

**Ταλαντώσεις νετρίνων στο  
πείραμα MINOS:  
Αναγνώριση ηλεκτρονίων  
στον Ανιχνευτή Βαθμονόμησης**

**Γεώργιος Χ. Χουδαλάκης**

(Α.Μ. 99266)

**Διπλωματική εργασία**  
Επιβλέπων Καθηγητής: Γεώργιος Τζανάκος

**Πανεπιστήμιο Αθηνών**  
**Τομέας Πυρηνικής Φυσικής και Στοιχειωδών Σωματιδίων**  
**Εργαστήριο Φυσικής Υψηλών Ενέργειών και Εφαρμογών**

**Μάιος 2004**

στη μητέρα μου



## Πίνακας περιεχομένων

<b>ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ</b>	<b>5</b>
<b>ΕΙΣΑΓΩΓΗ</b>	<b>6</b>
<b>ΠΡΩΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ – ΘΕΩΡΙΑ</b>	<b>9</b>
ΚΑΘΙΕΡΩΜΕΝΟ ΠΡΟΤΥΠΟ, ΑΣΘΕΝΕΙΣ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΜΙΞΗ	9
ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΝΕΤΡΙΝΩΝ ΕΝ ΚΕΝΩ	12
<i>Ταλαντώσεις νετρίνων για 2 γενεές</i>	16
<i>Ταλαντώσεις νετρίνων για 3 γενεές – με προσεγγίσεις</i>	19
<i>Ταλαντώσεις στις 3 γενεές – χωρίς προσεγγίσεις</i>	22
<i>Διερεύνηση για <math>\delta=0</math></i>	26
<i>Φαινόμενα που εξαρτώνται από το <math>\delta</math></i>	28
<i>Μέτρηση του ταλαντωμένου ενεργειακού φάσματος</i>	39
ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΝΕΤΡΙΝΩΝ ΠΑΡΟΥΣΙΑ ΥΛΗΣ	47
<i>Ταλαντώσεις δύο γεύσεων στην ύλη</i>	49
<i>Ταλαντώσεις σε μεταβαλλόμενη συγκέντρωση ηλεκτρονίων</i>	56
<i>Ταλαντώσεις τριών γεύσεων στην ύλη</i>	69
<b>ΔΕΥΤΕΡΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ – ΠΕΙΡΑΜΑΤΑ ΝΕΤΡΙΝΩΝ</b>	<b>73</b>
ΤΟ ΠΕΙΡΑΜΑ SNO	74
ΤΟ ΠΕΙΡΑΜΑ HEIDELBERG-MOSCOW	78
KAMLAND	79
ΤΟ ΠΕΙΡΑΜΑ IMB	81
ΤΟ ΤΗΛΕΣΚΟΠΙΟ ΝΕΤΡΙΝΩΝ AMANDA	83
ΤΟ ΠΕΙΡΑΜΑ MAINZ	84
ΤΟ ΠΕΙΡΑΜΑ LSND	86
ΤΟ ΠΕΙΡΑΜΑ MINOS	91
ΓΕΝΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ	91
ΣΥΝΟΨΗ ΣΤΟΧΩΝ ΚΑΙ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΠΕΙΡΑΜΑΤΟΣ	91
ΔΕΣΜΗ ΝΕΤΡΙΝΩΝ ΚΑΙ ΤΟΠΟΘΕΤΗΣΗ ΤΟΥ ΠΕΙΡΑΜΑΤΟΣ	94
Ο ΚΟΝΤΙΝΟΣ ΑΝΙΧΝΕΥΤΗΣ	96
Ο ΜΑΚΡΙΝΟΣ ΑΝΙΧΝΕΥΤΗΣ	99
ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑ ΤΟΥ ΣΠΙΝΘΗΡΙΣΤΗ – ΣΥΛΛΟΓΗ ΣΗΜΑΤΟΣ	101
Ο ΑΝΙΧΝΕΥΤΗΣ CALDET	105
<b>ΤΡΙΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ – ΑΝΑΛΥΣΗ</b>	<b>109</b>
ΠΡΟΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ	109
ΤΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ TOF	111
ΤΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ DISPLAY	114
ΕΛΕΓΧΟΣ ΤΗΣ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΗΣ ΚΑΛΟΡΙΜΕΤΡΙΚΗΣ ΑΠΟΚΡΙΣΗΣ	119
ΣΥΓΚΡΙΣΗ MONTE CARLO ΚΑΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ	128
ΔΙΑΧΩΡΙΣΤΙΚΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΓΙΑ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΑ – ΜΗ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΑ	134
ANN'S ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΥ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΩΝ – ΜΗ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΩΝ	150
<i>1. ποιες μεταβλητές να χρησιμοποιηθούν ως σήματα εισόδου</i>	152
<i>2. Ποια αρχιτεκτονική είναι προτιμότερη</i>	154
<i>3. Τα ή άνισα signals και backgrounds στην εκπαίδευση</i>	155
<i>4. Εφαρμογή σε άνισο data set – πρόγνωση παραμέτρων</i>	157
<i>Παρουσίαση νευρωνικών (άνευ cross-talk cut)</i>	161
<i>5. Αποτελέσματα του pulse height cut στα νευρωνικά δίκτυα</i>	176
<b>ΤΕΤΑΡΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ – ΚΑΤΑΚΛΕΙΔΑ</b>	<b>193</b>
ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΠΕΡΑΙΤΕΡΩ ΜΕΛΕΤΗ ΤΟΥ ΘΕΜΑΤΟΣ	194
<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ</b>	
<b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</b>	



## Ευχαριστίες

Οφείλω τις θερμότερες των ευχαριστιών στον επιβλέποντα καθηγητή μου, Αν. Καθηγητή Γεώργιο Τζανάκο. Αρχικά, διότι μετά προθυμίας με δέχθηκε στην ερευνητική του ομάδα δίνοντάς μου την ευκαιρία να εκπονήσω τη διπλωματική μου εργασία στο τόσο ενδιαφέρον θέμα της φυσικής νετρίνων. Εν συνεχεία, για την μετά ειλικρινούς ενδιαφέροντος επίβλεψη και βοήθεια που μου παρείχε καθ' όλη την εργασία μου. Αλλά αυτό για το οποίο πιστεύω ότι είμαι περισσότερο τυχερός είναι το γεγονός ότι έγινα κοινωνός του κλίματος αγαστής συνεργασίας και ενθουσιασμού για την έρευνα που επικρατεί στην ομάδα του. Υπ' αυτές τις συνθήκες, η πολύωρη εργασία, που πολλές φορές διήρκεσε ολόκληρες μέρες και νύκτες, όχι μόνο δε με κούρασε, αλλά μου ενδυνάμωσε την αυτοπεποίθηση και τον ενθουσιασμό. Τα πολύωρα σεμινάρια και επιστημονικά συμβούλια, που συστηματικά διεξήγοντο στο γραφείο του, μου προσέφεραν ανεκτίμητες γνώσεις, απόσταγμα πολυετούς πείρας του ίδιου, καθώς και εμπειρία επικοινωνίας, τόσο μεταξύ των μελών της ομάδας μας όσο και με συνεργαζόμενες ομάδες του εξωτερικού. Για όλους του παραπάνω λόγους και για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε, τον ευχαριστώ εγκαρδίως.

Θα ήταν παράληψη να μην αναφέρω τους συνεργάτες από το εξωτερικό οι οποίοι με βοήθησαν κατά καιρούς, Mike Kordosky, Patricia Vahle και Karol Lang, Austin University.

Ευχαριστώ επίσης ολόκληρη την ομάδα των συναδέλφων στο Εργαστήριο Φυσικής Υψηλών Ενεργειών και Εφαρμογών. Τον Μίλτο Ζώη, για τη βοήθεια που πολλές φορές μου προσέφερε, για τις γνώσεις επί των Νευρωνικών Δικτύων που μου μετέδωσε και για το ευχάριστο και φιλικό κλίμα που καλλιεργούσε στο εργαστήριο. Τον Παναγιώτη Σταμούλη για τις πάμπολλες φορές που με βοήθησε σε διάφορα προβλήματα και για την αμέριστη διάθεσή του να συμπροβληματιστεί μαζί μου για επιστημονικά και γενικότερα ζητήματα. Τον Βαγγέλη Λογαρά για την ευγένεια, την καλή παρέα και τις πληροφορίες που μου προσέφερε για το αντικείμενό του, τα ηλεκτρονικά. Τη Μαρία Νικολάου για τις συμβουλές και το ενδιαφέρον της. Τη Νική Σαουλίδου και τον Κώστα Ανδρεόπουλο για την υποδομή που είχαν αφήσει στο εργαστήριο. Ειδικά ευχαριστώ τη Νίκη και για τις συμβουλές που πολλές φορές μου έδωσε, τόσο περί ερευνητικών θεμάτων όσο και ευρύτερα. Σε όλους τους παραπάνω, καθώς και στον Δημήτρη Καραμήτρο και στον Αρτέμιο Γερομήτσο, εύχομαι το ευ πράττειν και το ευδαιμονείν.

## Εισαγωγή

Η ύπαρξη του νετρίνου προτάθηκε για πρώτη φορά από τον Wolfrang Pauli, τον Φεβρουάριο του 1930, ενώ ήταν καθηγητής στο πανεπιστήμιο της Ζυρίχης. Αυτή η ιδιαίτερα τολμηρή ιδέα προτάθηκε για να ερμηνεύσει το γεγονός ότι κατά τη β-διάσπαση η ενέργεια του ηλεκτρονίου είχε συνεχές φάσμα. Εάν ένας ραδιενεργός πυρήνας διασπαζόταν σε έναν θυγατρικό πυρήνα και ένα ηλεκτρόνιο (ή ποζιτρόνιο), τότε από την απλή κινηματική των αντιδράσεων τύπου  $1 \rightarrow 2$  προκύπτει ότι, με δεδομένη τη μάζα του θυγατρικού πυρήνα και του ηλεκτρονίου, μόνο μία ενέργεια θα ήταν επιτρεπτή για το ηλεκτρόνιο. Όμως, με την πρόταση του Pauli ότι κατά τη διάσπαση παραγότανε και ένα αφανές σωματίο, το πρόβλημα λυνόταν διότι η κινηματική  $1 \rightarrow 3$  επιτρέπει στα προϊόντα να έχουν συνεχές ενεργειακό φάσμα.

Τρία χρόνια αργότερα, το 1933, ο Fermi βαπτίζει το αφανές σωματίο του Pauli “neutrino” ενώ θεμελιώνει και τη θεωρία των ασθενών αλληλεπιδράσεων. Η ιδιαιτερότητα των νετρίνων είναι ότι είναι τα μοναδικά σωματίδια που δεν έχουν ηλεκτρικό φορτίο, ούτε χρώμα, επομένως αλληλεπιδρούν μόνο ασθενώς και βαρυτικά. Κατά συνέπεια, η ανίχνευση των νετρίνων είναι πειραματικά δύσκολη και γι’ αυτό δεν είχε εξακριβωθεί η ύπαρξή τους πριν το 1956, οπότε παρατηρήθηκε για πρώτη φορά. Η παρατήρηση έγινε από τους Frederick Reines και Clyde Cowan, στο πείραμα «Poltergeist project», στον πυρηνικό σταθμό Savannah River.

Στην αρχή δεν είχε ακόμα διαπιστωθεί ότι υπάρχουν διάφορες εκφάνσεις του νετρίνο. Από πειράματα όμως που έγιναν το 1962 φάνηκε ότι υπήρχαν δύο είδη νετρίνων, ένα που αντιδρώντας παρήγαγε ηλεκτρόνιο και ένα που παρήγαγε μιονίο. Το πρώτο ονομάστηκε ηλεκτρονικό νετρίνο ( $\nu_e$ ) και το δεύτερο μιονικό νετρίνο ( $\nu_\mu$ ). Το 1988 οι Steinberger, Schwartz και Lederman μοιράζονται το βραβείο Nobel για την ανακάλυψη του  $\nu_\mu$  το 1962.

Το 1975 παρατηρήθηκε το τ-λεπτόνιο. Από τη στιγμή που στο Standard Model είχε αντιστοιχηθεί ένα νετρίνο στο ηλεκτρόνιο (1<sup>η</sup> γενεά), ένα νετρίνο στο μιονίο (2<sup>η</sup> γενεά) και το τ-λεπτόνιο (3<sup>η</sup> γενεά) έμενε αζευγάρωτο, υπήρχε μεγάλη προσδοκία ότι το  $\nu_\tau$  ήταν υπαρκτό και δεν είχε ακόμα παρατηρηθεί. Πράγματι, το  $\nu_\tau$  παρατηρήθηκε στο πείραμα DONUT του Fermilab, λίαν προσφάτως, το καλοκαίρι του 2000.

Όμως, με την παρατήρηση και του τρίτου νετρίνο δεν κλείνει αυτό το κεφάλαιο της φυσικής. Διάφορα αινίγματα ανέκυψαν από τη φυσική των νετρίνων, πολλά από τα οποία παραμένουν άλυτα. Για παράδειγμα, ενώ στην αρχή ο Pauli θεώρησε ότι το νετρίνο έχει μηδενική μάζα και για αρκετές δεκαετίες αυτή ήταν η επικρατέστερη άποψη, σήμερα είμαστε βέβαιοι ότι η μάζα των νετρίνων δεν είναι μηδενική, αλλά σίγουρα είναι πολύ μικρή και έχουν τεθεί ανώτατα όρια γι’ αυτήν. Επίσης, τα νετρίνα δεν αποτελούν ιδιοκαταστάσεις της μάζας, γεγονός το οποίο, όπως θα δούμε αναλυτικά στη συνέχεια, γεννά το φαινόμενο των ταλαντώσεων των νετρίνων. Το πείραμα MINOS είναι ένα πείραμα που σκοπεύει να προσδιορίσει ορισμένες από τις παραμέτρους που καθορίζουν τις ταλαντώσεις των νετρίνων. Η παρούσα εργασία έχει γίνει στο πλαίσιο αυτού του πειράματος που θα λειτουργήσει στο FermiLab, οπότε πρόκειται να γίνει εκτενής αναφορά στη φυσική και στην οργανολογία του MINOS.

Το ενδιαφέρον που δείχνει η επιστημονική κοινότητα για τη φυσική των νετρίνων είναι απόλυτα δικαιολογημένο. Η κατανόηση της φύσεως των νετρίνων δεν πρόκειται μόνο να ρίξει φως στον τρόπο με τον οποίο λειτουργεί η φύση σε επίπεδο στοιχειωδών σωματιδίων και πεδίων, αλλά θα προάγει τους κλάδους της αστροφυσικής και της κοσμολογίας.

Όσον αφορά στην αστροφυσική, αυτό που καθιστά τα νετρίνα χρησιμότερα σωματίδια είναι ότι παράγονται σε υπεραφθονία στους αστέρες και στους γαλαξίες και, από τη στιγμή που δεν αλληλεπιδρούν ισχυρά ή ηλεκτρομαγνητικά, προχωρούν σχεδόν ανεπηρέαστα μέσα στο σύμπαν. Οι τροχιές τους επηρεάζονται μόνο από δύο παράγοντες: α) τη βαρύτητα που καμπυλώνει το χωροχρόνο δημιουργώντας τους λεγόμενους βαρυτικούς φακούς και β) τις ασθενείς αλληλεπιδράσεις που έχουν τα νετρίνα με την ύλη, οι οποίες όμως είναι ελάχιστες σε σχέση με τις ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις που έχουν τα φωτόνια, που μέχρι σήμερα αποτελούν τους κύριους φορείς πληροφορίας για τους αστροφυσικούς. Για παράδειγμα, κατά την έκρηξη ενός υπερκαινοφανούς (supernova) τα νετρίνα δραπέτευουν από το σημείο παραγωγής τους σχεδόν ανεμπόδιστα, ενώ τα φωτόνια παραμένουν μέσα στην εκρηγνύομενη ύλη για αρκετό χρόνο και υπόκεινται σε πολλαπλές σκεδάσεις μέχρι να βγουν προς το ανοιχτό

διάστημα, εάν στο μεταξύ δεν έχουν απορροφηθεί πλήρως. Καταλαβαίνουμε λοιπόν γιατί η κατασκευή τηλεσκοπίων που παρατηρούν νετρίνα είναι ένας από τους τομείς που υπόσχεται πολλά για τις επόμενες δεκαετίες. Όχι μόνο θα μπορεί κανείς να παρατηρήσει την «καρδιά» των αστέρων και των γαλαξιών, από την οποίαν είναι αδύνατον να δραπετεύσουν φωτόνια, αλλά θα αυξήσει τον ορατό ορίζοντα του σύμπαντος κατά πολύ. Ο λόγος είναι η ύπαρξη του υποβάθρου ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας. Λόγω αυτού, το σύμπαν μοιάζει με ένα τεράστιο ηλεκτρομαγνητικό απορροφητή, με την έννοια ότι οτιδήποτε αλληλεπιδρά με τα φωτόνια του μικροκυματικού υποβάθρου είναι καταδικασμένο να απορροφηθεί μετά από μια πεπερασμένη διαδρομή μέσα στο σύμπαν. Για παράδειγμα, τα πρωτόνια πολύ υψηλής ενέργειας (της τάξης των  $10^{20}$  eV) αλληλεπιδρούν με τα μικροκυματικό υπόβαθρο χάνοντας ενέργεια. Το ίδιο κάνουν και φωτόνια πολύ υψηλής ενέργειας που κατά την αλληλεπίδραση με το υπόβαθρο παράγουν  $e^+e^-$ . Αντιθέτως, τα νετρίνα αλληλεπιδρούν τόσο ασθενώς που η μέση ελεύθερη διαδρομή τους είναι κοσμολογικής τάξης μεγέθους.

Για την κοσμολογία τα νετρίνα είναι εξίσου σημαντικά. Είναι γνωστό ότι δεν έχει ακόμα γίνει κατανοητή η σύσταση της σκοτεινής ύλης που φαίνεται να υπάρχει στο σύμπαν από άκρη σ' άκρη. Αυτή η ύλη αλληλεπιδρά βαρυτικά και δεν εκπέμπει ακτινοβολία για να γίνει ορατή. Θεωρείται ότι είναι ανομοιογενώς κατανεμημένη στο σύμπαν, με μεγαλύτερη συγκέντρωση στο βαρυτικό κέντρο των ουρανίων σωμάτων. Πιθανολογείται ότι είναι υπεύθυνη για το φαινόμενο της ανώμαλης περιστροφής των γαλαξιών περί τον άξονά τους. Η ανώμαλη περιστροφή, περιληπτικά, πρόκειται για το φαινόμενο κατά το οποίο ο δίσκος ενός γαλαξία περιστρέφεται ολόκληρος με την ίδια γωνιακή ταχύτητα, σα να είναι συμπαγής, ανεξαρτήτως της απόστασης κάθε σημείου από το βαρυτικό κέντρο του γαλαξία. Αυτή η κίνηση δε συμφωνεί με τους νόμους του Kepler και μπορεί να εξηγηθεί μόνο αν θεωρήσουμε ότι στους γαλαξίες υπάρχει και άλλη ύλη που αλληλεπιδρά μόνο βαρυτικά και δεν τη βλέπουμε. Από υπολογισμούς που έχουν γίνει συμπεραίνεται ότι μάλλον το 90% περίπου της συνολικής μάζας του σύμπαντος αποτελεί σκοτεινή ύλη. Είναι πιθανόν τα νετρίνα με την μικρότατη μάζα τους να αποτελούν ένα μέρος της σκοτεινής ύλης και συγκεκριμένα αυτό που ονομάζουμε *hot ή relativistic dark matter*, δηλαδή σχετικιστικά κινούμενη σκοτεινή ύλη.



