_e. \quad (10)$$

Пусть решение системы (10) найдено. Для каждого $e = 1, 2, \dots, N-1$ введем числа γ_e и 2-векторы α_e при помощи выражений

$$\alpha_e = \alpha_{e-1} \sigma_e, \quad \gamma_e = \gamma_{e-1} - \langle \alpha_{e-1}, \chi_e \rangle. \quad (11)$$

Тогда для 2-вектора U_N получаем систему из двух скалярных уравнений:

$$\alpha_{N-1} U_N = \gamma_{N-1}, \quad \alpha_N U_N = \gamma_L. \quad (12)$$

которая при $|\gamma_{N-1}| + |\gamma_L| \neq 0$ имеет единственное решение.

Таким образом, для решения системы (8) может быть применен следующий алгоритм:

1. По формулам (10) вычисляем векторы χ_e и матрицы σ_e , $e = 1, 2, \dots, N-1$;
2. По рекуррентным формулам (11) вычисляем число γ_{N-1} и вектор α_{N-1} ;
3. Решаем систему (12) относительно вектора U_N ;
4. По формулам (9) находим векторы $U_{N-1}, U_{N-2}, \dots, U_1$.

Условия (1) – (3) определяют прямой ход решения, а пункт (4) – обратный ход. Ясно, что предложенный метод решения является обобщением метода прогонки [1, 4, 14] на системы вида (8).

Легко проверить, что число арифметических операций для решения системы (8) в соответствии с рассмотренным алгоритмом составляет $35N - 24$.

Рассмотрим теперь случай, когда в некоторой заданной точке $x = x_d$ решение $y(x)$ задачи (1) является непрерывной функцией

$$y(x_d - 0) = y(x_d + 0),$$

но производная $y'(x)$ терпит разрыв первого рода по формулам

$$y'(x_d + 0) = J_d y'(x_d - 0) - r_d, \quad (13)$$

где J_d и r_d – некоторые заданные постоянные. Выберем сетку Ω_N так, чтобы точка x_d являлась узлом, и пусть $1 < k < N$ есть номер этого узла. Тогда учет разрыва производной сводится к переприсвоению элементам $A_{k,j2}$ и правым частям R_{kj} блока с номером k значений

$$A_{k,j2} := J_d A_{k,j2}, \quad R_{kj} := R_{kj} + r_d.$$

Отметим, что при этом структура матрицы W линейной системы сохраняется неизменной.

Обобщение предложенной сплайн-коллокационной схемы на случай системы дифференциальных уравнений не вызывает затруднений. Пусть в (1) $y(x)$ есть векторная функция размера M и, соответственно, коэффициенты $a(x)$, $b(x)$ и $c(x)$ являются $M \times M$ -матрицами, $f(x)$ есть M -вектор. Предположим, что на левом конце при $x = 0$ задано M_0 граничных условий, а на правом конце при $x = L$ число граничных условий равно M_L , причем $M_0 + M_L = 2M$. Тогда размер постоянных матриц κ_0 , ν_0 равен $M_0 \times M$, размер матриц κ_L и ν_L есть $M_L \times M$, а размер векторов γ_0 и γ_L есть соответственно M_0 и M_L .

Приближенное решение такой краевой задачи снова ищется в виде сплайна (2) по каждой переменной, что приводит к двухточечной системе векторных алгебраических уравнений, аналогичной (8). При этом $U_i = (u_i, m_i)^T$, $i = 1, 2, \dots, N$ есть $2M$ -вектор неизвестных в узле i , элементы $A_{e,kj}$ и $B_{e,kj}$ являются $M \times M$ -матрицами.