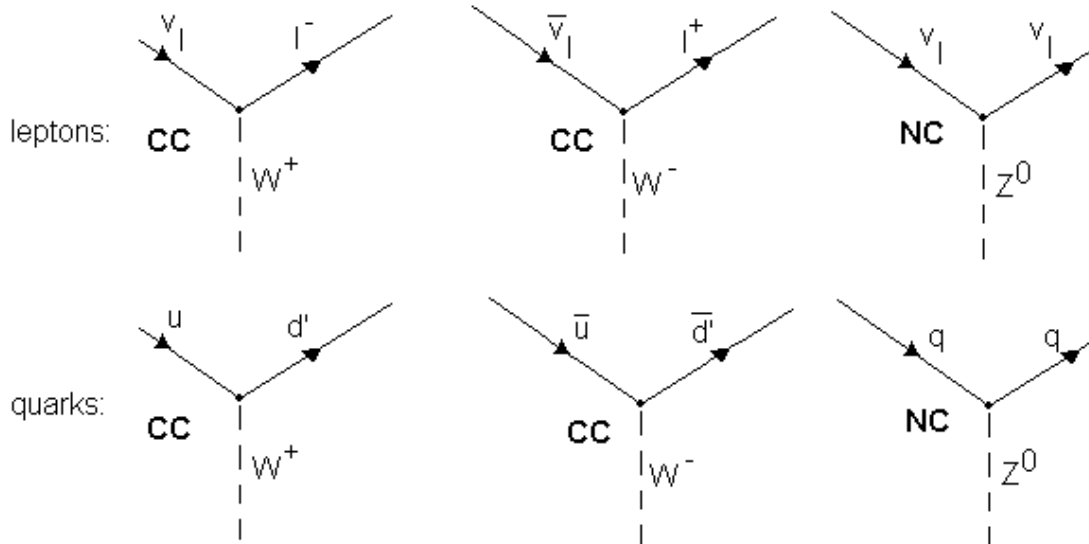


## Πρώτο Κεφάλαιο – Θεωρία

### Καθιερωμένο πρότυπο, ασθενείς αλληλεπιδράσεις και μίξη

Το καθιερωμένο πρότυπο (Standard Model ή SM) περιγράφει τη συμπεριφορά των στοιχειωδών σωματιδίων χρησιμοποιώντας αφενός μεν καλά καθορισμένους κανόνες, όπως η διατήρηση της τετραορμής και ορισμένων κβαντικών αριθμών, αφετέρου δε ορισμένες παραμέτρους εισόδου (input parameters) που προκύπτουν από πειραματικές μετρήσεις. Για παράδειγμα, το πείραμα έδειξε ότι η μάζα του  $e^-$  είναι  $0.511 \text{ MeV}/c^2$ , γεγονός το οποίο δεν επιδέχεται περαιτέρω αιτιολόγηση. Όπως εύκολα αντιλαμβάνεται κανείς, οι παράμετροι του SM παίζουν θεμελιακό ρόλο στην περιγραφή της φύσεως.

Μεταξύ των διαφόρων παραμέτρων που περιλαμβάνονται στο SM είναι και οι παράμετροι μίξης. Η μίξη στην οποία αναφερόμαστε συναντάται στις ασθενείς αλληλεπιδράσεις (weak interactions), τόσο των quarks όσο και των λεπτονίων. Σύμφωνα με το SM οι ασθενείς αλληλεπιδράσεις έχουν ως φορέα (mediator) τα μποζόνια  $W^+$ ,  $W^-$  και  $Z^0$ . Ορισμένα βασικά διαγράμματα Feynman της ασθενούς αλληλεπίδρασης φαίνονται στην εικόνα 1.1.



**Εικόνα 1.1:** Κόμβοι της ασθενούς αλληλεπίδρασης, φορτισμένου ρεύματος (charge current ή CC) και ουδέτερου ρεύματος (neutral current ή NC)

Η μίξη στην περίπτωση των quarks είναι το γεγονός ότι η ασθενής αλληλεπίδραση δε συζευγνύει ιδιοκαταστάσεις γεύσεως (flavor) αλλά στις weak isospin doublets συμμετέχουν καταστάσεις «νόθες» ως προς τη γεύση. Συγκεκριμένα, οι διπλέτες για τα quarks είναι:

$$\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ b' \end{pmatrix} \quad \text{όπου} \quad \begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{CKM} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}. \quad \text{Ο πίνακας CKM είναι ο μοναδιακός}$$

(unitary) πίνακας Cabibbo–Kobayashi–Maskawa. Εφόσον ο πίνακας αυτός είναι μη διαγώνιος, τα  $d'$ ,  $s'$  και  $b'$  είναι γραμμικοί συνδυασμοί των ιδιοκαταστάσεων flavor  $d$ ,  $s$  και  $b$ . Επομένως, υπάρχει μη μηδενική πιθανότητα, από μία ασθενή αλληλεπίδραση να προκύψει ένα  $s$ -quark από ένα  $u$ -quark. Βέβαια, αυτή η πιθανότητα είναι μικρή σε σχέση με την πιθανότητα να προκύψει  $d$ -quark, λόγω των τιμών του πίνακα CKM που είναι σχεδόν διαγώνιος:

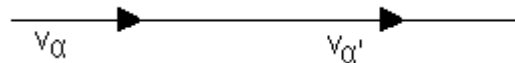
$$\text{CKM} = \begin{pmatrix} 0.973 & 0.23 & \sim 0 \\ \sim 0.24 & \sim 0.97 & \sim 0.06 \\ \sim 0 & \sim 0 & \sim 1 \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

Αντίστοιχο είναι το φαινόμενο της μίξης και στα λεπτόνια. Οι λεπτονικές weak isospin doublets είναι:  $\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix}$ . Τα νετρίνα που συμμετέχουν στις διπλέτες αυτές είναι μεν ιδιοκαταστάσεις flavor, όμως δεν είναι ιδιοκαταστάσεις μάζας. Αναμιγνύονται με τις ιδιοκαταστάσεις μάζας, που τις συμβολίζουμε με  $\nu_1, \nu_2$  και  $\nu_3$  μέσω του unitary πίνακα PMNS:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = U^* \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

Μια ιδιαιτερότητα των νετρίνων είναι ότι δε διαθέτουν φορτίο. Είναι τα μοναδικά στοιχειώδη σωμάτια που δεν αλληλεπιδρούν ηλεκτρομαγνητικά. Επομένως, αν αγνοήσουμε τη βαρυτική αλληλεπίδραση που είναι αμελητέα, η μόνη αλληλεπίδραση που κάνουν τα νετρίνα είναι η ασθενής. Άρα, όλα τα νετρίνα που εμφανίζονται στη φύση είναι νετρίνα που έχουν προκύψει από ασθενή αλληλεπίδραση. Δηλαδή είναι νετρίνα  $\nu_e, \nu_\mu$  και  $\nu_\tau$ , που σημαίνει ότι στη φύση δεν υπάρχει ούτε ένα νετρίνο με καλά ορισμένη μάζα. Όλα τα νετρίνα είναι γραμμικοί συνδυασμοί των ιδιοκαταστάσεων μάζας.

Όπως θα δείξουμε αυστηρά στην επόμενη παράγραφο, βασική συνέπεια του παραπάνω γεγονότος είναι το ότι τα νετρίνα ταλαντώνονται. Η ταλάντωση σημαίνει ότι ένα  $\nu_\alpha$  μπορεί να μετατραπεί σε ένα  $\nu_{\alpha'}$  από μόνο του, χωρίς να γίνει κάποια αλληλεπίδραση, δηλαδή χωρίς να υπάρχει κάποιος κόμβος σε ένα διάγραμμα Feynman. Δηλαδή, την ταλάντωση θα μπορούσαμε να την απεικονίσουμε ως εξής:

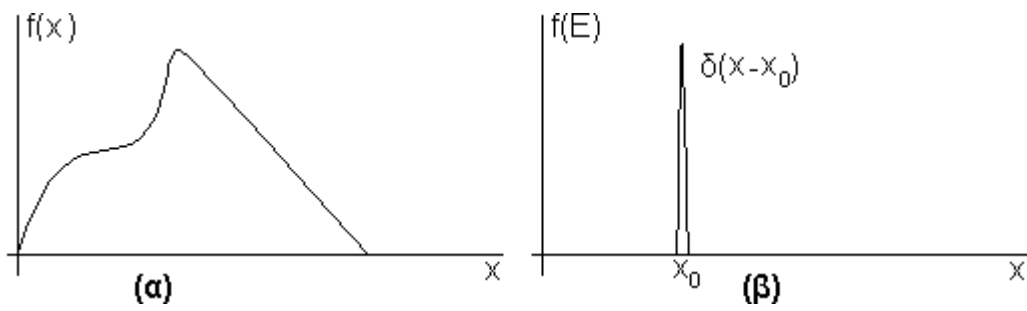


Το φαινόμενο έχει ονομαστεί «ταλάντωση» διότι έχει παλινδρομικό χαρακτήρα. Για παράδειγμα μπορεί να γίνει η «μεταμόρφωση»  $\nu_\alpha \rightarrow \nu_{\alpha'} \rightarrow \nu_\alpha \rightarrow \nu_{\alpha'} \rightarrow \nu_\alpha \rightarrow \dots$

Βέβαια, πρέπει να είναι κανείς προσεκτικός και να μην φαντάζεται αυτήν την ταλάντωση σαν μια «μεταμόρφωση» που μπορεί να παρατηρηθεί σε κάποιο συγκεκριμένο τόπο και χρόνο. Δηλαδή, ας υποθέσουμε ότι είναι δυνατόν να παρακολουθούμε ένα  $\nu_\alpha$  καθώς αυτό κινείται, σα να το ακολουθούσαμε με μια βιντεοκάμερα. Όσο παρατηρούμε το νετρίνο και βλέπουμε ότι αυτό είναι  $\nu_\alpha$  δεν πρόκειται να αλλάξει και να γίνει  $\nu_{\alpha'}$ . Αυτό που συμβαίνει είναι ότι αν τη στιγμή  $t=0$  διαθέτω ένα πλήθος  $X$  από πανομοιότυπα  $\nu_\alpha$ , τότε, αν επανεξετάσω αυτόν τον πληθυσμό σε χρόνο  $t>0$ , ένα ποσοστό  $x_{(t)}\%$  από τα  $X$  θα έχει μετατραπεί σε  $\nu_{\alpha'}$ .

Η παραπάνω παρατήρηση πηγάζει κατ' ευθείαν από την κβαντομηχανική. Για να γίνει κατανοητό το επιχείρημα θα αναφέρω ένα άλλο παράδειγμα που θα αναδείξει τη σημασία που έχει η μέτρηση στην κβαντομηχανική. Έστω ότι έχουμε ένα σύστημα που είναι μη καθορισμένης θέσης, με κυματοσυνάρτηση  $\psi(x, t)$

Ως γνωστόν, η πυκνότητα πιθανότητας ως προς τη θέση τη στιγμή  $t=0$  είναι  $f(x)=|\psi(x,0)|^2$ , έστω της μορφής του σχήματος 2α. Αυτή η πυκνότητα πιθανότητας δηλώνει ότι αν έχουμε ένα πολύ μεγάλο πλήθος  $X$  πανομοιότυπων συστημάτων και μετρήσουμε τη θέση τους στη στιγμή  $t=0$ , θα βρούμε  $f(x) \cdot dx$  συστήματα να έχουν θέση από  $x$  μέχρι  $x+dx$ . Αν, όμως, πάρουμε ένα σύστημα συγκεκριμένο, μετρήσουμε τη θέση του και βρούμε την τιμή  $x_0$ , τότε αυτόματα διαταράσσεται η αρχική κατανομή της πυκνότητας πιθανότητας και γίνεται  $\delta(x-x_0)$  (βλ. σχήμα 2β). Αφήνοντας το σύστημα μετά τη μέτρηση χωρίς να το παρατηρούμε, η κατανομή ως προς τις θέσεις αρχίζει να «ανοίγει» μέχρι που μετά από κάποιον χρόνο (θεωρητικά άπειρο χρόνο) θα ξαναπάρει ακριβώς τη μορφή της  $f(x)$ . Αν δηλαδή στο ίδιο σύστημα κάνω μια δεύτερη μέτρηση πολύ σύντομα μετά την πρώτη μέτρηση θα μετρήσω κατά πάσα πιθανότητα μια θέση πολύ κοντά στην  $x_0$ , ενώ αν αφήσω αρκετό χρόνο να περάσει μετά την πρώτη μέτρηση, η δεύτερη μέτρηση θα είναι πια εντελώς ανεπηρέαστη από την πρώτη.



**Εικόνα 1.2:** (α) Η κατανομή πυκνότητας πιθανότητας πριν από οποιαδήποτε μέτρηση. (β) Η πυκνότητα πιθανότητας ως προς τις ενέργειες αμέσως μετά από μια μέτρηση.

## Ταλαντώσεις νετρίνων εν κενώ

Από τα πειράματα που έχουν γίνει μέχρι σήμερα φαίνεται ότι τα νετρίνα έχουν μεν μάζες (χωρίς να είναι ιδιοκαταστάσεις μάζας όπως είπαμε) αλλά αυτές είναι μικρές, όπως δείχνει ο πίνακας 1.1.

flavor	Άνω όριο μάζας	C.L.
$\nu_e$	$3 \text{ eV}/c^2$	αβέβαιο
$\nu_\mu$	$0.19 \text{ MeV}/c^2$	90%
$\nu_\tau$	$18.2 \text{ MeV}/c^2$	95%

**Πίνακας 1.1:** Άνω όρια των μαζών των νετρίνων, όπως έχουν διαμορφωθεί μέχρι τον Ιούλιο του 2002

Επομένως, η ενέργεια ενός νετρίνου δίνεται προσεγγιστικά από τη σχέση (1.3):

$$E = \sqrt{m^2 + p^2} = p \sqrt{\frac{m^2}{p^2} + 1} \approx p \left( 1 + \frac{m^2}{2p^2} \right) = p + \frac{m^2}{2p} \quad (1.3)$$

Σύμφωνα με τη σχέση (1.2) μπορούμε να γράψουμε για κάθε flavor  $\nu_\alpha$  ξεχωριστά:

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_i U_{\alpha i}^* |\nu_i\rangle \quad (1.4)$$

Προφανώς, ο συμβολισμός που χρησιμοποιούμε είναι τέτοιος που ο πίνακας μίξης έχει στοιχεία:

$$U = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu1} & U_{\mu2} & U_{\mu3} \\ U_{\tau1} & U_{\tau2} & U_{\tau3} \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

Μια παραμετροποίηση του παραπάνω πίνακα που χρησιμοποιείται αρκετά συχνά είναι η ακόλουθη:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{diag}\{e^{i\alpha_1}, e^{i\alpha_2}, 1\} \Rightarrow$$

$$U = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \text{diag}\{e^{i\alpha_1}, e^{i\alpha_2}, 1\} \quad (1.6)$$

Όπου  $c_{ij} = \cos(\theta_{ij})$  και  $s_{ij} = \sin(\theta_{ij})$ ,  $\delta$  η Dirac CP φάση και  $\alpha_{1,2}$  οι Majorana φάσεις.

Από την κβαντομηχανική γνωρίζουμε ότι αν λύσουμε τη χρονοανεξάρτητη εξίσωση Schroedinger και διαθέτουμε τις ιδιοσυναρτήσεις της ενέργειας  $\Psi_E(x)$ , η χρονοεξαρτημένη εξίσωση Schroedinger ικανοποιείται από την κυματοσυνάρτηση

$$\Psi_E(x, t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \Psi_E(x) \quad (1.7)$$

Δηλαδή, ο τελεστής που δρα στην  $\Psi_E(x)$  για να μας δώσει την  $\Psi_E(x, t)$  είναι ο *τελεστής χρονικής εξέλιξης*:  $e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$ . Χρησιμοποιώντας φυσικές μονάδες ( $\hbar = c = 1$ ) ο τελεστής αυτός παίρνει την απλή μορφή:  $e^{-iEt}$ .

Επιπλέον, οποιαδήποτε φυσική κατάσταση μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός ιδιοκαταστάσεων της ενέργειας:

$$\Psi(x, t) = \sum_j c_j \Psi_{E_j}(x, t) \quad (1.8)$$

Από τις σχέσεις (1.7) και (1.8) προκύπτει ότι για να βρούμε τη χρονική οποιασδήποτε κατάστασης αρκεί να δράσουμε με τον κατάλληλο τελεστή χρονικής εξέλιξης σε κάθε ιδιοκατάσταση της ενέργειας που την αποτελεί:

$$\Psi(x, t) = \sum_j c_j e^{-iE_j t} \Psi_{E_j}(x) \quad (1.9)$$

Επομένως, για να βρούμε ποια θα είναι η κατάσταση του  $\nu_\alpha$  τη στιγμή  $t$  θα δράσουμε στην (1.4) με τον τελεστή χρονικής εξέλιξης. Αυτό είναι ορθό, εφόσον στο δεξί μέρος έχουμε ιδιοκαταστάσεις της μάζας με συγκεκριμένη ορμή, δηλαδή ιδιοκαταστάσεις της  $\hat{H} \approx p + \frac{m^2}{2p}$ .

Έτσι, θα πάρουμε:

$$|\nu_\alpha\rangle_t = \sum_j U_{\alpha j}^* e^{-iE_j t} |\nu_j\rangle \quad (1.10)$$

Την (1.4) μπορούμε να την γράψουμε με τέτοιο τρόπο ώστε να εκφράζει τις ιδιοκαταστάσεις μάζας  $\nu_j$  σε σχέση με τις ιδιοκαταστάσεις γεύσης  $\nu_\alpha$ . Για να το κάνουμε αυτό, είναι βολικότερο να γράψουμε την (1.4) σε μορφή πινάκων:

$$[v]_{\text{flavor}} = U^* [v]_{\text{mass}} \quad (1.11)$$

Λόγω της unitarity του πίνακα  $U$  ισχύει:

$$UU^\dagger = I \Rightarrow UU^{*T} = I \Rightarrow U^*U^T = I \quad (1.12)$$

Επομένως, πολλαπλασιάζοντας την (1.11) με τον πίνακα  $U^T$  παίρνουμε το ποθούμενο:

$$[v]_{\text{mass}} = U^T [v]_{\text{flavor}} \quad (1.13)$$

που σε επίπεδο στοιχείων των πινάκων γράφεται ως:

$$|\nu_j\rangle = \sum_\alpha U_{j\alpha}^T |\nu_\alpha\rangle = \sum_\alpha U_{\alpha j} |\nu_\alpha\rangle \quad (1.14)$$

Αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα αυτό στη σχέση (1.10) καταφέρνουμε να εκφράσουμε το  $\nu_\alpha(t)$  ως συνάρτηση του  $\nu_\alpha$ , δηλαδή του  $\nu_\alpha(t=0)$ :

$$\begin{aligned} |\nu_\alpha\rangle_t &= \sum_{j,\alpha'} U_{\alpha j}^* U_{\alpha' j} e^{-iE_j t} |\nu_{\alpha'}\rangle \\ &= \sum_{\alpha'} A_{\alpha';\alpha}(t) |\nu_{\alpha'}\rangle \end{aligned} \quad (1.15)$$

όπου

$$A_{\alpha';\alpha} \equiv \sum_j U_{\alpha j}^* U_{\alpha' j} e^{-iE_j t} \quad (1.16)$$

Από τη μορφή που έχει η (1.15) είναι φανερός ο ρόλος του  $A_{\alpha';\alpha}$ . Είναι το πλάτος μετάβασης από flavor  $\alpha$  σε flavor  $\alpha'$ . Για να βρούμε την αντίστοιχη πιθανότητα πρέπει να υπολογίσουμε το  $|A_{\alpha';\alpha}|^2 = A_{\alpha';\alpha} \cdot A_{\alpha';\alpha}^*$ .

$$\begin{aligned} A_{\alpha';\alpha} A_{\alpha';\alpha}^* &= \sum_{j,k} U_{\alpha j}^* U_{\alpha' j} e^{-iE_j t} U_{\alpha k} U_{\alpha' k}^* e^{+iE_k t} \\ &= \sum_{j,k} U_{\alpha j}^* U_{\alpha' j} U_{\alpha k} U_{\alpha' k}^* e^{-i(-E_k + E_j)t} \end{aligned} \quad (1.17)$$

Την έκφραση αυτή μπορούμε να τη γράψουμε ισοδύναμα με έναν πιο βολικό τρόπο:

$$P_{\alpha \rightarrow \alpha'} = \left| \sum_j U_{\alpha' j} \left[ \left( e^{-i(E_j - E_1)t} - 1 \right) + 1 \right] U_{\alpha j}^* \right|^2 \quad (1.18)$$

Ακολουθεί η απόδειξη ότι η (1.18) είναι ίση με την (1.17):

$$\begin{aligned} &\left| \sum_j U_{\alpha' j} \left[ \left( e^{-i(E_j - E_1)t} - 1 \right) + 1 \right] U_{\alpha j}^* \right|^2 = \left| \sum_j U_{\alpha' j} e^{-i(E_j - E_1)t} U_{\alpha j}^* \right|^2 = \\ &= \sum_{j,k} U_{\alpha' j} e^{-i(E_j - E_1)t} U_{\alpha j}^* U_{\alpha' k}^* e^{+i(E_k - E_1)t} U_{\alpha k} = \\ &= \sum_{j,k} U_{\alpha' j} U_{\alpha j}^* U_{\alpha' k}^* U_{\alpha k} e^{-i(-E_k + E_1 + E_j - E_1)t} = \sum_{j,k} U_{\alpha' j} U_{\alpha j}^* U_{\alpha' k}^* U_{\alpha k} e^{-i(E_j - E_k)t} \end{aligned}$$

Οπότε με απλές πράξεις δείξαμε ότι η (1.18) είναι ίση με την (1.17). Η (1.18), τώρα, μπορεί να γραφτεί πιο απλά εκμεταλλευόμενη την ιδιότητα του  $U$  ότι είναι unitary. Από την

$$(1.18): \quad P_{\alpha \rightarrow \alpha'} = \left| \sum_j U_{\alpha'j} \left( e^{-i(E_j - E_1)t} - 1 \right) U_{\alpha j}^* + \sum_j U_{\alpha'j} U_{\alpha j}^* \right|^2 \quad (1.19)$$

$$\text{Όμως,} \quad U^\dagger U = I \Rightarrow \sum_j U_{\alpha'j}^\dagger U_{j\alpha'} = \delta_{\alpha'\alpha} \Rightarrow \sum_j U_{j\alpha}^* U_{j\alpha'} = \delta_{\alpha'\alpha} \quad (1.20)$$

$$\text{και} \quad U U^\dagger = I \Rightarrow \sum_j U_{\alpha j} U_{j\alpha'}^\dagger = \delta_{\alpha'\alpha} \Rightarrow \sum_j U_{\alpha j} U_{\alpha'j}^* = \delta_{\alpha'\alpha} \quad (1.21)$$

Από την (1.21), βλέπουμε ότι η (1.19) γράφεται:

$$P_{\alpha \rightarrow \alpha'} = \left| \delta_{\alpha\alpha'} + \sum_j U_{\alpha'j} U_{\alpha j}^* \left( e^{-i(E_j - E_1)t} - 1 \right) \right|^2 \quad (1.22)$$

Η μάζα των νετρίνων όπως είπαμε είναι εξαιρετικά μικρή. Αυτό έχει ως συνέπεια ακόμα και για νετρίνα πολύ μικρής ενέργειας η ταχύτητα να είναι σχεδόν ίση με  $c$ . Για παράδειγμα, ακόμα και για  $\nu_e$  με  $E=100\text{eV}$  έχουμε  $\gamma m_\nu = 100\text{eV} \Rightarrow \gamma > 33.3 \Rightarrow \beta=0.9995$ . Επομένως, το  $t=(L/v)$  μπορούμε χωρίς δισταγμό να το αντικαταστήσουμε με  $(L/c) = L$ , όπου  $L$  είναι η διανυθείσα απόσταση.

Επίσης, από τη σχέση (1.3) βλέπουμε ότι:

$$E_j - E_1 = p_j + \frac{m_j^2}{2p_j} - p_1 - \frac{m_1^2}{2p_1}$$

Εφόσον οι  $\nu_j$  είναι καταστάσεις καθορισμένης μάζας, ενέργειας και ορμής, ισχύει ότι  $p_j=p_1 = p$ , επομένως:

$$E_j - E_1 = \frac{m_j^2 - m_1^2}{2p} = \frac{\Delta m_{j1}^2}{2p} \quad (1.23)$$

Αντικαθιστώντας την (1.23) στην (1.22) φτάνουμε στην πολύ χρήσιμη, όπως θα φανεί, σχέση:

$$P_{\alpha \rightarrow \alpha'} = \left| \delta_{\alpha\alpha'} + \sum_j U_{\alpha'j} U_{\alpha j}^* \left( e^{-i\Delta m_{j1}^2 \frac{L}{2p}} - 1 \right) \right|^2 \quad (1.24)$$

Ας διερευνήσουμε τι γίνεται με τις ταλαντώσεις μεταξύ αντινετρίνων. Εφόσον έχουμε τη σχέση μίξης των νετρίνων, (1.4) κάνω τις εξής 2 κινήσεις για να βρω την αντίστοιχη σχέση για τα αντινετρίνα:

α) Γράφω την ερμητειακή συζυγή της σχέσης (1.4):

$$|\nu_\alpha\rangle^\dagger = \sum_i U_{\alpha i}^* |\nu_i\rangle^\dagger = \sum_i U_{\alpha i}^\dagger |\nu_i\rangle^\dagger = \sum_i U_{i\alpha} |\nu_i\rangle^\dagger$$

β) Πολλαπλασιάζω και τα δύο μέλη με τον  $\gamma^0$  πίνακα, οπότε, εφόσον  $\bar{u} = u^\dagger \gamma^0$  παίρνουμε:

$$|\bar{\nu}_\alpha\rangle = \sum_i U_{i\alpha} |\bar{\nu}_i\rangle \quad (1.25)$$

Εάν τα νετρίνα είναι σωματίδια Majorana, τότε, εφόσον δεν έχουν ηλεκτρικό φορτίο,  $\bar{\nu}_i = \nu_i$ , οπότε η (1.25) θα γράφεται:

$$|\bar{\nu}_\alpha\rangle = \sum_i U_{i\alpha} |\nu_i\rangle \quad (1.26)$$

Όπως και αν έχει, δηλαδή είτε Majorana σωματίδια είναι τα νετρίνα είτε Dirac, θα ισχύει ότι:

$$A_{\bar{\nu}_\alpha; \bar{\nu}_\alpha} = \sum_j U_{\alpha j} U_{\alpha j}^* e^{-iE_j t} \quad (1.27)$$

Η (1.27) προκύπτει κατευθείαν από την (1.16), αν λάβουμε υπόψη ότι στα νετρίνα ο πίνακας μίξης είναι ο  $U^*$  ενώ στα αντινετρίνα είναι ο  $U$ .

Συγκρίνοντας τις (1.16) και (1.27) διαπιστώνουμε ότι:

$$A_{\bar{\nu}_{\alpha'}; \bar{\nu}_{\alpha}} = A_{\nu_{\alpha}; \nu_{\alpha'}} \quad (1.28)$$

Επομένως, 
$$P(\nu_{\alpha} \rightarrow \nu_{\alpha'}) = P(\bar{\nu}_{\alpha'} \rightarrow \bar{\nu}_{\alpha}) \quad (1.29)$$

Η τελευταία σχέση δεν εκφράζει τίποτα άλλα από τη διατήρηση της CPT συμμετρίας. Το να είναι μια αλληλεπίδραση αναλλοίωτη κατά CPT είναι πολύ σημαντικό στο πλαίσιο της θεωρίας πεδίου. Όπως έχει αποδειχθεί, δεν είναι δυνατόν να κατασκευασθεί μια Lorentz-αναλλοίωτη κβαντική θεωρία πεδίου με ερμητική χαμιλτονιανή όπου να παραβιάζεται η CPT.



## Ταλαντώσεις νετρίνων για 2 γενεές

Αν παραβλέψουμε την τρίτη γενιά λεπτονίων και επικεντρωθούμε στις 2 πρώτες, οι μαθηματικές πράξεις που απαιτούνται για να έχουμε μια ξεκάθαρη εικόνα των ταλαντώσεων είναι αρκετά απλές.

Από τη σχέση (1.24), για 2 μόνο γενιές παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
 P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_{\alpha'}} &= \left| \delta_{\alpha\alpha'} + \sum_j U_{\alpha'j} U_{\alpha j}^* e^{-i\Delta m_{j1}^2 \frac{L}{2p}} - \sum_j U_{\alpha'j} U_{\alpha j}^* \right|^2 \\
 &= \left| 0 + U_{\alpha'1} U_{\alpha 1}^* + U_{\alpha'2} U_{\alpha 2}^* e^{-i\Delta m_{21}^2 \frac{L}{2p}} - U_{\alpha'1} U_{\alpha 1}^* - U_{\alpha'2} U_{\alpha 2}^* \right|^2 \\
 &= \left| U_{\alpha'2} U_{\alpha 2}^* \left( e^{-i\Delta m_{21}^2 \frac{L}{2p}} - 1 \right) \right|^2 \\
 &= \left( U_{\alpha'2} U_{\alpha 2}^* e^{-i\Delta m_{21}^2 \frac{L}{2p}} - U_{\alpha'2} U_{\alpha 2}^* \right) \cdot \left( U_{\alpha'2} U_{\alpha 2}^* e^{+i\Delta m_{21}^2 \frac{L}{2p}} - U_{\alpha'2} U_{\alpha 2}^* \right) \\
 &= 2 |U_{\alpha'2}|^2 |U_{\alpha 2}|^2 \left( 1 - \frac{1}{2} \left( e^{-i\Delta m_{21}^2 \frac{L}{2p}} - e^{+i\Delta m_{21}^2 \frac{L}{2p}} \right) \right) \\
 &= 2 |U_{\alpha'2}|^2 |U_{\alpha 2}|^2 \left( 1 - \cos \Delta m_{21}^2 \frac{L}{2p} \right)
 \end{aligned}$$

$$\text{άρα} \quad P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_{\alpha'}} = \frac{1}{2} A_{\alpha';\alpha} \left( 1 - \cos \Delta m_{21}^2 \frac{L}{2p} \right) \quad (1.30)$$

$$\text{όπου} \quad A_{\alpha';\alpha} = 4 |U_{\alpha'2}|^2 |U_{\alpha 2}|^2 \quad (1.31)$$

Στην περίπτωση των 2 γενεών, ο πίνακας PMNS είναι διάστασης 2x2 και φυσικά unitary, επομένως είναι φρόνιμο να τον γράψουμε στη μορφή ενός απλού πίνακα στροφής στις 2 διαστάσεις που έχει μία μόνο παράμετρο, τη  $\theta$ :

$$U = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (1.32)$$

Αντικαθιστώντας τα στοιχεία του  $U$  από τη (1.32) στη (1.31) παίρνουμε:

$$A_{\alpha';\alpha} = 4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta = \sin^2 2\theta \quad (1.33)$$

Προφανώς, λοιπόν, αντικαθιστώντας την (1.33) στην (1.30) παίρνουμε την πολύ απλή

$$\text{σχέση:} \quad P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_{\alpha'}} = \frac{1}{2} \sin^2 2\theta \left( 1 - \cos \Delta m^2 \frac{L}{2p} \right) \quad (1.34)$$

Για να απλοποιήσουμε ακόμα περισσότερο την (1.34) συμφέρει να ορίσουμε ένα χαρακτηριστικό μήκος ταλάντωσης:

$$L_0 = 4\pi \frac{E}{\Delta m^2} \quad (1.35)$$

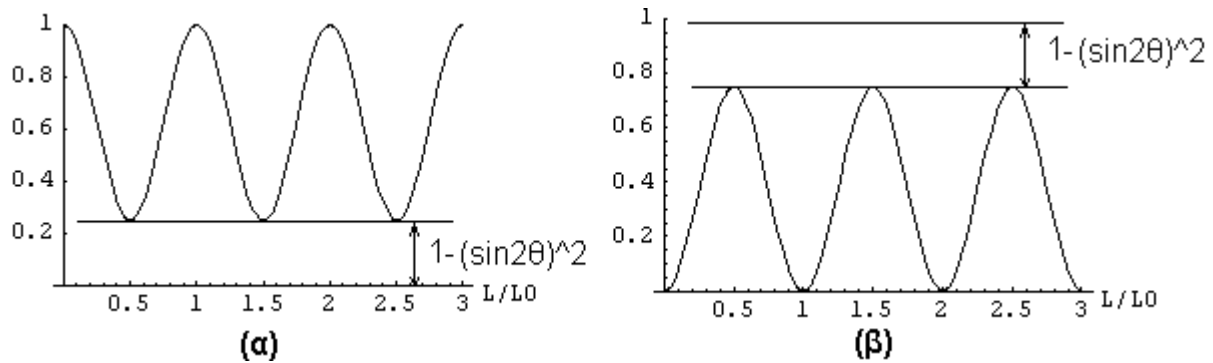
$$\text{οπότε η (1.34) γράφεται} \quad P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_{\alpha'}} = \frac{1}{2} \sin^2 2\theta \left( 1 - \cos 2\pi \frac{L}{L_0} \right) \quad (1.36)$$

Αν θέλουμε να έχουμε μια αίσθηση του  $L_0$  σε SI μονάδες, αρκεί να πολλαπλασιάσουμε το δεξί μέλος της (1.35) με  $\hbar c = 197.3 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$ :

$$\begin{aligned}
L_0 &= 4\pi \frac{E_{\text{MeV}}(\text{MeV})}{\Delta m^2_{\text{eV}^2}(\text{eV}^2)} 197.3(\text{MeV fm}) \\
&= 2.479 \frac{E_{\text{MeV}}(\text{MeV})}{\Delta m^2_{\text{eV}^2}(10^{-12} \text{MeV}^2)} 10^{-12} \text{m MeV} \\
&= 2.479 \frac{E_{(\text{MeV})}}{\Delta m^2_{(\text{eV}^2)}} \text{m} = 2.479 \frac{E_{(\text{GeV})}}{\Delta m^2_{(\text{eV}^2)}} \text{Km}
\end{aligned} \tag{1.37}$$

Για παράδειγμα, αν  $E=1\text{MeV}$  και  $\Delta m^2=10^{-5} \text{eV}^2$ , τότε  $L_0 = 247.9 \text{Km}$ .

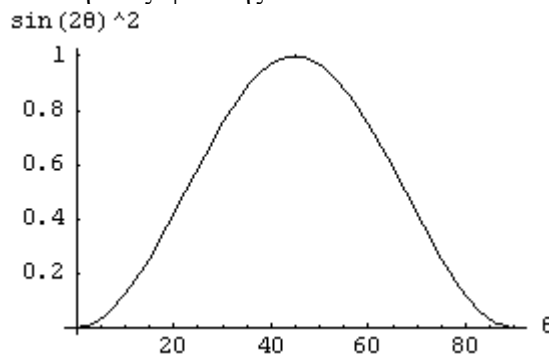
Η φυσική σημασία των παραμέτρων  $\theta$  και  $L_0$  (δηλαδή εμμέσως της  $\Delta m^2$ ) φαίνεται στην εικόνα 1.3:



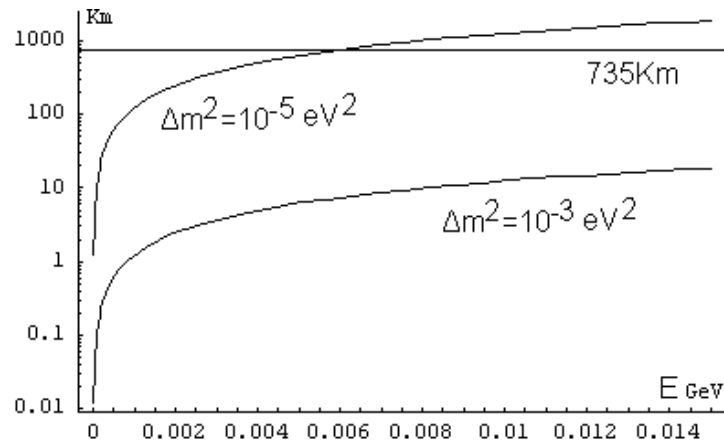
**Εικόνα 1.3:** (α) Πιθανότητα επιβίωσης  $P(\alpha \rightarrow \alpha) = 1 - P(\alpha \rightarrow \alpha')$  (β) Πιθ/τα εξαφάνισης  $P(\alpha \rightarrow \alpha')$

Παρατηρούμε ότι σε απόσταση  $L_0/2$  η πιθανότητα επιβίωσης είναι ελάχιστη, δηλαδή η πιθανότητα εξαφάνισης είναι μέγιστη. Όσο μεγαλώνει το  $\sin^2(2\theta)$  τόσο πιο πολύ τείνει στο 1 η μέγιστη πιθανότητα εξαφάνισης, δηλαδή τόσο τείνει στο 0 η ελάχιστη πιθανότητα επιβίωσης. Στην ακραία περίπτωση όπου δεν έχουμε καθόλου μίξη, δηλαδή για  $\theta=0$ , η πιθανότητα εξαφάνισης είναι παντού ίση με μηδέν. Στην εικόνα 1.4 φαίνεται η εξάρτηση του  $\sin^2(2\theta)$  από το  $\theta$ . Παρατηρούμε ότι για  $\theta=45^\circ$  έχουμε μέγιστη ανάμιξη, δηλαδή η πιθανότητα εξαφάνισης φτάνει την τιμή 1 σε απόσταση  $L_0/2$ . Επίσης, βλέπουμε ότι δεν υπάρχει τρόπος να ξεχωρίσουμε αν η  $\theta$  είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από  $45^\circ$  αλλά δεν υπάρχει και λόγος να το ερευνήσουμε, εφόσον για παράδειγμα η  $\theta=10^\circ$  και η  $\theta=80^\circ$  μας δίνουν ακριβώς τις ίδιες πιθανότητες εξαφάνισης.

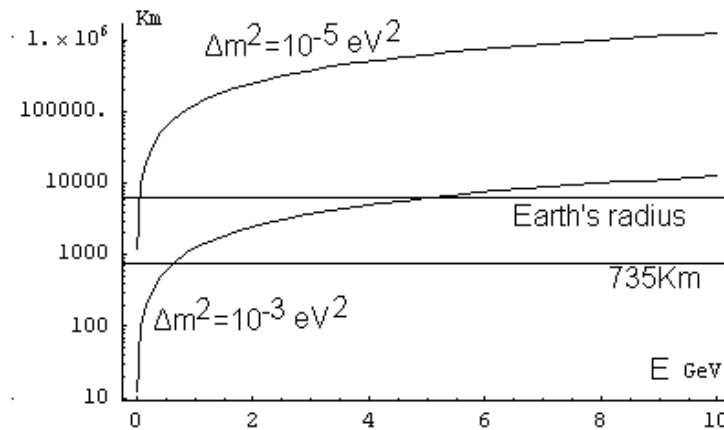
Κάτι επίσης χρήσιμο είναι το να ξέρουμε την τάξη μεγέθους του  $L_0$ , το οποίο εξαρτάται από την ενέργεια των νετρίνων και από την άγνωστη παράμετρο  $\Delta m^2$ . Εκτιμήσεις που έχουν γίνει από πειράματα ατμοσφαιρικών νετρίνων έχουν δώσει  $\Delta m^2_{\text{atm}} \approx 10^{-3} \text{eV}^2$  ενώ από πειράματα ηλιακών νετρίνων έχουμε  $\Delta m^2_{\text{sol}} \approx 10^{-5} \text{eV}^2$ . Στην εικόνα 1.5 φαίνεται η απόσταση  $L_0/2$ , όπου μεγιστοποιείται η πιθανότητα εξαφάνισης.