Для решения алгебраической системы может быть применен алгоритм, естественным образом обобщающий изложенный выше алгоритм. Каждому подынтервалу сетки отвечает блок размера $2M \times 4M$ в матрице W алгебраической задачи. За счет краевых условий число уравнений (строк) в первом и последнем блоках равно соответственно $2M + M_0$ и $2M + M_L$. Тогда размер векторов χ_e и матриц σ_e равен соответственно $2M$ и $2M \times 2M$, вектора γ_{N-1} и матрицы α_{N-1} – M_0 и $M_0 \times 2M$. Таким образом, система (12) состоит из $2M$ уравнений для $2M$ -вектора U_N .

3 Численный тест

В качестве тестового примера рассмотрим линейную краевую задачу для линейного уравнения (см. [14], стр. 307):

$$y'' = 100 \operatorname{sgn}(x) + e^x \quad (14)$$

на интервале $x \in (-1, 1)$ с разрывной правой частью и граничными условиями

$$y(-1) = 0, \quad y(1) = 0. \quad (15)$$

В этом случае имеется точное аналитическое решение [14]

$$y^*(x) = \frac{1-99x}{2} + 50x^2 \operatorname{sgn}(x) + e^x - \frac{(1+x)e}{2} + \frac{x-1}{2e}. \quad (16)$$

Для численного исследования точности задача (14), (15) решалась на последовательности равномерных сеток с $N = 17, 33$ и 65 узлами. При этом на самой грубой сетке с шагом $h = 1/16$ абсолютная ошибка вычисленного решения в точке $x = 0$ оказалась $\delta_{abs}(0) \equiv |y^*(0) - S(0)| < 9.2 \cdot 10^{-8}$, а относительная ошибка $\delta_{rel} \equiv 2|y^*(0) - S(0)|/|y^*(0)| < 2.2 \cdot 10^{-6}$.

В таблице приведены значения численного решения $u_{mid} = S(0)$ и его производной $m_{mid} = S'(0)$ в точке $x = 0$

N	u_{mid}	m_{mid}
17	-0.043080726814197	-49.67520144921120
33	-0.043080640568738	-49.67520120962573
64	-0.043080635174884	-49.67520119464273

По этим данным вычисленные показатели Рунге

$$r_u = \frac{u_h - u_{h/2}}{u_{h/2} - u_{h/4}}, \quad r_m = \frac{m_h - m_{h/2}}{m_{h/2} - m_{h/4}}$$

соответственно равны $r_u \approx 15.99$ и $r_m \approx 15.97$. Это означает, что рассматриваемая сплайн-коллокационная схема имеет порядок точности $O(h^4)$ на равномерной сетке. Таким образом, сплайн (2) с коэффициентами, вычисленными по формулам (8), очень хорошо приближает не только само решение краевой задачи (1), но и производную этого решения.

В качестве второго примера рассмотрим на интервале $x \in (0, 2)$ дифференциальное уравнение, определяемое выражениями

$$y'' = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, \quad x \in (0, 1), \quad (17a)$$

$$10y'' = \frac{1}{\sqrt[3]{2-x}}, \quad x \in (1, 2), \quad (17b)$$

с краевыми условиями

$$y(0) = 0, \quad y(2) = 0. \quad (17c)$$

Ищем гладкое на $(0, 1) \cup (1, 2)$ решение граничной задачи (17), которое удовлетворяет условию

$$y'(1 - \varepsilon) = 10y'(1 + \varepsilon) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

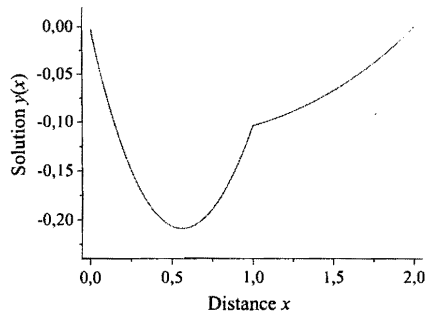


Рис. 1: Численное решение задачи (17)

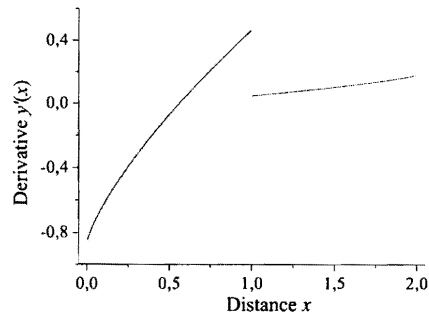


Рис. 2: Производная решения

Точное решение $y^*(x)$ выписывается в явном виде (значения параметров: $a = 16/21$, $c_1 = -200/231$, $c_2 = -208/1155$):

$$y^*(x) = \begin{cases} x (c_1 + a \sqrt[4]{x^3}), & x \in [0, 1], \\ (2-x) [c_2 + a \sqrt[4]{(2-x)^3}/10], & x \in [1, 2]. \end{cases}$$

Задача (17) решалась численно с использованием предлагаемой схемы. При этом на равномерной сетке с 21 узлами (шаг 0.1) относительная точность численного решения (см. рис. 1 и рис. 2) в точке $x = 1$ разрыва производной составляет $\delta_{rel} \approx 9.05 \times 10^{-5}$, что гарантирует 3 верных знака после десятичной запятой.

4 Благодарности

Автор выражает благодарность И.В. Пузынину (ЛИТ, ОИЯИ) и М. Тодорову (Технический Университет, г. София, Болгария) за полезные обсуждения.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ 00-01-00617.

Список литературы

- [1] А.А. Самарский, Теория разностных схем, М., Наука, 1977.
- [2] Г.И. Марчук, Методы вычислительной математики, М., Наука, 1977.

- [3] А.А. Самарский, В.Б. Андреев. Разностные методы для эллиптических уравнений, М., Наука, 1976.
- [4] А.А. Самарский, Е.С. Николаев, Методы решения сеточных уравнений, М., Наука, 1978.
- [5] Р.Д. Лазаров, В.Л. Макаров, А.А. Самарский, О построении и исследовании однородных разностных схем, Матем. сборник, т. 117 (159), No 4, 1982, стр. 469 – 480.
- [6] А.Н. Толстых, Мультиоператорные схемы произвольного порядка, использующие нецентрированные компактные аппроксимации, Докл. РАН, 1999, том 366, No 3, стр. 319-322.
- [7] И.В. Пузынин, Т.П. Пузынина, Т.А. Стриж, SLIPN4 – программа для численного решения задачи Штурма - Лиувилля, Сообщения ОИЯИ, Дубна, P11 -87-332.
- [8] Т. Жанлав, Об аппроксимации решений краевых задач кубическими сплайнами, Препринт ОИЯИ, Дубна, P11-89-343.
- [9] Т. Жанлав, И.В. Пузынин, Эволюционный ньютонский процесс решения нелинейных уравнений, ЖВМиМФ, т. 32, No 1, 1992, стр. 3 – 12.
- [10] Е.В. Земляная, И.В. Пузынин, Т.П. Пузынина, PROGS2N4 - программа для решения краевой задачи для системы дифференциальных уравнений, Сообщение ОИЯИ, Дубна, P11-97-414.
- [11] Л.В. Канторович, Об одном новом методе приближенного решения уравнений в частных производных, ДАН СССР, т. 2, No 8-9, 1934, стр. 532–536.
- [12] Э.Б. Карпиловская, О сходимости метода коллокации для некоторых граничных задач математической физики, Сиб. мат. журнал, т. 4, No 3, 1963.
- [13] С. Рубин, П. Хосла, Численные решения повышенной точности, использующие кубические сплайны, Ракетная техника и космонавтика, т. 14, No 7 (1976).
- [14] Ю.С. Завьялов, Б.И. Квасов, В.Л. Мирошниченко, Методы сплайн–функций, М., Наука, 1980.
- [15] А.И. Гребенников, Метод сплайнов в численном анализе, М.: Изд-во Моск. Унта, 1997.
- [16] К. де Боор, Практическое руководство по сплайнам, М., 1987.
- [17] U. Ascher, J. Christiansen and R.D. Russell, Collocation software for boundary-value ODEs, ACM Trans. math software, 7 (1981), pp. 209-222.
- [18] T.L. Boyadjiev and Z.D. Genchev, Study of the Modified Ginzburg-Landau Type Equation for a Josephson Junction, Journal of Physical Studies, vol. 5, No 3 (2001), pp. 1-7.