**Εικόνα 1.4:**  $\sin^2(2\theta)$  ως συνάρτηση του  $\theta$ . Για  $\theta=45^\circ$  έχουμε μέγιστη ανάμιξη.



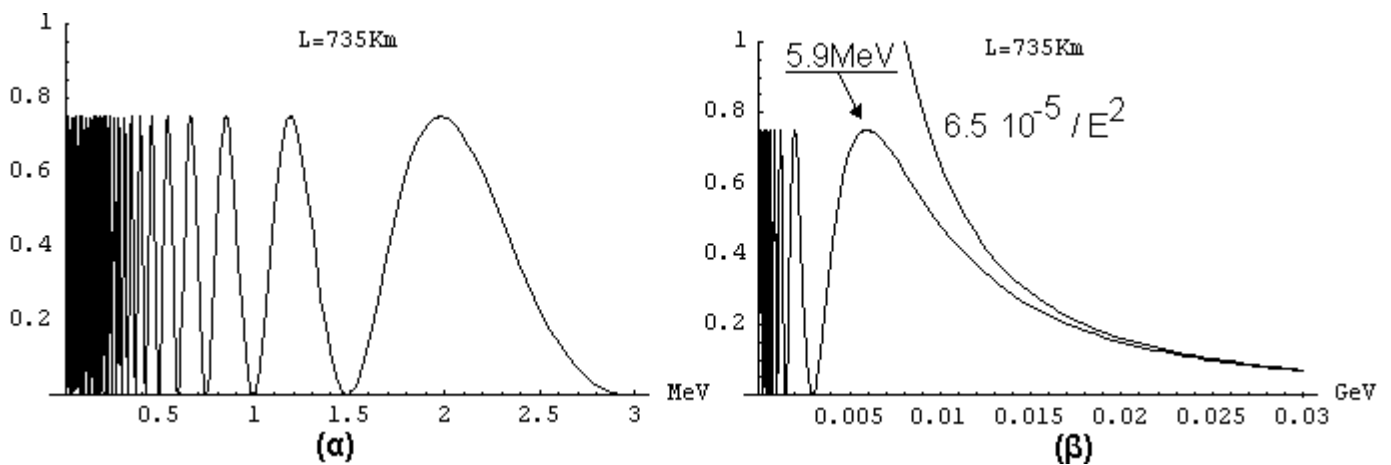
(α)



(β)

**Εικόνα 1.5:** (α) Το  $L_0/2$  για 2 διαφορετικά  $\Delta m^2$  και για ενέργειες μέχρι 14MeV, δηλαδή στην περιοχή ενεργειών των ηλιακών νετρίνων. (β) Το ίδιο με το (α), αλλά για μεγαλύτερες ενέργειες, μέχρι 10GeV.

Βεβαίως, όταν έχουμε έναν ανιχνευτή στον οποίον έρχονται από συγκεκριμένη πηγή νετρίνα διαφόρων ενεργειών, έχει σημασία η ενέργεια του κάθε νετρίνου, διότι απ' αυτήν εξαρτάται η πιθανότητα επιβίωσής του στο σημείο παρατήρησης. Στην εικόνα 1.6 φαίνεται η εξάρτηση της πιθανότητας  $P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha')$  από την ενέργεια των νετρίνων σε απόσταση  $L=735$  Km.



**Εικόνα 1.6:** (α) Πιθανότητα εξαφάνισης στα 735Km,  $E < 3$ MeV. (β) Το ίδιο μέγεθος για μεγαλύτερες ενέργειες. Μετά την ενέργεια των 5.9MeV η πιθανότητα φθίνει και τείνει στη συνάρτηση  $6.5 \cdot 10^{-5} / E^2$  ( $\text{GeV}^2$ ). Έχει γίνει ενδεικτικά η υπόθεση:  $\theta = \pi/6$  και  $\Delta m^2 = 10^{-5} \text{ eV}^2$

Μια παρατήρηση που αξίζει να γίνει είναι ότι το τελευταίο μέγιστο στην πιθανότητα εξαφάνισης (βλ. σχήμα 6β) σημειώνεται στην ενέργεια στην οποία το  $L_0/2$  γίνεται ίσο με την απόσταση στην οποία τοποθετούμε τον ανιχνευτή (βλ. σχήμα 5α). Για τις συγκεκριμένες τιμές που υποθέσαμε, αυτό συμβαίνει στα 5.9MeV. Γενικά, η ενέργεια αυτή είναι:

$$\frac{1}{2} \cdot 2.479 \frac{E_{(\text{GeV})}}{\Delta m^2_{(\text{eV}^2)}} = L_{(\text{Km})} \Rightarrow \quad (1.38)$$

$$E_{(\text{GeV})} = \frac{L_{(\text{Km})} \Delta m^2_{(\text{eV}^2)}}{1.2395}$$

Από αυτήν την ενέργεια και πάνω η πιθανότητα εξαφάνισης φθίνει κατά τρόπο που ασυμπτωτικά τείνει να είναι  $\sim E^{-2}$ . Αυτό αποδεικνύεται μέσω του αναπτύγματος Taylor του

$$\left(1 - \cos \Delta m^2 \frac{L}{2p}\right) \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta m^2 L}{2}\right)^2 \frac{1}{p^2} \text{ για μεγάλο } p.$$

Επειδή η δυνατότητες των οργάνων που χρησιμοποιούνται είναι περιορισμένες, στις μικρές ενέργειες δεν παρατηρείται ποτέ όλη η λεπτομέρεια που βλέπουμε στην εικόνα 1.6. Να τονίσουμε ότι τα παραπάνω σχήματα υποθέτουν  $\theta=\pi/6$  και  $\Delta m^2=10^{-5}$ . Προφανώς αυτές οι τιμές δεν είναι οι πραγματικές, αλλά ενδεικτικές. Άλλωστε, η πραγματικότητα απέχει μακράν από τα όσα αναφέρθηκαν μέχρι εδώ, εφόσον στη φύση δεν έχουμε μόνο 2 γεύσεις νετρίνων, αλλά (τουλάχιστον) τρεις. Στην επόμενη παράγραφο θα εξετάσουμε τι συμβαίνει με πιο ρεαλιστικό τρόπο.

## Ταλαντώσεις νετρίνων για 3 γενεές – με προσεγγίσεις

Όταν μελετάμε τις ταλαντώσεις των νετρίνων μεταξύ τριών γεύσεων οι παράμετροι αυξάνονται και το πρόβλημα γίνεται αρκετά πιο περίπλοκο. Στις 2 γενεές οι μόνες παράμετροι ήταν η γωνία  $\theta$  και η διαφορά των τετραγώνων των μαζών  $\Delta m^2$ . Όπως θα δούμε παρακάτω, το φαινόμενο είναι αρκετά πιο ενδιαφέρον στις 3 γενεές.

Ένα ερώτημα που δεν έχει αποσαφηνισθεί ακόμα από τα διάφορα πειράματα είναι το λεγόμενο πρόβλημα της *ιεραρχίας* των μαζών των νετρίνων. Όταν λέμε ότι ο πίνακας PMNS αναμιγνύει ιδιοκαταστάσεις flavor με ιδιοκαταστάσεις μάζας, προφανώς θεωρούμε ιδιοτιμές μάζας  $m_1, m_2, m_3$ . Σύμφωνα με τις γνώσεις που έχουμε σήμερα, δύο είναι τα πιθανά σενάρια για την σχέση αυτών των τριών ιδιοτιμών μάζας:

$$m_1 < m_2 \ll m_3 \quad (\text{κανονική ιεραρχία})$$

$$m_3 \ll m_1 < m_2 \quad (\text{ανεστραμμένη ιεραρχία})$$

Στην ανάλυση που ακολουθεί θα λάβουμε υπόψη την περίπτωση της κανονικής ιεραρχίας.

Όπως ήδη έχουμε αναφέρει και πρόκειται να αναλύσουμε σε επόμενο κεφάλαιο, από πειράματα που έγιναν με ηλιακά και ατμοσφαιρικά νετρίνα προκύπτει ότι  $\Delta m^2_{\text{sol}} \approx 10^{-5} \text{ eV}^2$  (ή  $10^{-10} \text{ eV}^2$ ) και  $\Delta m^2_{\text{atm}} \approx 10^{-3} \text{ eV}^2$ . Από τα πειράματα προκύπτει ως λογικό το να συνδέσουμε τη διαφορά  $\Delta m^2_{21}$  με τη  $\Delta m^2_{\text{sol}}$  και τη διαφορά  $\Delta m^2_{31} \approx \Delta m^2_{32}$  με τη διαφορά  $\Delta m^2_{\text{atm}}$ .

Από όσα αναφέραμε είναι προφανές ότι  $\Delta m^2_{21} \ll \Delta m^2_{31}$ . Αυτό σημαίνει ότι όταν παρατηρούμε ταλαντώσεις νετρίνων σε απόσταση τέτοια που ο όρος  $\Delta m^2_{31} \frac{L}{2p}$

είναι τόσο μικρότερος που μπορούμε να τον αγνοήσουμε. Δηλαδή, σε κατάλληλες αποστάσεις η μόνη ταλάντωση που παίζει ρόλο πρακτικά είναι η ταλάντωση λόγω του  $\Delta m^2_{31}$ .

Με την παραπάνω προσέγγιση και από τη σχέση (1.24) μπορούμε να γράψουμε για  $\alpha \neq \alpha'$ :

$$P(\nu_{\alpha} \rightarrow \nu_{\alpha'}) = \left| 0 + U_{\alpha'3} U_{\alpha 3}^* \left( e^{-i\Delta m_{31}^2 \frac{L}{2p}} - 1 \right) \right|^2 \quad (1.39)$$

δηλαδή:

$$\begin{aligned} P(\nu_{\alpha} \rightarrow \nu_{\alpha'}) &= \left( U_{\alpha'3} U_{\alpha 3}^* e^{-i\Delta m_{31}^2 \frac{L}{2p}} - U_{\alpha'3} U_{\alpha 3}^* \right) \left( U_{\alpha'3} U_{\alpha 3}^* e^{+i\Delta m_{31}^2 \frac{L}{2p}} - U_{\alpha'3} U_{\alpha 3}^* \right) \\ &= 2|U_{\alpha'3}|^2 |U_{\alpha 3}|^2 - |U_{\alpha'3}|^2 |U_{\alpha 3}|^2 \left( e^{-i\Delta m_{31}^2 \frac{L}{2p}} + e^{+i\Delta m_{31}^2 \frac{L}{2p}} \right) \\ &= 2|U_{\alpha'3}|^2 |U_{\alpha 3}|^2 \left( 1 - \cos \Delta m_{31}^2 \frac{L}{2p} \right) \end{aligned}$$

$$\text{άρα:} \quad P(\nu_{\alpha} \rightarrow \nu_{\alpha'}) = \frac{1}{2} A_{\alpha';\alpha} \left( 1 - \cos \Delta m_{31}^2 \frac{L}{2p} \right) \quad (1.40)$$

$$\text{όπου} \quad A_{\alpha';\alpha} = 4|U_{\alpha'3}|^2 |U_{\alpha 3}|^2 \quad (1.41)$$

Δηλαδή, χάρη στην προσέγγιση που κάναμε έχουμε ξανά μια ταλάντωση παρόμοια με αυτήν που είχαμε στις 2 γεύσεις.

Η πιθανότητα επιβίωσης είναι:

$$\begin{aligned} P(\nu_{\alpha} \rightarrow \nu_{\alpha}) &= 1 - P(\nu_{\alpha} \rightarrow \nu_{\alpha'}) - P(\nu_{\alpha} \rightarrow \nu_{\alpha''}) \\ &= 1 - \frac{1}{2} A_{\alpha';\alpha} \left( 1 - \cos \Delta m_{31}^2 \frac{L}{2p} \right) - \frac{1}{2} A_{\alpha'';\alpha} \left( 1 - \cos \Delta m_{31}^2 \frac{L}{2p} \right) \\ &= 1 - 2|U_{\alpha'3}|^2 |U_{\alpha 3}|^2 \left( 1 - \cos \Delta m_{31}^2 \frac{L}{2p} \right) - 2|U_{\alpha''3}|^2 |U_{\alpha 3}|^2 \left( 1 - \cos \Delta m_{31}^2 \frac{L}{2p} \right) \end{aligned} \quad (1.42)$$

Την παραπάνω έκφραση μπορεί κανείς να τη γράψει πιο κομψά εισάγοντας έναν όρο  $B_{\alpha;\alpha}$ :

$$B_{\alpha;\alpha} \equiv 4|U_{\alpha 3}|^2 (1 - |U_{\alpha 3}|^2) \quad (1.43)$$

Λόγω της ιδιότητας (1.21)  $\Rightarrow$

$$B_{\alpha;\alpha} \equiv 4|U_{\alpha 3}|^2 (|U_{\alpha 1}|^2 + |U_{\alpha 2}|^2) \quad (1.44)$$

οπότε είναι προφανές ότι μπορούμε να γράψουμε την (1.42) ως εξής:

$$P(\nu_{\alpha} \rightarrow \nu_{\alpha}) = 1 - \frac{1}{2} B_{\alpha;\alpha} \left( 1 - \cos \Delta m_{31}^2 \frac{L}{2p} \right) \quad (1.45)$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι στην περίπτωση που παίζει ρόλο μόνο η  $\Delta m_{31}^2$ , η πιθανότητα εξαφάνισης ενός  $\nu_e$  εξαρτάται από 3 παραμέτρους:  $|U_{e3}|^2$ ,  $|U_{\mu 3}|^2$  και  $\Delta m_{31}^2$ . Από τις ίδιες ακριβώς παραμέτρους εξαρτάται και η πιθανότητα εξαφάνισης ενός  $\nu_{\mu}$ . Αυτό είναι αναμενόμενο άλλωστε, αφού η βασική προσέγγιση που κάναμε είναι ότι  $\Delta m_{21}^2 \ll \Delta m_{31}^2 \approx \Delta m_{32}^2$ .

Επιπλέον, οι πιθανότητες ταλάντωσης έχουν εξάρτηση μόνο από το μέτρο των στοιχείων του πίνακα  $U$ . Στην περίπτωση των αντινετρίνων, η διαφορά είναι ότι στη μίξη υπεισέρχεται ο πίνακας  $U$  αντί για τον  $U^*$  (βλ. σχ. (1.25) και (1.4)). Όμως, αφού στο τέλος των υπολογισμών μας μένουν μόνο τα μέτρα των στοιχείων και  $|\alpha| = |\alpha^*|$ ,

$$P(\nu_{\alpha} \rightarrow \nu_{\alpha'}) = P(\bar{\nu}_{\alpha} \rightarrow \bar{\nu}_{\alpha'}) \quad (1.46)$$

Δηλαδή, στην περίπτωση της κανονικής ιεραρχίας και όταν το  $\Delta m_{31}^2$  σχετίζεται με την ταλάντωση, είναι πολύ δύσκολο να ανιχνεύσουμε τυχόν παραβίαση της CP.

Στην περίπτωση όπου η ταλάντωση οφείλεται βασικά στη διαφορά  $\Delta m_{21}^2$ , η διαφορά  $\Delta m_{31}^2$  είναι πολύ μεγαλύτερη, οπότε όροι της μορφής  $\cos(\Delta m_{31}^2 L/2p)$  μεταβάλλονται ταχύ-

τατα όταν αλλάζουν τα  $L$  και  $p$ . Όταν, σε μια περιοχή, ημιτονοειδείς και συνημιτονοειδείς συναρτήσεις μεταβάλλονται πολύ γρήγορα μπορούμε να της αγνοήσουμε γιατί κατά μέσο όρο έχουν τιμή 0.

Επιθυμούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα επιβίωσης ενός  $\nu_\alpha$  και γι' αυτόν τον σκοπό ξαναγράφουμε τη σχέση (1.16) αντικαθιστώντας  $\alpha' \rightarrow \alpha$ :

$$A_{\alpha;\alpha} = \sum_j |U_{\alpha j}|^2 e^{-iE_j t} \quad (1.47)$$

Οπότε, για την πιθανότητα  $P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha) = |A_{\alpha;\alpha}|^2$  έχουμε:

$$\begin{aligned} P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha) &= \left| \sum_{j=1}^3 |U_{\alpha j}|^2 e^{-iE_j t} \right|^2 \\ &= |U_{\alpha 1}|^4 + |U_{\alpha 2}|^4 + |U_{\alpha 3}|^4 + 2|U_{\alpha 1}|^2 |U_{\alpha 2}|^2 \cos\left(\Delta m_{21}^2 \frac{L}{2p}\right) + \\ &\quad + 2|U_{\alpha 1}|^2 |U_{\alpha 3}|^2 \cos\left(\Delta m_{31}^2 \frac{L}{2p}\right) + 2|U_{\alpha 2}|^2 |U_{\alpha 3}|^2 \cos\left(\Delta m_{32}^2 \frac{L}{2p}\right) \end{aligned} \quad (1.48)$$

Μηδενίζοντας, όπως προείπαμε τους δύο τελευταίους συνημιτονικούς όρους, έχουμε την επιθυμητή έκφραση για την πιθανότητα επιβίωσης. Είναι πολύ εύκολο να διαπιστώσει κανείς πιθανότητα αυτή, με τη συγκεκριμένη προσέγγιση, ισούται με την παρακάτω έκφραση:

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha) = \left| \sum_{j=1}^2 |U_{\alpha j}|^2 e^{-i\Delta m_{j1}^2 \frac{L}{2p}} \right|^2 + |U_{\alpha 3}|^4 \quad (1.49)$$

### Ταλαντώσεις στις 3 γενεές – χωρίς προσεγγίσεις

Στην προηγούμενη παράγραφο κάναμε ορισμένες προσεγγίσεις οι οποίες απλοποίησαν κάπως τις πράξεις που χρειάζονταν για να υπολογίσουμε τις διάφορες πιθανότητες ταλάντωσης. Σε αυτήν την παράγραφο θα εξάγουμε την πιθανότητα ταλάντωσης ενός νετρίνο χωρίς να πάρουμε καμία προσέγγιση.

Ως συνήθως, αρχίζουμε από τη σχέση (1.24), η οποία για  $\alpha' \neq \alpha$  γράφεται:

$$\begin{aligned}
 P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_{\alpha'}} &= \left| U_{\alpha'2} U_{\alpha 2}^* \left( e^{-i\Delta m_{21}^2 \frac{L}{2p}} - 1 \right) + U_{\alpha'3} U_{\alpha 3}^* \left( e^{-i\Delta m_{31}^2 \frac{L}{2p}} - 1 \right) \right|^2 \\
 &= \left( U_{\alpha'2} U_{\alpha 2}^* \left( e^{-i\Delta m_{21}^2 \frac{L}{2p}} - 1 \right) + U_{\alpha'3} U_{\alpha 3}^* \left( e^{-i\Delta m_{31}^2 \frac{L}{2p}} - 1 \right) \right) \cdot (\text{h.c.}) \\
 &= |U_{\alpha'2}|^2 |U_{\alpha 2}|^2 2 \left( 1 - e^{-i\Delta m_{21}^2 \frac{L}{2p}} - e^{+i\Delta m_{21}^2 \frac{L}{2p}} \right) + \\
 &\quad + |U_{\alpha'3}|^2 |U_{\alpha 3}|^2 2 \left( 1 - e^{-i\Delta m_{31}^2 \frac{L}{2p}} - e^{+i\Delta m_{31}^2 \frac{L}{2p}} \right) + \\
 &\quad + U_{\alpha'2} U_{\alpha 2}^* U_{\alpha'3} U_{\alpha 3}^* \left( 1 + e^{+i\Delta m_{32}^2 \frac{L}{2p}} - e^{-i\Delta m_{21}^2 \frac{L}{2p}} - e^{+i\Delta m_{31}^2 \frac{L}{2p}} \right) + \\
 &\quad + U_{\alpha'2}^* U_{\alpha 2} U_{\alpha'3} U_{\alpha 3}^* \left( 1 + e^{-i\Delta m_{32}^2 \frac{L}{2p}} - e^{+i\Delta m_{21}^2 \frac{L}{2p}} - e^{-i\Delta m_{31}^2 \frac{L}{2p}} \right)
 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι οι δύο τελευταίοι προσθετέοι είναι ο ένας μιγαδικός συζυγής του άλλου, οπότε την τελευταία σχέση μπορούμε να την απλοποιήσουμε ως εξής:

$$\begin{aligned}
 P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_{\alpha'}} &= |U_{\alpha'2}|^2 |U_{\alpha 2}|^2 2 \left( 1 - e^{-i\Delta m_{21}^2 \frac{L}{2p}} - e^{+i\Delta m_{21}^2 \frac{L}{2p}} \right) + \\
 &\quad + |U_{\alpha'3}|^2 |U_{\alpha 3}|^2 2 \left( 1 - e^{-i\Delta m_{31}^2 \frac{L}{2p}} - e^{+i\Delta m_{31}^2 \frac{L}{2p}} \right) + \\
 &\quad + 2 \operatorname{Re} \left[ U_{\alpha'2} U_{\alpha 2}^* U_{\alpha'3} U_{\alpha 3}^* \left( 1 + e^{+i\Delta m_{32}^2 \frac{L}{2p}} - e^{-i\Delta m_{21}^2 \frac{L}{2p}} - e^{+i\Delta m_{31}^2 \frac{L}{2p}} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{1.50}$$

Οι πράξεις που απαιτούνται για να φέρουμε την (1.50) σε μια αξιοποιήσιμη μορφή είναι πολλές και γι' αυτό δεν είναι σκόπιμο να τις παραθέσουμε. Θα χρησιμοποιήσουμε τον συντομογραφικό συμβολισμό:  $(ij) \equiv \Delta m_{ij}^2 \frac{L}{2p} = (m_i^2 - m_j^2) \frac{L}{2p}$

Χρησιμοποιώντας την παραμετροποίηση του  $U$  της σχέσης (1.6) τελικά βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}
 P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu} &= 2 \left( c_{12}^2 c_{23}^2 + s_{12}^2 s_{23}^2 s_{13}^2 - 2c_{12} c_{23} s_{12} s_{23} s_{13} \cos \delta \right) \left( s_{12}^2 c_{13}^2 \right) [1 - \cos(21)] \\
 &\quad + 2 \left( s_{23}^2 c_{13}^2 \right) s_{13}^2 [1 - \cos(31)] \\
 &\quad + 2c_{13}^2 s_{12} s_{23} s_{13} \left( c_{23} \cos \delta - s_{12} s_{23} s_{13} \right) \cdot [1 + \cos(32) - \cos(21) - \cos(31)] \\
 &\quad + 2 \left( c_{13}^2 c_{12} c_{23} s_{12} s_{23} s_{13} \sin \delta \right) [\sin(32) + \sin(21) - \sin(31)]
 \end{aligned} \tag{1.52}$$

$$\begin{aligned}
P_{v_\mu \rightarrow v_e} &= 2 \left( c_{12}^2 c_{23}^2 + s_{12}^2 s_{23}^2 s_{13}^2 - 2c_{12}c_{23}s_{12}s_{23}s_{13} \cos \delta \right) (s_{12}^2 c_{13}^2) [1 - \cos(21)] \\
&+ 2 \left( s_{23}^2 c_{13}^2 \right) s_{13}^2 [1 - \cos(31)] \\
&+ 2c_{13}^2 s_{12}s_{23}s_{13} \left( c_{23} \cos \delta - s_{12}s_{23}s_{13} \right) \cdot [1 + \cos(32) - \cos(21) - \cos(31)] \\
&- 2 \left( c_{13}^2 c_{12}c_{23}s_{12}s_{23}s_{13} \sin \delta \right) [\sin(32) + \sin(21) - \sin(31)]
\end{aligned} \tag{1.53}$$

$$\begin{aligned}
P_{v_\mu \rightarrow v_\tau} &= 2 \left( c_{12}^2 s_{23}^2 + s_{12}^2 c_{23}^2 s_{13}^2 + 2c_{12}s_{23}s_{12}c_{23}s_{13} \cos \delta \right) \cdot \\
&\left( c_{12}^2 c_{23}^2 + s_{12}^2 s_{23}^2 s_{13}^2 - 2c_{12}c_{23}s_{12}s_{23}s_{13} \cos \delta \right) [1 - \cos(21)] \\
&+ 2 \left( c_{23}^2 c_{13}^2 \right) (s_{23}^2 c_{13}^2) [1 - \cos(31)] \\
&+ 2 \left\{ c_{13}^2 c_{23}^2 s_{23}^2 (s_{12}^2 s_{13}^2 - c_{12}^2) + c_{13}^2 c_{23}c_{12}s_{12}s_{23}s_{13} (s_{23}^2 - c_{23}^2) \cos \delta \right\} \cdot \\
&[1 + \cos(32) - \cos(21) - \cos(31)] \\
&+ 2 \left( c_{13}^2 c_{23}c_{12}s_{12}s_{23}s_{13} \right) \sin \delta [\sin(32) + \sin(21) - \sin(31)]
\end{aligned} \tag{1.54}$$

$$\begin{aligned}
P_{v_\tau \rightarrow v_\mu} &= 2 \left( c_{12}^2 s_{23}^2 + s_{12}^2 c_{23}^2 s_{13}^2 + 2c_{12}s_{23}s_{12}c_{23}s_{13} \cos \delta \right) \cdot \\
&\left( c_{12}^2 c_{23}^2 + s_{12}^2 s_{23}^2 s_{13}^2 - 2c_{12}c_{23}s_{12}s_{23}s_{13} \cos \delta \right) [1 - \cos(21)] \\
&+ 2 \left( c_{23}^2 c_{13}^2 \right) (s_{23}^2 c_{13}^2) [1 - \cos(31)] \\
&+ 2 \left\{ c_{13}^2 c_{23}^2 s_{23}^2 (s_{12}^2 s_{13}^2 - c_{12}^2) + c_{13}^2 c_{23}c_{12}s_{12}s_{23}s_{13} (s_{23}^2 - c_{23}^2) \cos \delta \right\} \cdot \\
&[1 + \cos(32) - \cos(21) - \cos(31)] \\
&- 2 \left( c_{13}^2 c_{23}c_{12}s_{12}s_{23}s_{13} \right) \sin \delta [\sin(32) + \sin(21) - \sin(31)]
\end{aligned} \tag{1.55}$$

$$\begin{aligned}
P_{v_e \rightarrow v_\tau} &= 2 \left( c_{12}^2 s_{23}^2 + s_{12}^2 c_{23}^2 s_{13}^2 + 2c_{12}s_{23}s_{12}c_{23}s_{13} \cos \delta \right) \cdot (s_{12}^2 c_{13}^2) [1 - \cos(21)] \\
&+ 2 \left( c_{23}^2 c_{13}^2 \right) (s_{13}^2) [1 - \cos(31)] \\
&- 2 \left\{ c_{13}^2 c_{23}s_{12}s_{13} \left( c_{12}s_{23} \cos \delta + c_{23}s_{12}s_{13} \right) \right\} \cdot [1 + \cos(32) - \cos(21) - \cos(31)] \\
&- 2 \left( c_{13}^2 c_{23}c_{12}s_{12}s_{23}s_{13} \right) \sin \delta [\sin(32) + \sin(21) - \sin(31)]
\end{aligned} \tag{1.56}$$

$$\begin{aligned}
P_{v_\tau \rightarrow v_e} &= 2 \left( c_{12}^2 s_{23}^2 + s_{12}^2 c_{23}^2 s_{13}^2 + 2c_{12}s_{23}s_{12}c_{23}s_{13} \cos \delta \right) \cdot (s_{12}^2 c_{13}^2) [1 - \cos(21)] \\
&+ 2 \left( c_{23}^2 c_{13}^2 \right) (s_{13}^2) [1 - \cos(31)] \\
&- 2 \left\{ c_{13}^2 c_{23}s_{12}s_{13} \left( c_{12}s_{23} \cos \delta + c_{23}s_{12}s_{13} \right) \right\} \cdot [1 + \cos(32) - \cos(21) - \cos(31)] \\
&+ 2 \left( c_{13}^2 c_{23}c_{12}s_{12}s_{23}s_{13} \right) \sin \delta [\sin(32) + \sin(21) - \sin(31)]
\end{aligned} \tag{1.57}$$

Επίσης, χρησιμοποιώντας της σχέση (1.48) υπολογίζουμε τις ακόλουθες πιθανότητες επιβίωσης:



$$\begin{aligned}
P_{\nu_e \rightarrow \nu_e} &= (c_{12}^2 c_{13}^2) \left[ (c_{12}^2 c_{13}^2) + 2(s_{12}^2 c_{13}^2) \cos(21) \right] \\
&+ (s_{12}^2 c_{13}^2) \left[ (s_{12}^2 c_{13}^2) + 2(s_{13}^2) \cos(32) \right] \\
&+ (s_{13}^2) \left[ (s_{13}^2) + 2(c_{12}^2 c_{13}^2) \cos(31) \right]
\end{aligned} \tag{1.58}$$

$$\begin{aligned}
P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu} &= (s_{12}^2 c_{23}^2 + c_{12}^2 s_{23}^2 s_{13}^2 + 2c_{12} s_{23} s_{13} s_{12} c_{23} \cos \delta) \cdot \\
&\left[ (s_{12}^2 c_{23}^2 + c_{12}^2 s_{23}^2 s_{13}^2 + 2c_{12} s_{23} s_{13} s_{12} c_{23} \cos \delta) + \right. \\
&\left. 2(c_{12}^2 c_{23}^2 + s_{12}^2 s_{23}^2 s_{13}^2 - 2c_{12} c_{23} s_{12} s_{23} s_{13} \cos \delta) \cos(21) \right] \\
&+ (c_{12}^2 c_{23}^2 + s_{12}^2 s_{23}^2 s_{13}^2 - 2c_{12} c_{23} s_{12} s_{23} s_{13} \cos \delta) \cdot \\
&\left[ (c_{12}^2 c_{23}^2 + s_{12}^2 s_{23}^2 s_{13}^2 - 2c_{12} c_{23} s_{12} s_{23} s_{13} \cos \delta) + \right. \\
&\left. 2(s_{23}^2 c_{13}^2) \cos(32) \right] \\
&+ (s_{23}^2 c_{13}^2) \left[ (s_{23}^2 c_{13}^2) + \right. \\
&\left. 2(s_{12}^2 c_{23}^2 + c_{12}^2 s_{23}^2 s_{13}^2 + 2c_{12} s_{23} s_{13} s_{12} c_{23} \cos \delta) \cos(31) \right]
\end{aligned} \tag{1.59}$$

$$\begin{aligned}
P_{\nu_\tau \rightarrow \nu_\tau} &= (s_{12}^2 s_{23}^2 + c_{12}^2 c_{23}^2 s_{13}^2 - 2s_{12} s_{23} c_{12} c_{23} s_{13} \cos \delta) \cdot \\
&\left[ (s_{12}^2 s_{23}^2 + c_{12}^2 c_{23}^2 s_{13}^2 - 2s_{12} s_{23} c_{12} c_{23} s_{13} \cos \delta) + \right. \\
&\left. 2(c_{12}^2 s_{23}^2 + s_{12}^2 c_{23}^2 s_{13}^2 + 2c_{12} s_{23} s_{12} c_{23} s_{13} \cos \delta) \cos(21) \right] \\
&+ (c_{12}^2 s_{23}^2 + s_{12}^2 c_{23}^2 s_{13}^2 + 2c_{12} s_{23} s_{12} c_{23} s_{13} \cos \delta) \cdot \\
&\left[ (c_{12}^2 s_{23}^2 + s_{12}^2 c_{23}^2 s_{13}^2 + 2c_{12} s_{23} s_{12} c_{23} s_{13} \cos \delta) + \right. \\
&\left. 2(c_{23}^2 c_{13}^2) \cos(32) \right] \\
&+ (c_{23}^2 c_{13}^2) \left[ (c_{23}^2 c_{13}^2) + \right. \\
&\left. 2(s_{12}^2 s_{23}^2 + c_{12}^2 c_{23}^2 s_{13}^2 - 2s_{12} s_{23} c_{12} c_{23} s_{13} \cos \delta) \cos(31) \right]
\end{aligned} \tag{1.60}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις για τις πιθανότητες μπορούν να εξαχθούν πολλά συμπεράσματα. Για να κάνουμε αριθμητικούς υπολογισμούς χρειαζόμαστε τις τιμές των παραμέτρων  $\theta_{12}$ ,  $\theta_{23}$  και  $\theta_{13}$ , καθώς και της φάσεως  $\delta$ . Από πειράματα που έχουν γίνει μέχρι στιγμής έχουν μετρηθεί ορισμένες από αυτές τις τιμές. Παραθέτουμε αυτές τις τιμές θεωρώντας την ορθή ιεραρχία, σε C.L. 90%:

$$\begin{aligned}
\Delta m_{\text{sol}}^2 \equiv \Delta m_{21}^2 &= (7.1_{-1.1}^{+1.9}) \cdot 10^{-5} \text{ eV}^2, & \tan^2 \theta_{12} &= 0.40_{-0.09}^{+0.12} \\
\Delta m_{\text{atm}}^2 \equiv \Delta m_{32}^2 &= (2.0_{-0.7}^{+1.1}) \cdot 10^{-3} \text{ eV}^2, & \tan \theta_{23} &= 1_{-0.25}^{+0.35} \\
\sin \theta_{13} &\leq 0.2
\end{aligned} \tag{1.61}$$

Από τις σχέσεις (1.61) προκύπτει:

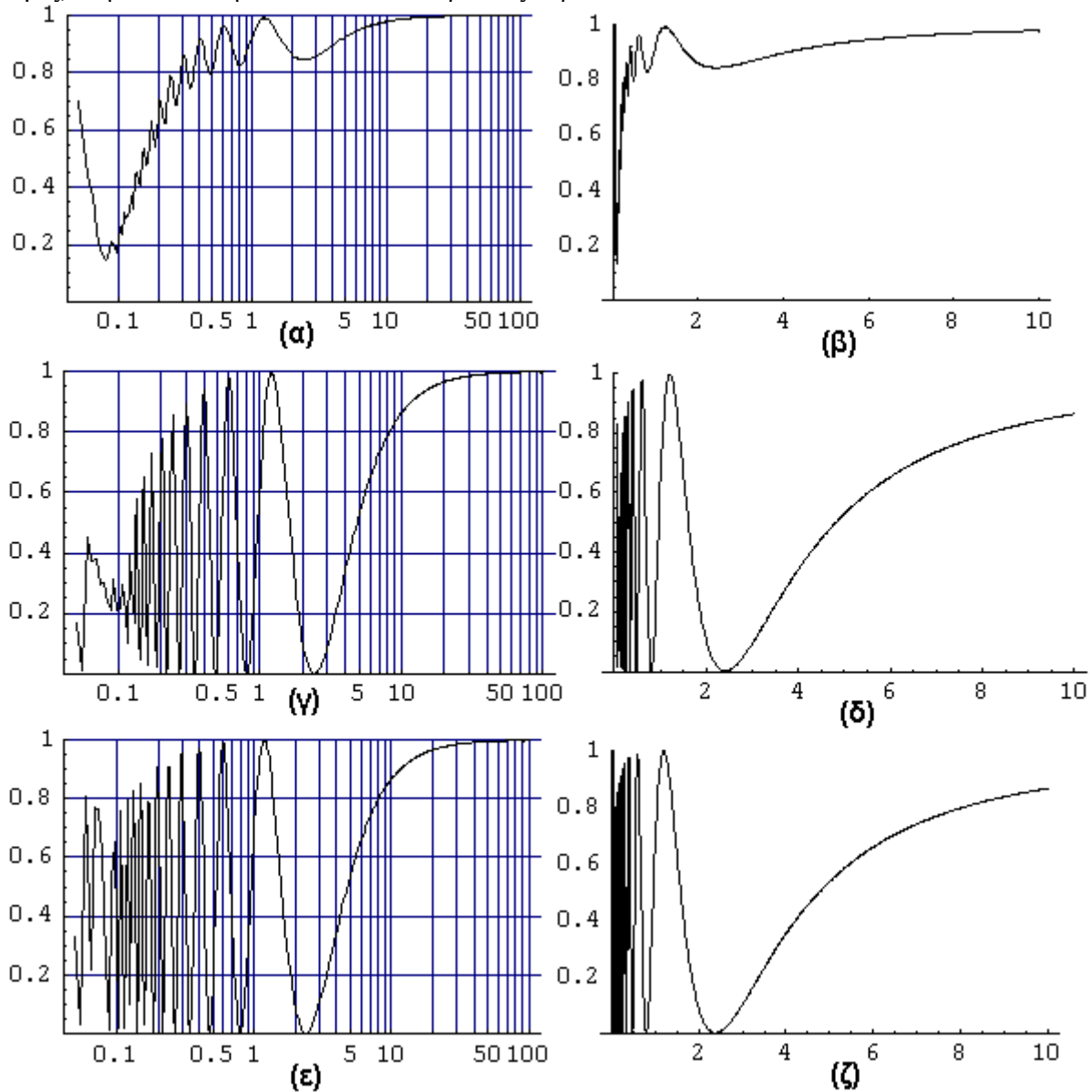
$$\begin{aligned}
\theta_{12} &= (0.564_{-0.056}^{+0.061}) \text{ rad} = (32.31_{-3.20}^{+3.48})^\circ \\
\theta_{23} &= (0.785_{-0.142}^{+0.148}) \text{ rad} = (45.0_{-8.13}^{+8.47})^\circ, & \theta_{13} &\leq 0.201 \text{ rad} = 11.5^\circ
\end{aligned} \tag{1.62}$$

Θα κάνουμε χρήση των κεντρικών τιμών που αναφέρονται στο σύνολο σχέσεων (1.62), ενώ ως  $\theta_{13}$  θα θεωρήσουμε το άνω πειραματικό όριο,  $\theta=11.5^\circ$ . Επίσης, θεωρούμε  $\Delta m_{21}^2=7.1 \cdot 10^{-5} \text{eV}^2$ ,  $\Delta m_{32}^2=2.0 \cdot 10^{-3} \text{eV}^2$  και  $\Delta m_{31}^2= \Delta m_{32}^2+ \Delta m_{21}^2$ . Η γωνία  $\delta$  δεν έχει ακόμα μετρηθεί πειραματικά. Πειράματα σχεδιάζονται ώστε να μετρηθεί στο μέλλον.