- [19] T. Boyadjiev and M. Todorov, Numerical Investigation of a Bifurcation Problem with free Boundaries Arising from the Physics of Josephson Junctions, e-print: cond-mat/9809297; Математическое моделирование, vol. 12, No 4, 2000, pp. 61-72.
- [20] T. Boyadjiev, M. Todorov, Minimal Length of Josephson Junctions with Stable Fluxon Bound States, e-print: cond-mat/0012468; Superconducting Science and Technology, 14 (2002), pp. 1-7.
- [21] P. Fiziev, S. Yazadjiev, T. Boyadjiev and M. Todorov, Boson stars in massive dilatonic gravity, e-print: gr-qc/0001103; Physical Review D, 61 124018 (2000).
- [22] T. Boyadjiev, M. Todorov, P. Fiziev and S. Yazadjiev, Mathematical Modeling of Boson-Fermion Stars in the Generalized Scalar-Tensor Theories of Gravity, e-print: math.sc/9911118; Journal of Comp. Phys., vol. 166, No 2, January 2001, pp. 253-270.
- [23] S.S. Yazadjiev, P.P. Fiziev, T.L. Boyadjiev and M.D. Todorov, Electrically Charged Einstein-Born-Infeld Black Holes with Massive Dilaton, e-print: hep-th/0105165; Mod. Phys. Lett. A, v. 16, No 33 (2001), pp. 2143-2149.
- [24] Т.Л. Бояджи́ев, П.П. Физиев, Численное моделирование черных дыр с массивным дилатоном, Сообщения ОИЯИ, Дубна, Р2-2002-1.
- [25] И.В. Пузынин, И.В. Амирханов, Е.В. Земляная, В.Н. Первушин, Т.П. Пузынина, Т.А. Стриж, В.Д. Лахно, Обобщенный непрерывный аналог метода Ньютона для численного исследования некоторых нелинейных квантово-полевых моделей, ЭЧАЯ, т. 30, No. 1 (1999) с. 210—265.

Получено 25 апреля 2002 г.

Бояджиев Т. Л.

P11-2002-101

Сплайн-коллокационная схема повышенного порядка точности

В настоящей работе предложена схема сплайн-коллокации для решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Для достаточно гладких решений точность схемы $O(h^4)$ на равномерной сетке с шагом h . Реализация схемы сводится к системе алгебраических уравнений с блочно-диагональной матрицей, для решения которой применяется метод, обобщающий классический метод прогонки. Схема отличается простотой реализации на равномерных и неравномерных сетках и легко обобщается на задачи с разрывными коэффициентами без нарушения структуры алгебраической системы. При этом точность $O(h^4)$ сохраняется на интервалах гладкости решений.

Схема может быть использована при решении широкого класса задач в разных областях физики. В частности, она с успехом применялась при решении ряда задач физики джозефсоновских переходов, теории бозонных и бозонно-фермионных звезд, а также физики черных дыр с массивным дилатоном.

Работа выполнена в Лаборатории информационных технологий ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2002

Перевод автора

Boyadjiev T. L.

P11-2002-101

Spline-Collocation Scheme of Higher Order of Accuracy

A spline-collocation scheme of higher order of accuracy for solving boundary value problems for ordinary differential equations is proposed. For smooth enough solutions the precision of the scheme is $O(h^4)$ on the uniform grid. The implementation of the scheme leads to a block-diagonal algebraic system, solved by means of the appropriate sweep method. The scheme can be easily generalized on discontinuous problems without violation of the structure of the algebraic system.

The scheme can be used for solving various physical problems.

The investigation has been performed at the Laboratory of Information Technologies, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2002