Διερεύνηση για  $\delta=0$ 

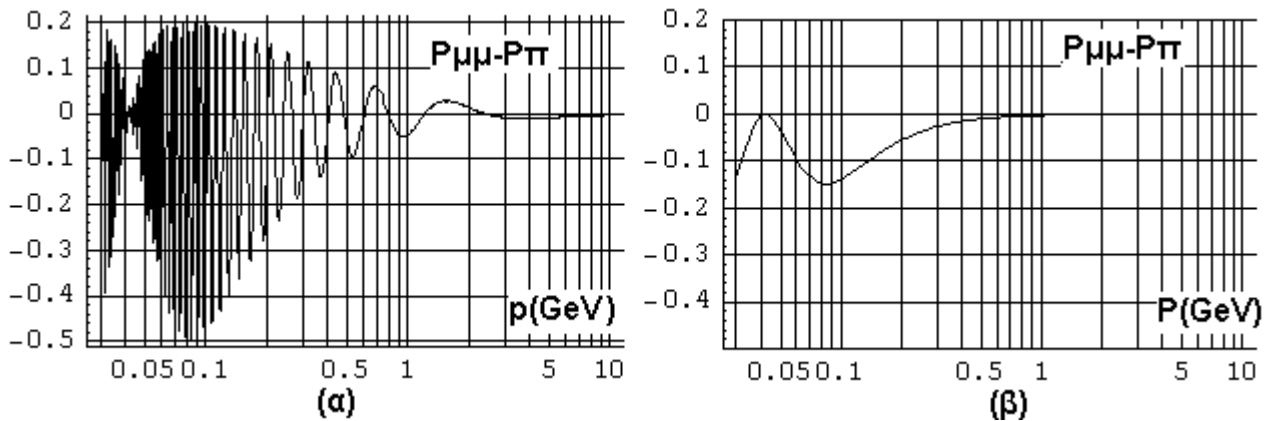
Ένα ενδιαφέρον θέμα που θα θίξουμε στη συνέχεια είναι τα παρατηρήσιμα φαινόμενα που μπορούν να μαρτυρήσουν την τιμή του  $\delta$ . Προς το παρόν, μέχρι να επικεντρώσουμε το ενδιαφέρον μας σε αυτό το σημείο, θεωρούμε το  $\delta=0$ .

Στην εικόνα 1.7 φαίνεται η πιθανότητα επιβίωσης των τριών νετρίνων για διάφορες ορμές, στην απόσταση  $L=735\text{Km}$  και θεωρώντας παρόν  $\delta=0$ .



**Εικόνα 1.7:** Για  $L=735\text{Km}$ ,  $\delta=0$  (α, β)  $P_{e \rightarrow e}$ . (γ, δ)  $P_{\mu \rightarrow \mu}$  (ε, ζ)  $P_{\tau \rightarrow \tau}$ . Ο οριζόντιος άξονας αντιστοιχεί στην ορμή  $p$  των νετρίνων και είναι βαθμονομημένος σε μονάδες  $\text{GeV}$ .

Συγκρίνοντας τα διαγράμματα (7δ) και (7ζ) ότι η  $P_{\mu\mu}$  διαφέρει ελάχιστα από την  $P_{\tau\tau}$ , ενώ η  $P_{ee}$  διαφέρει αισθητά κι από τις δύο προηγούμενες. Αυτό είναι αποτέλεσμα όλων των παραμέτρων, των γωνιών και των διαφορών μάζας. Αν, χάριν δοκιμής, κάνει κανείς την προσέγγιση  $\Delta m_{32}^2 = \Delta m_{31}^2$ , τότε η διαφορά  $P_{\mu \rightarrow \mu} - P_{\tau \rightarrow \tau}$  λαμβάνει τελείως άλλη μορφή (εικόνα 1.8β), η οποία βεβαίως δεν είναι ορθή, διότι με τη συγκεκριμένη προσέγγιση προκύπτει ότι για μικρές ορμές  $P_{\mu \rightarrow \mu} < 0$ . Στο διάγραμμα (8α) φαίνεται η διαφορά  $P_{\mu \rightarrow \mu} - P_{\tau \rightarrow \tau}$  και είναι εμφανές ότι η διαφορά είναι σημαντική μόνο για ορμές  $p < 1\text{GeV}$ .



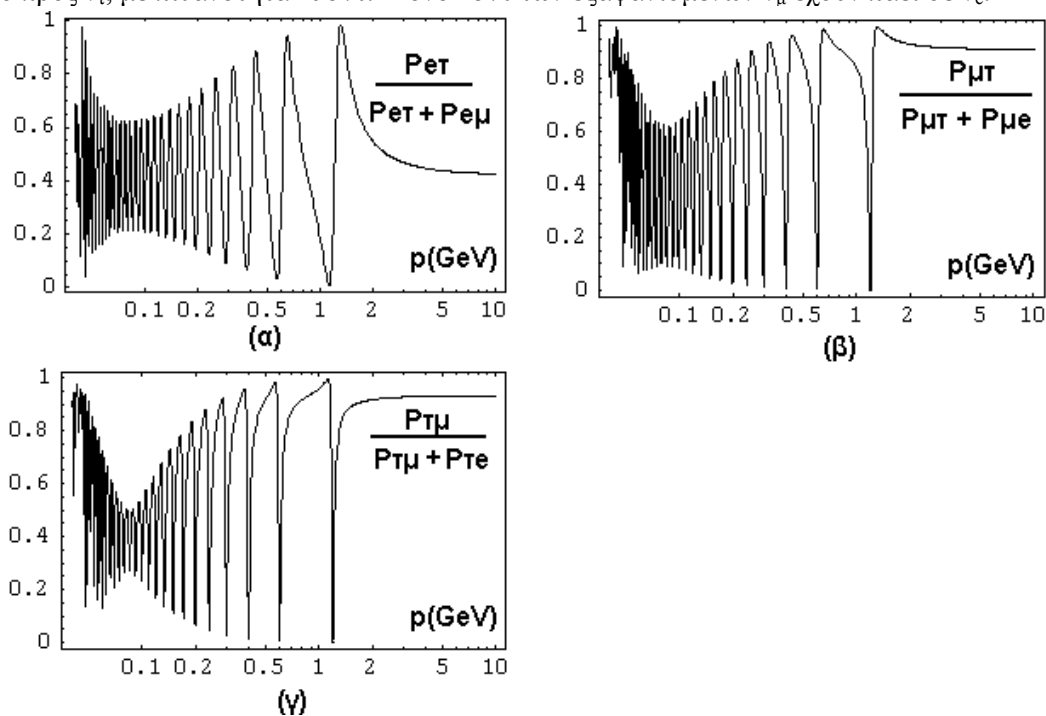
**Εικόνα 1.8:** (α)  $P_{\mu \to \mu} - P_{\tau \to \tau}$  για  $L=735\text{Km}$  και  $\delta=0$  (β) Το ίδιο μέγεθος με την προσέγγιση  $\Delta m_{32}^2 = \Delta m_{31}^2$ .

Από τη διαφορετικότητα των διαγραμμάτων (8α) και (8β), και από το γεγονός ότι με την προσέγγιση  $\Delta m_{32}^2 = \Delta m_{31}^2$  προκύπτει  $P_{\mu \to \mu} < 0$ , αντιλαμβανόμαστε ότι, αν και διαισθητικά φαίνεται επιτρεπτό το να προσεγγίσουμε το 0.002071 με το 0.002, αυτή η παραδοχή είναι ικανή να αλλοιώσει καταστροφικά τους υπολογισμούς.

Ένα άλλο ερώτημα είναι το εξής: Για μια δεδομένη ορμή  $p$  και σε  $L=735\text{Km}$ , ποια ταλάντωση είναι πιθανότερη για ένα  $\nu_\alpha$ ; Η  $\nu_\alpha \rightarrow \nu_{\alpha'}$  ή η  $\nu_\alpha \rightarrow \nu_{\alpha''}$ ; Για να απαντήσουμε, καλό θα ήταν να υπολογίσουμε τους λόγους  $\frac{P_{\alpha \rightarrow \alpha'}}{P_{\alpha \rightarrow \alpha'} + P_{\alpha \rightarrow \alpha''}}$  για όλα τα  $\alpha, \alpha'$  και  $\alpha''$ . Αν για παράδειγμα

ο λόγος αυτός σε κάποιο  $p$  είναι ίσος με 0.8, τότε το συμπέρασμα είναι το ακόλουθο: «Αν το  $\nu_\alpha$  της συγκεκριμένης ορμής  $p$ , βρεθεί να έχει εξαφανιστεί στην απόσταση  $L$ , τότε κατά 80% έχει μεταβεί σε  $\nu_{\alpha'}$  και κατά 20% σε  $\nu_{\alpha''}$ ». Οι τρεις λόγοι που μπορούμε να σχηματίσουμε με την παραπάνω λογική φαίνονται στο σχήμα 9.

Παρατηρούμε ότι για  $p > 1\text{GeV}$  όπου το πείραμα MINOS μπορεί να διακρίνει ικανοποιητικά τις διαφορετικές ενέργειες νετρίνων, το  $\nu_\mu$  εάν ταλαντωθεί, ταλαντώνεται κατά κύριο λόγο προς  $\nu_\tau$ , με πιθανότητα ~95%. Μόνο ~5% των εξαφανισμένων  $\nu_\mu$  έχουν πάει σε  $\nu_e$ .



**Εικόνα 1.9:** Σχετική πιθανότητα ταλάντωσης για  $L=735\text{Km}$ ,  $\delta=0$  και τρία νετρίνα.

## Φαινόμενα που εξαρτώνται από το $\delta$

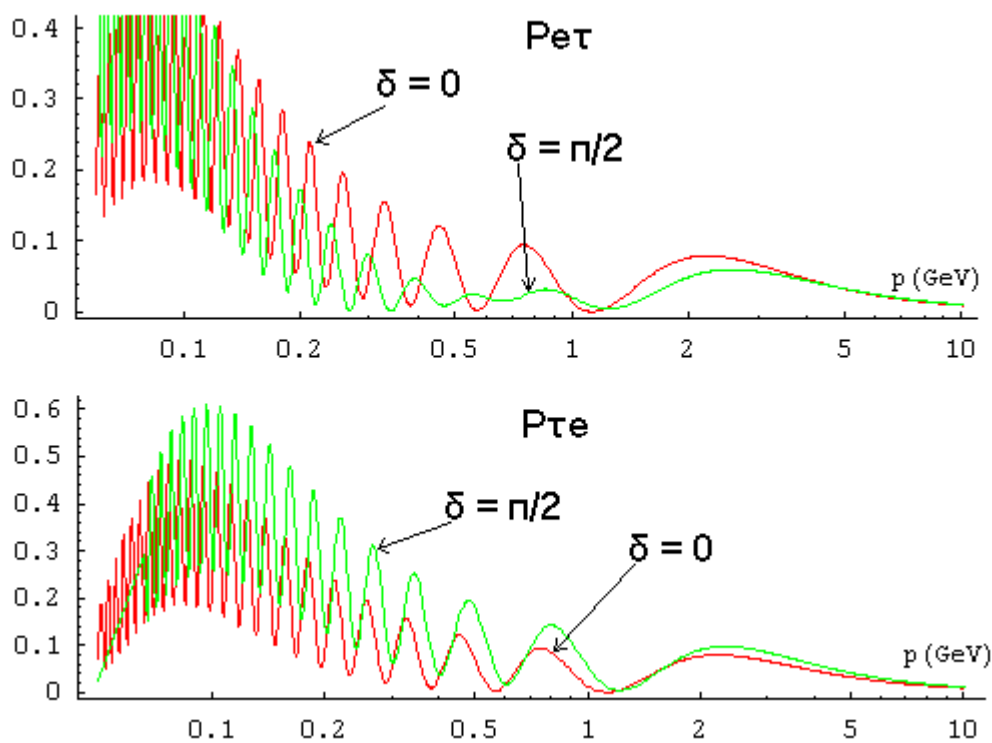
Όπως ήδη αναφέραμε, σχεδιάζονται πειράματα που μεταξύ άλλων θα επιχειρήσουν και να μετρήσουν τον όρο παραβίασης της CP συμμετρίας, δηλαδή το  $\delta$ . Ο λόγος που το  $\delta$  ονομάζεται όρος παραβίασης της CP είναι ο εξής:

Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα μια ταλάντωση ( $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ ). Ο CP μετασχηματισμός μετατρέπει το  $\nu_L$  σε  $\bar{\nu}_R$ , οπότε, αν η συμμετρία CP διατηρείται, τότε  $P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) = P(\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_\mu)$ .

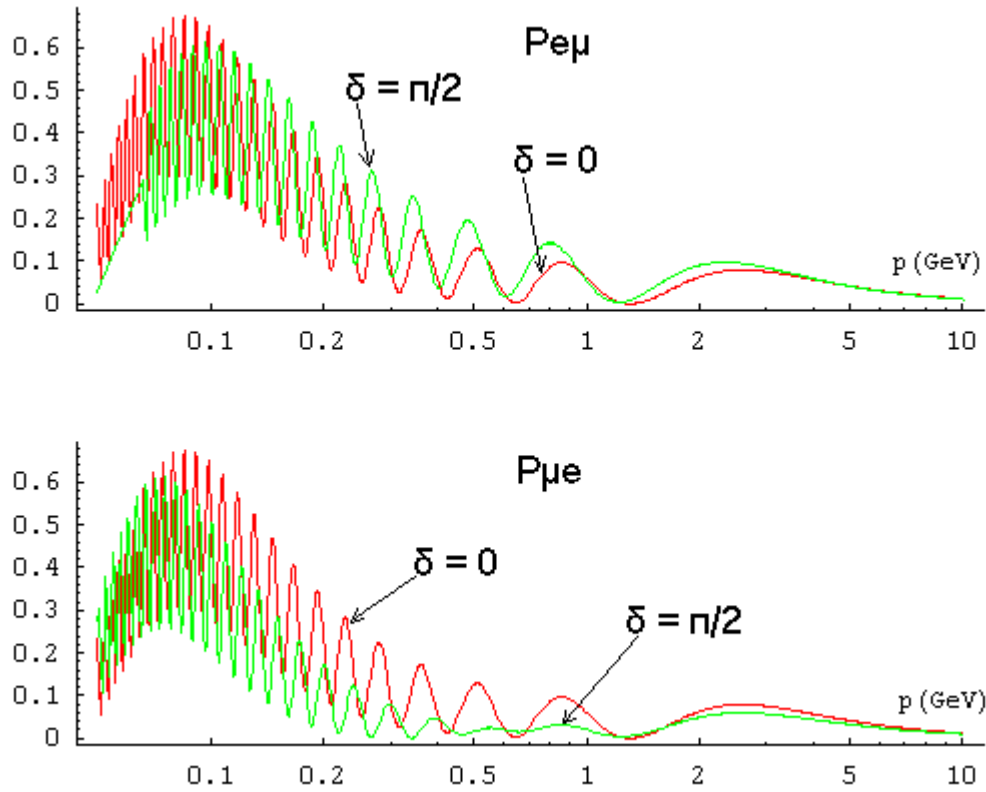
Συγκρίνοντας τις σχέσεις (1.4) και (1.25) βλέπουμε ότι για να υπολογίσω οποιαδήποτε πιθανότητα ταλάντωσης μεταξύ αντινετρίνων, αρκεί να αντικαταστήσω στις σχέσεις πιθανότητας για ταλάντωση μεταξύ νετρίνων  $U_{ij} \rightleftharpoons U_{ij}^*$ . Με δεδομένη αυτήν την παρατήρηση και εξετάζοντας της σχέση (1.50) διαπιστώνουμε ότι  $P(\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_\mu) = P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e)$ . Όπως είναι λογικό, για  $\delta=0$  έχουμε  $U_{ij} \in \mathcal{R} \forall i,j$ , οπότε  $P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) = P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e) = P(\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_\mu)$ . Ένας τρόπος λοιπόν να παρατηρήσουμε CP ασυμμετρία πειραματικά είναι να ερευνήσουμε ενδεχόμενη ανισότητα των  $P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu)$  και  $P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e)$ .

Στη συνέχεια αυτής της παραγράφου θα αναφερόμαστε πάντα σε απόσταση  $L=735\text{Km}$ , που είναι και η απόσταση μεταξύ του FermiLab και του Soudan Mine.

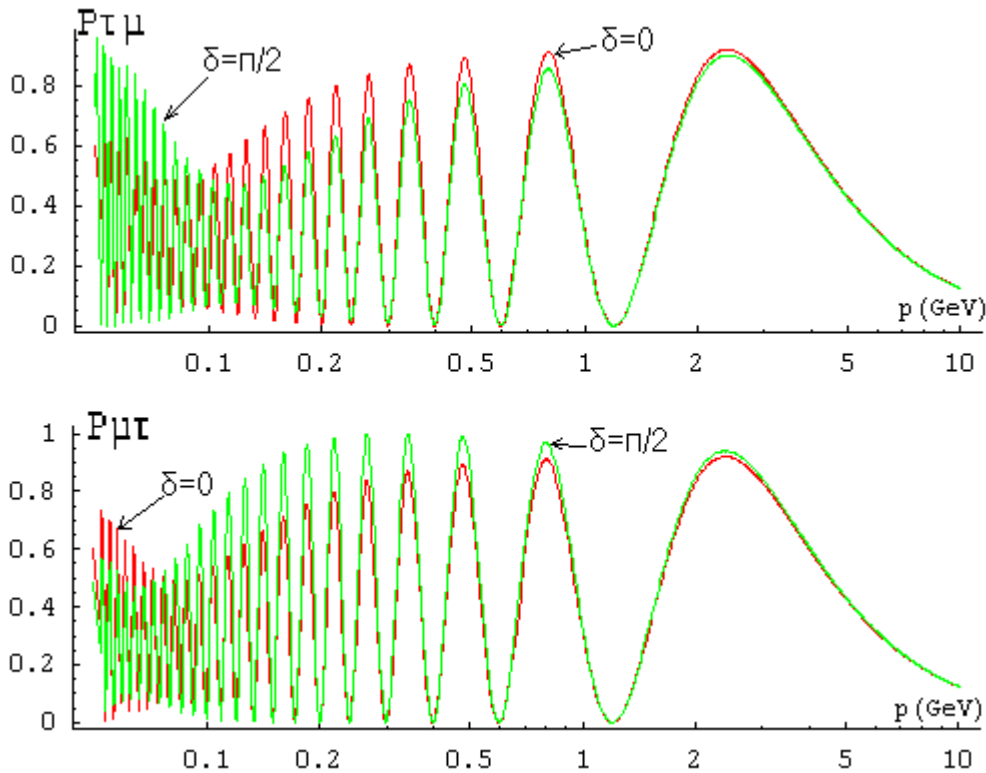
Στις εικόνες (10α,β,γ) αντιπαρατίθενται οι  $P(\nu_a \rightarrow \nu_{a'})$  για  $(a,a') = \{(e,\mu), (e,\tau), (\mu,\tau), (\mu,e), (\tau,e), (\tau,\mu)\}$  για  $\delta=0$  και για  $\delta=90^\circ$ . Για  $\delta=90^\circ$  έχουμε τη μέγιστη διαφορά από την περίπτωση  $\delta=0$ . Από τα διαγράμματα αυτά διαπιστώνει κανείς ότι αν  $\delta \approx \pi/2$ , οι πιθανότητες ταλάντωσης ως συναρτήσεις της ορμής  $p$  «παραμορφώνονται» σημαντικά σε σύγκριση με την περίπτωση  $\delta=0$ , με μόνη εξαίρεση την ταλάντωση  $\nu_\mu \rightleftharpoons \nu_\tau$ . Μάλιστα, αυτή η παραμόρφωση είναι εντονότερη σε μικρές ορμές, κάτω από  $1\text{GeV}$ , όμως για να παρατηρηθούν θα πρέπει να διαθέτουμε μεγάλη διακριτική ικανότητα ως προς τις ενέργειες, αφού βλέπουμε ότι σε αυτήν την περιοχή οι κυματώσεις της πιθανότητας είναι πολύ πυκνές.



Εικόνα 1.10α: Διαφοροποίηση της  $P(\nu_e \rightarrow \nu_\tau)$  και της  $P(\nu_\tau \rightarrow \nu_e)$  για  $\delta=0$  και  $\delta=90^\circ$ .



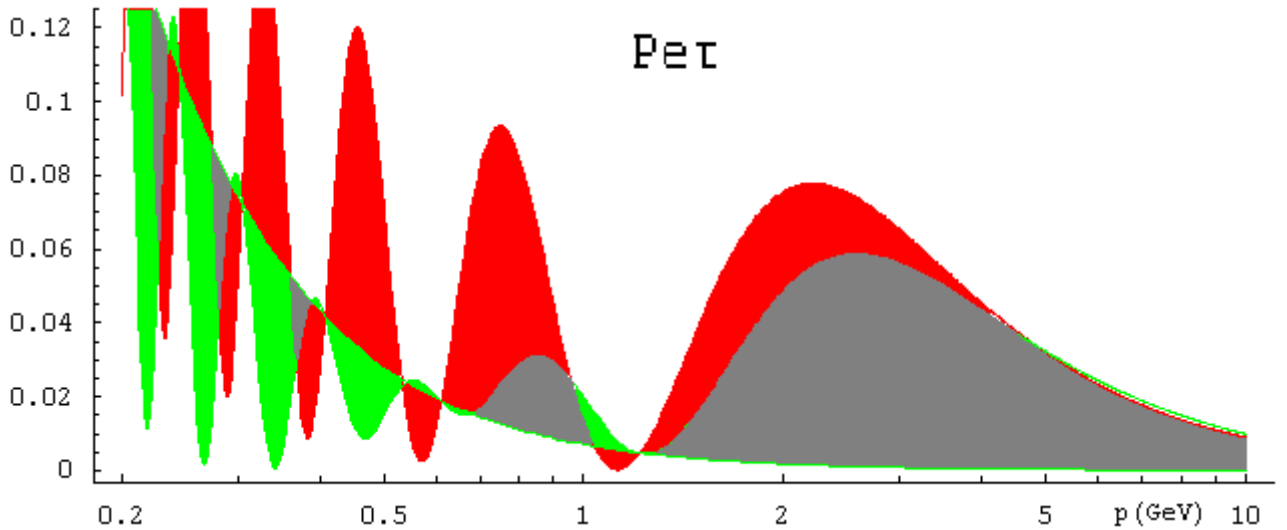
Εικόνα 1.10β: Διαφοροποίηση της  $P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu)$  και της  $P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e)$  για  $\delta=0$  και  $\delta=90^\circ$ .



Εικόνα 1.10γ: Διαφοροποίηση της  $P(\nu_\tau \rightarrow \nu_\mu)$  και της  $P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau)$  για  $\delta=0$  και  $\delta=90^\circ$ .

Αλλά και σε  $p \gg 1 \text{ GeV}$  υπάρχει διαφορά μεταξύ του σεναρίου  $\delta=0$  και  $\delta=90^\circ$ , με εξαίρεση πάντα την ταλάντωση  $\nu_\mu \rightleftharpoons \nu_\tau$ . Δηλαδή, για παράδειγμα, αν ήταν δυνατόν με κάποιο πείραμα να μετρήσουμε την πιθανότητα  $P(\nu_e \rightarrow \nu_\tau)$  σε απόσταση  $L=735 \text{ Km}$  και σε ορμή  $p=0.74 \text{ GeV}$  και τη βρίσκαμε ίση με 9.4% θα ξέραμε ότι  $\delta=0$ , ενώ αν τη μετρούσαμε ίση με 2.2% θα ξέραμε ότι  $\delta=90^\circ$ .

Όμως, τέτοιου είδους μετρήσεις με την απαιτούμενη ακρίβεια είναι εξαιρετικά δύσκολο να γίνουν. Άλλωστε, δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι σε όλους τους υπολογισμούς μας χρησιμοποιήσαμε τις κεντρικές τιμές των γωνιών του PMNS πίνακα, οι οποίες όμως συνοδεύονται από μια περιοχή εμπιστοσύνης αρκετά εκτεταμένη (βλ. (1.62)). Για παράδειγμα, αν  $\theta_{13} \rightarrow 0$  τότε, όπως φαίνεται στον πίνακα (1.6), ο όρος  $e^{+i\delta}$  που προκαλεί τη CP ασυμμετρία τείνει να πολλαπλασιάζεται με έναν μηδενικό συντελεστή, οπότε να εξαφανίζεται η CP ασυμμετρία και όποια φαινόμενα θα προέρχονταν απ' αυτήν. Για να γίνει αντιληπτό το πόσο αυξάνεται η δυσκολία τέτοιων μετρήσεων παραθέτουμε την εικόνα 1.11. Σε αυτήν απεικονίζεται με κόκκινο χρώμα όλη η γκάμα των πιθανοτήτων  $P(\nu_e \rightarrow \nu_\tau)$  που μπορεί να μετρηθούν για  $\delta=0$  και με πράσινο η ίδια γκάμα αν  $\delta=90^\circ$ . Στις γκάμες αυτή έχει ληφθεί υπόψη μόνο η αβεβαιότητα του  $\theta_{13}$  που μπορεί να παίρνει τιμές από 0 μέχρι  $11.5^\circ$ . Οι γκρι περιοχές είναι εκεί όπου το κόκκινο και το πράσινο συνυπάρχουν. Βλέπει αμέσως κανείς ότι, ειδικά στις γκριζες περιοχές, δεν είναι καθόλου απλό το να μετρήσει κανείς το  $\delta$ , διότι κι αν ακόμα καταφέρουμε να μετρήσουμε το  $P(\nu_e \rightarrow \nu_\tau)$  δε θα είμαστε σε θέση να διακρίνουμε εάν η μετρούμενη τιμή είναι αποτέλεσμα ενός συγκεκριμένου  $\delta$  ή ενός συγκεκριμένου  $\theta_{13}$ , αφού για κανένα από τα δύο δεν είμαστε σίγουροι. Η σύγχυση είναι πολύ μεγαλύτερη αν λάβουμε υπόψη και τις αβεβαιότητες των  $\theta_{12}$ ,  $\theta_{23}$  και των  $\Delta m_{ij}^2$ . Αυτή ακριβώς η δυσκολία συνοψίζεται στη βιβλιογραφία με τον όρο *εκφυλισμός των παραμέτρων (parameter degeneracy)*.



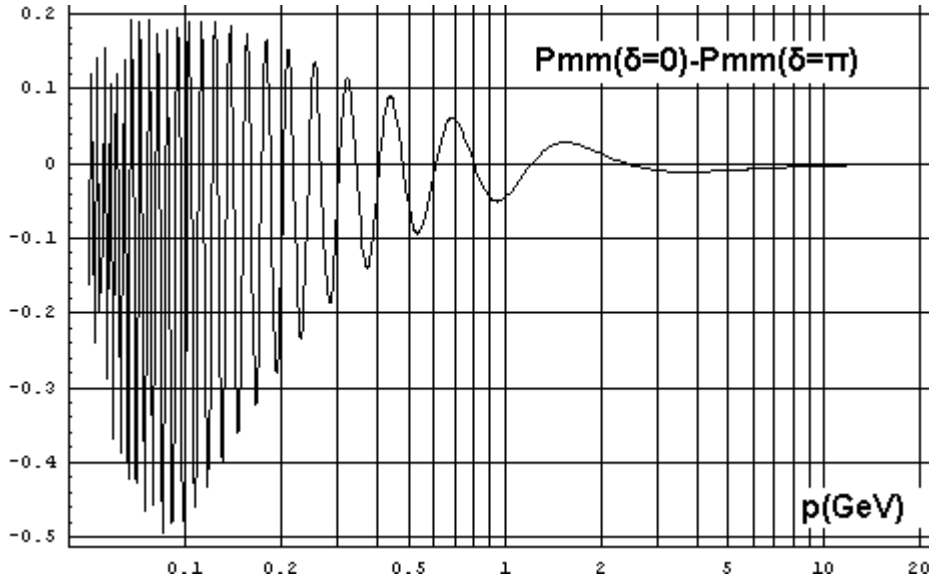
**Εικόνα 1.11:** κόκκινο χρώμα: όλη η γκάμα των πιθανοτήτων  $P(\nu_e \rightarrow \nu_\tau)$  που μπορεί να μετρηθούν για  $\delta=0$  και με πράσινο η ίδια γκάμα αν  $\delta=90^\circ$ . Στις γκάμες αυτή έχει ληφθεί υπόψη μόνο η αβεβαιότητα του  $\theta_{13}$  που μπορεί να παίρνει τιμές από 0 μέχρι  $11.5^\circ$ . Οι γκρι περιοχές είναι εκεί όπου το κόκκινο και το πράσινο συνυπάρχουν.

Το να μετρήσουμε σε ένα πείραμα την  $P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha)$  είναι κάτι το αρκετά δυσκολότερο από το να μετρήσουμε την  $P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha)$ . Για αυτό, ας εξετάσουμε και το πώς επηρεάζει το  $\delta$  τις τρεις πιθανότητες επιβίωσης.

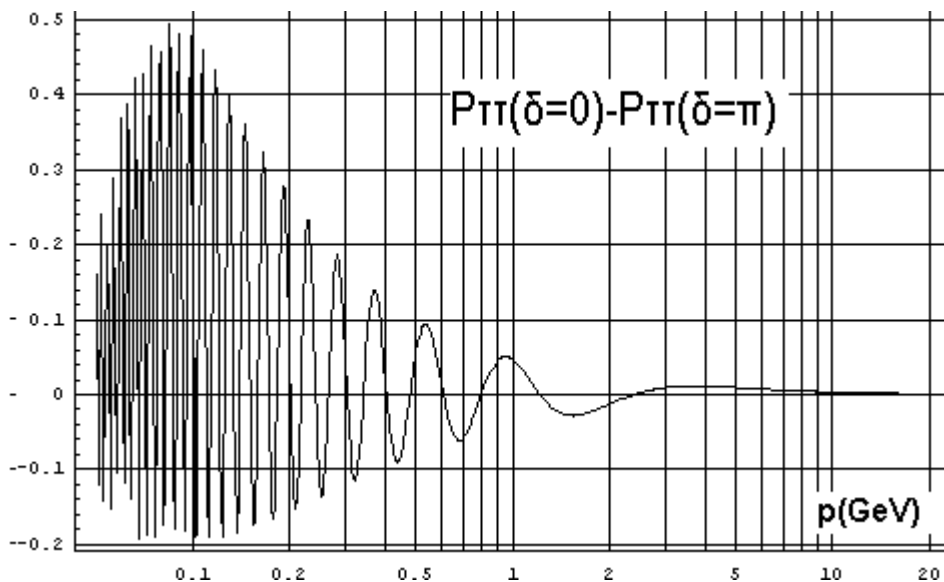
Η  $P(\nu_e \rightarrow \nu_e)$  είναι εντελώς ανεξάρτητη από το  $\delta$ , όπως φαίνεται και από τη σχέση (1.58). Όμως, οι πιθανότητες  $P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu)$  και  $P(\nu_\tau \rightarrow \nu_\tau)$  είναι εξαρτώμενες από το  $\delta$ . Στις εικόνες 1.12 και 1.13 φαίνονται οι διαφοροποιήσεις που θα είχαμε για  $\delta=0$  και  $\delta=\pi$ . Παρατηρούμε κάτι που διαφαίνεται και από τις σχέσεις (1.59) και (1.59):

$$\left[ P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu; \delta=0) - P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu; \delta=\pi) \right] = - \left[ P(\nu_\tau \rightarrow \nu_\tau; \delta=0) - P(\nu_\tau \rightarrow \nu_\tau; \delta=\pi) \right]$$

Οι παρατήρηση που μπορεί να γίνει είναι ότι για  $p > 1 \text{ GeV}$ , όπου το πείραμα MINOS θα διαθέτει ικανοποιητική διακριτική ικανότητα, η διαφορά είναι το πολύ μέχρι 3% περίπου. Άρα, αν  $\delta = \pi$  και  $\theta_{13} = 11.5^\circ$ , θα έπρεπε να μπορούμε να μετρήσουμε την πιθανότητα επιβίωσης του  $\nu_\mu$  με απόλυτο σφάλμα μικρότερο του 3% για να διαπιστώσουμε την CP-ασυμμετρία. Αν λάβουμε υπόψη και τις αβεβαιότητες που υπάρχουν στα στοιχεία του πίνακα μίξης, καταλαβαίνουμε ότι κάτι τέτοιο θα μπορούσε να επιτευχθεί μόνο σε πειράματα του μέλλοντος, αλλά όχι του πολύ μακρινού.



**Εικόνα 1.12:** Διαφοροποίηση της πιθανότητας επιβίωσης του  $\nu_\mu$  σε απόσταση  $L=735 \text{ Km}$ , για  $\delta=0$  και  $\delta=180^\circ$ .



**Εικόνα 1.13:** Διαφοροποίηση της πιθανότητας επιβίωσης του  $\nu_\tau$  σε απόσταση  $L=735 \text{ Km}$ , για  $\delta=0$  και  $\delta=180^\circ$ .

Ένας πολύ διαδεδομένος τρόπος απεικόνισης των φαινομένων παραβίασης της CP είναι η απεικόνιση τροχιών με παράμετρο το  $\delta$ , στο επίπεδο  $P-P^{\text{CP}}$ . Τέτοια διαγράμματα ονομάζονται *bi-probability* διαγράμματα.

Ας δούμε για παράδειγμα την πιθανότητα ταλάντωσης  $P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e)$ , που, όπως αποδείξαμε, υπό το μετασχηματισμό CP είναι ίση με την  $P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu)$ . Αυτή η πιθανότητα είναι η περισσότε-



ρο πρόσφορη στο να παρατηρηθεί πειραματικά. Θεωρήσουμε συγκεκριμένη ενέργεια νετρίων και καθορισμένη απόσταση  $L$ . Η μόνη παράμετρος που παραμένει μεταβλητή στις σχέσεις (1.53) και (1.52) είναι η γωνία  $\delta$ . Με κατάλληλη ομαδοποίηση των όρων που περιέχουν αυτές οι σχέσεις είναι δυνατό να τις φέρουμε στην εξής μορφή, που αναδεικνύει τη σημασία της παραμέτρου  $\delta$ :

$$P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e) = A \cdot \cos\delta + B \cdot \sin\delta + C \quad (1.63)$$

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) = A \cdot \cos\delta - B \cdot \sin\delta + C \quad (1.64)$$

όπου:

$$A = (-4c_{12}c_{23}c_{13}^2s_{12}^3s_{23}s_{13})[1 - \cos(21)] \quad (1.65)$$

$$+ 2c_{13}^2c_{23}s_{12}s_{23}s_{13} \cdot [1 + \cos(32) - \cos(21) - \cos(31)]$$

$$B = -2c_{13}^2c_{12}c_{23}s_{12}s_{23}s_{13} [\sin(32) + \sin(21) - \sin(31)] \quad (1.66)$$

$$C = 2(c_{12}^2c_{23}^2 + s_{12}^2s_{23}^2s_{13}^2)(s_{12}^2c_{13}^2)[1 - \cos(21)]$$

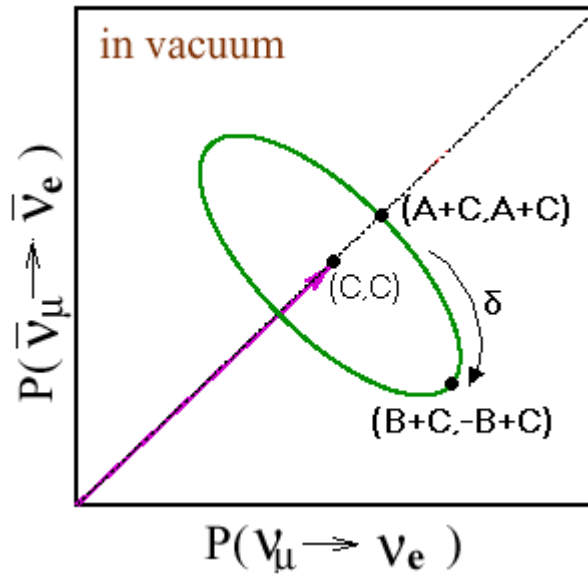
και

$$+ 2(s_{23}^2c_{13}^2)s_{13}^2 [1 - \cos(31)] \quad (1.67)$$

$$- 2c_{13}^2s_{12}^2s_{23}^2s_{13}^2 \cdot [1 + \cos(32) - \cos(21) - \cos(31)]$$

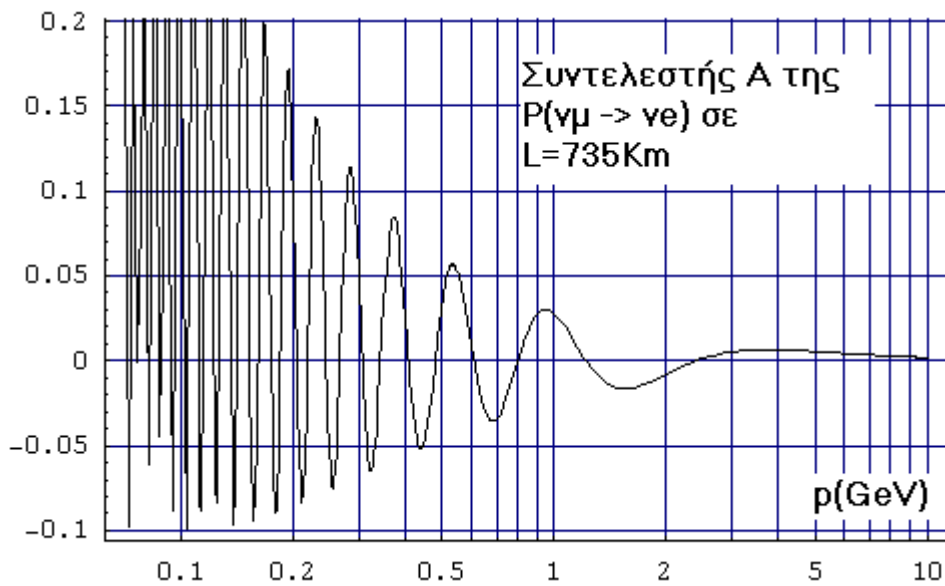
Στην εικόνα 1.14 φαίνεται η γεωμετρική σημασία που έχουν τα  $A$ ,  $B$  και  $C$  σε ένα bi-probability διάγραμμα. Είναι εύκολο χρησιμοποιώντας αναλυτική γεωμετρία να αποδείξουμε ότι ο ημιάξονας που κείται επί της διαγωνίου  $P^{CP}=P$  έχει μήκος  $\alpha = |A|\sqrt{2}$  και ο ημιάξονας που κείται στην κάθετο της διαγωνίου έχει μήκος  $\beta = |B|\sqrt{2}$ . Επομένως, το εμβαδόν της ελλείψεως είναι  $\varepsilon = \pi \cdot \alpha \cdot \beta = 2\pi|AB|$ . Αν το εμβαδόν είναι ίσο με μηδέν (ή πάρα πολύ μικρό), τότε η έλλειψη εκφυλίζεται σε ευθεία, είτε κάθετη στη διαγώνιο  $P^{CP}=P$  είτε παράλληλη, ανάλογα με το αν μηδενίζεται το  $A$  ή το  $B$  αντίστοιχα. Σε αυτήν την περίπτωση, ακόμα κι αν η μέτρηση είναι τέλεια και δίνει ένα σημείο στο bi-probability γράφημα, θα υπάρχουν δύο  $\delta$  που θεωρητικά θα έδιδαν το σημείο αυτό. Άρα, καλό είναι να ερευνήσουμε περιοχές όπου η έλλειψη δεν εκφυλίζεται σε ευθεία.

Επιπλέον, επειδή τα πειράματα πάντα δίδουν αποτελέσματα με σφάλματα, θα ήταν καλό να ερευνηθεί μια περιοχή όπου η έλλειψη να είναι έχει όσο το δυνατόν μεγαλύτερους ημιάξονες, ώστε να μην απαιτείται ακατόρθωτη διακριτική ικανότητα για να διακρίνουμε ποιο σημείο της έλλειψης είναι αυτό που καταδεικνύει το πείραμα.

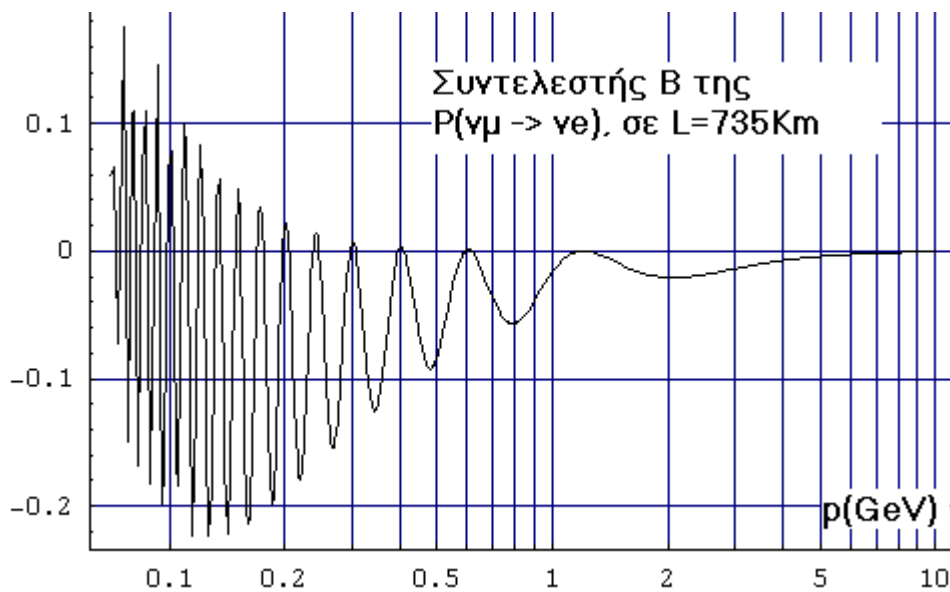


Εικόνα 1.14: Η γεωμετρική σημασία των όρων  $A$ ,  $B$  και  $C$ .

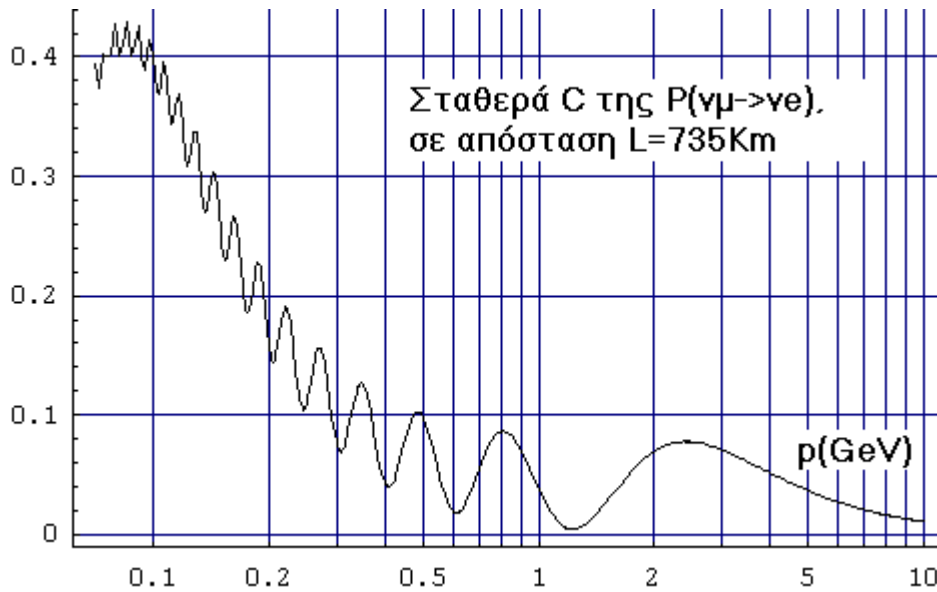
Αν θέσουμε σταθερή την απόσταση, ίση με  $L=735\text{Km}$ , μπορούμε να σχεδιάσουμε τα A, B, και C συναρτήσει της ενέργειας των νετρίνων. Αυτές οι καμπύλες φαίνονται στις εικόνες 1.15(α,β,γ).



**Εικόνα 1.15α:** Ο συντελεστής A για  $P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e)$ , σε απόσταση  $L=735\text{Km}$ .



**Εικόνα 1.15β:** Ο συντελεστής B για  $P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e)$ , σε απόσταση  $L=735\text{Km}$ .

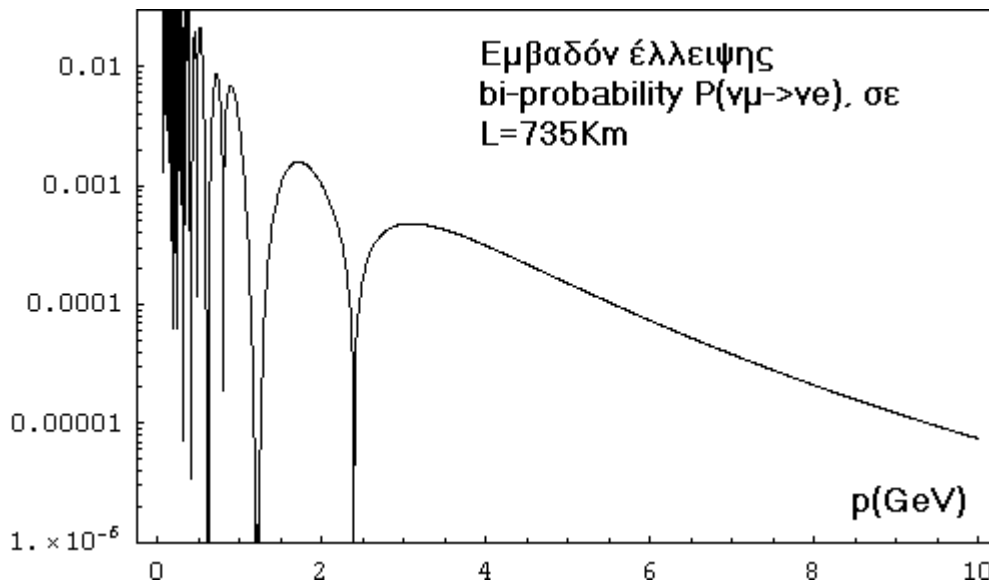


Εικόνα 1.15γ: Ο συντελεστής C για  $P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e)$ , σε απόσταση  $L=735\text{Km}$ .

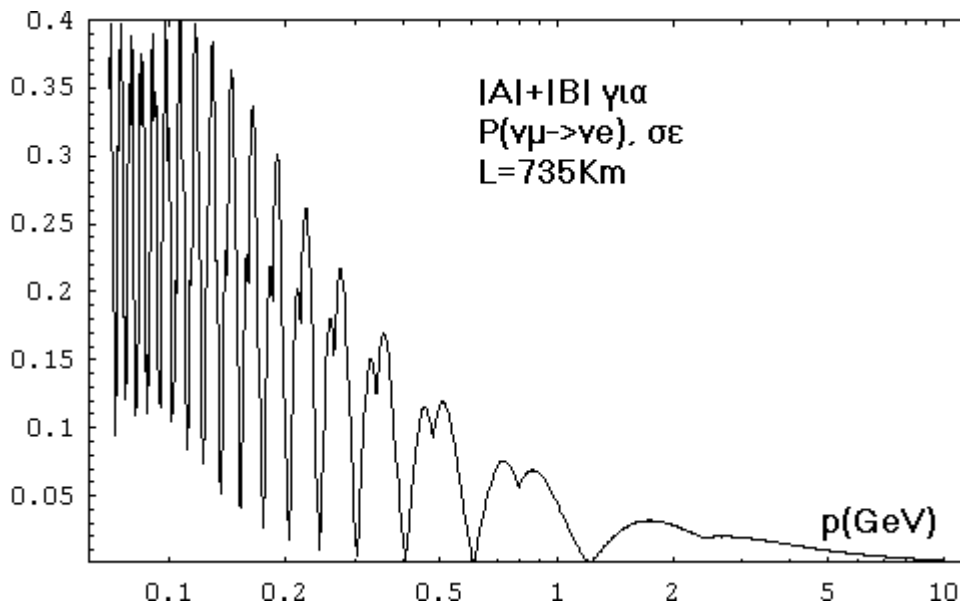
Στην εικόνα 1.16(α) απεικονίζεται το εμβαδόν της έλλειψης ως συνάρτηση της ενέργειας των ηλεκτρονίων, για απόσταση πάντα  $L=735\text{Km}$  και για το συγκεκριμένο bi-probability διάγραμμα. Όπως είπαμε, στα σημεία όπου το εμβαδόν γίνεται μηδέν, έχουμε εκφυλισμό της έλλειψης σε ευθεία. Στην εικόνα 1.16(β) φαίνεται το άθροισμα  $|A|+|B|$ , που εκφράζει το πόσο μεγάλη είναι η έλλειψη. Παρατηρούμε ότι μπορεί να έχουμε μη γραμμική έλλειψη, αλλά πολύ μικρό μέγεθος, οπότε αυτή είναι μια κατάσταση δυσάρεστη. Από την άλλη, μπορεί να έχουμε μεγάλη έλλειψη, αλλά να είναι (σχεδόν) γραμμική, οπότε θα έχουμε το πρόβλημα που περιγράψαμε παραπάνω στον προσδιορισμό του  $\delta$ . Ορίζουμε λοιπόν έναν όρο που ας τον ονομάσουμε  $K$  καταλληλότητα της έλλειψης και ισούται με το γινόμενο:

$$K=2\pi|A \cdot B| \cdot (|A|+|B|) \tag{1.68}$$

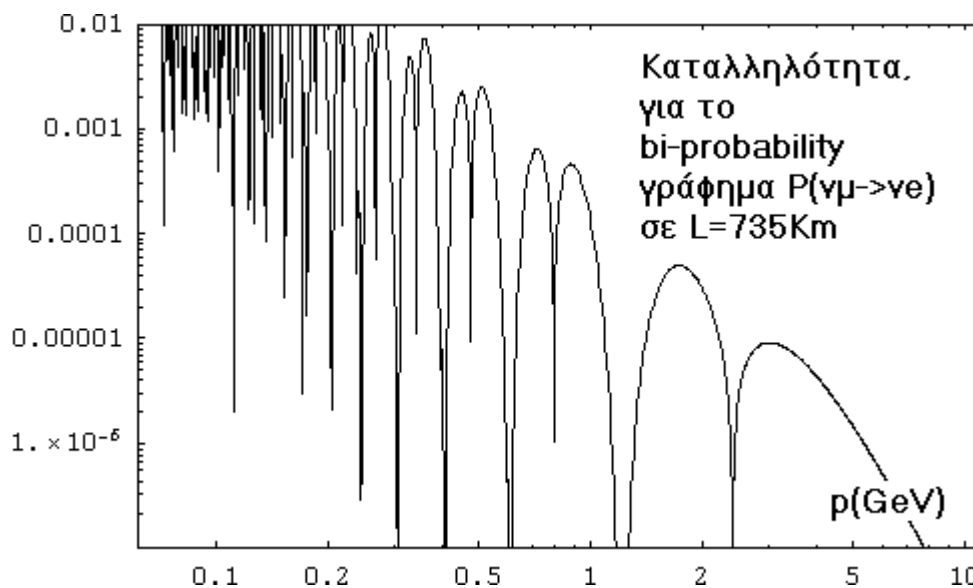
Όταν ο όρος  $K$  μηδενίζεται, τότε είτε έχουμε πολύ μικρή έλλειψη είτε έχουμε εκφυλισμό της έλλειψης σε ευθεία. Όσο μεγαλύτερο είναι το  $K$ , τόσο καταλληλότερη είναι η συνθήκη για να παρατηρήσουμε ποιο σημείο της έλλειψης ισχύει πειραματικά. Στην εικόνα 1.16(γ) έχουμε σχεδιάσει τον όρο  $K$ .



Εικόνα 1.16α: Το εμβαδόν της έλλειψης του bi-probability διαγράμματος  $\{P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e), P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu)\}$ , σε απόσταση  $L=735\text{Km}$ .

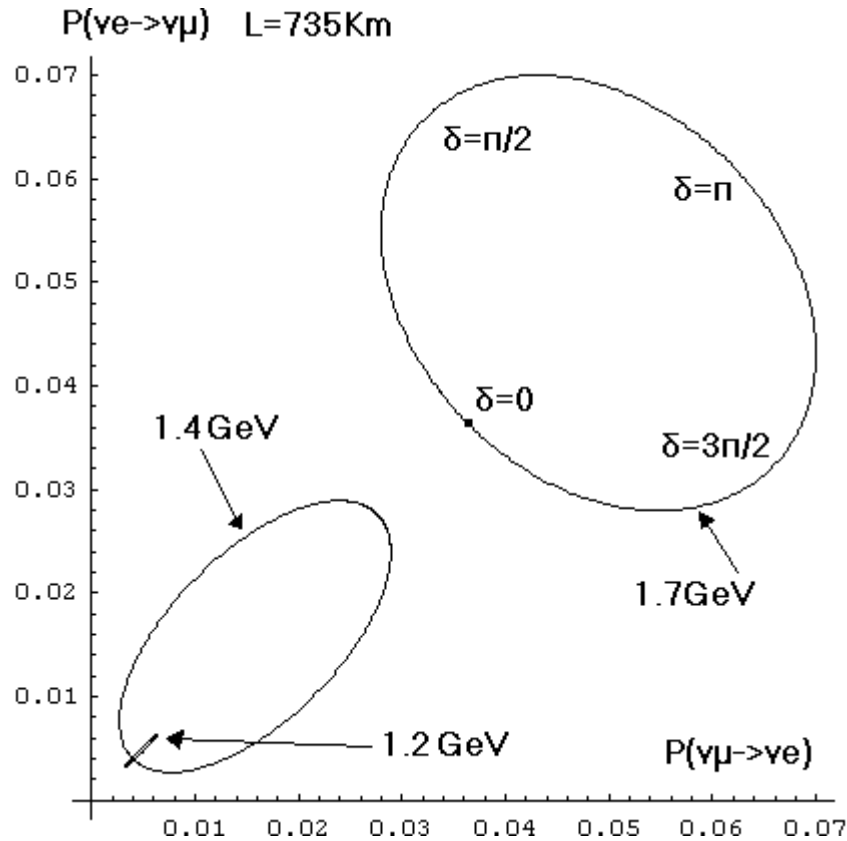


**Εικόνα 1.16β:** Το μέγεθος  $|A|+|B|$  της έλλειψης του bi-probability διαγράμματος  $\{P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e), P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu)\}$ , σε απόσταση  $L=735\text{Km}$ .



**Εικόνα 1.16γ:** Ο όρος καταλληλότητας της έλλειψης του bi-probability διαγράμματος  $\{P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e), P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu)\}$ , σε απόσταση  $L=735\text{Km}$ .

Διαπιστώνουμε ότι οι περισσότερο ενδεδειγμένες περιοχές για να μετρήσουμε το  $\delta$  μέσω ενός bi-probability γραφήματος είναι για  $p < 1\text{GeV}$ , όπου χάνεται η διακριτική ικανότητα. Η πιο κατάλληλη ενέργεια στην περιοχή  $p > 1\text{GeV}$  είναι η  $p=1.7\text{GeV}$ . Στην εικόνα 1.17 βλέπουμε την έλλειψη στο bi-probability γράφημα που παίρνουμε για αυτήν την ενέργεια, σε  $L=735\text{Km}$ . Στο ίδιο γράφημα χαράζουμε τις ελλείψεις που παίρνουμε για  $p=1.4\text{GeV}$  και για  $p=1.2\text{GeV}$ . Είναι φανερό, συγκρίνοντας και με την εικόνα 1.16(β) ότι η ποσότητα  $K$  πρέπει να λαμβάνεται σοβαρά υπόψη.



**Εικόνα 1.17:** Τρεις ελλείψεις, που η σύγκρισή τους δείχνει τη σημασία του όρου καταλληλότητας, όπως ορίζεται στη σχέση (1.68). Η πλέον ενδεδειγμένη ενέργεια, για το συγκεκριμένο bi-probability διάγραμμα, που να είναι μεγαλύτερη του 1GeV είναι η ενέργεια  $p=1.7\text{GeV}$ .

Μέχρι στιγμής επικεντρώσαμε το ενδιαφέρον μας σε απόσταση  $L=735\text{Km}$ , επειδή αυτή η απόσταση χωρίζει τον μακρινό ανιχνευτή του πειράματος MINOS από τον κοντινό. Για αυτήν τη συγκεκριμένη απόσταση αποφανθήκαμε ποια είναι η ενέργεια  $p$  που θα προσέφερε τη μεγαλύτερη διευκόλυνση στην παρατήρηση του  $\delta$ . Θα μπορούσε κανείς να αναρωτηθεί πώς θα άλλαζε η δυνατότητα παρατήρησης του  $\delta$ , σαν συνάρτηση της απόστασης  $L$ .

Η απάντηση βρίσκεται εύκολα αν κοιτάξει κανείς προσεκτικά τις σχέσεις (1.65) έως (1.67). Παρατηρούμε ότι η μόνη εξάρτηση από το  $L$  βρίσκεται στους όρους (ij) (βλ. σχέση (1.51)). Σε όλους αυτούς τους όρους, πάντα έχουμε το λόγο  $L/p$ , οπότε, το  $A$ ,  $B$ ,  $C$  και επομένως και το  $K$ , παραμένουν αμετάβλητα για σταθερό  $L/p$ . Για παράδειγμα, στην εικόνα 1.16β βλέπουμε το τοπικό μέγιστο που εμφανίζει το  $K$  στην ορμή  $p \approx 0.5\text{GeV}$ , για  $L=735\text{Km}$ . Θα θέλαμε φυσικά να είχαμε δυνατότητα να παρατηρήσουμε τόσο μικρές ενέργειες με μεγάλη διακριτική ικανότητα, αλλά αυτό για το MINOS δεν είναι εφικτό. Θα μπορούσαμε όμως να είχαμε το ίδιο  $K$  σε μία μεγαλύτερη ορμή, αν τοποθετούσαμε τον μακρινό ανιχνευτή πιο μακριά. Συγκεκριμένα, αν είχαμε το  $L=2 \cdot 735\text{Km}=1470\text{Km}$ , τότε θα είχαμε το ίδιο  $K$  σε ενέργεια  $p=2 \cdot 0.5\text{GeV}=1.0\text{GeV}$ .

Μια τελευταία λεπτομέρεια που θα ήταν καλό να αναφέρουμε είναι το τι συμβαίνει στην περίπτωση του bi-probability διαγράμματος  $P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau)$  προς  $P(\nu_\tau \rightarrow \nu_\mu)$ . Για τους περισσότερους αυτή είναι μια περίπτωση άνευ ενδιαφέροντος, διότι δεν πρόκειται στα πειράματα του ορατού μέλλοντος να είμαστε σε θέση να μετρήσουμε αυτές τις πιθανότητες, καθώς κάτι τέτοιο θα απαιτούσε να διαθέτουμε δέσμη νετρίνων  $\nu_\tau$ . Παρ' όλα αυτά αξίζει, χάριν της διαφορετικότητάς της, να περιγράψουμε την εν λόγω περίπτωση.

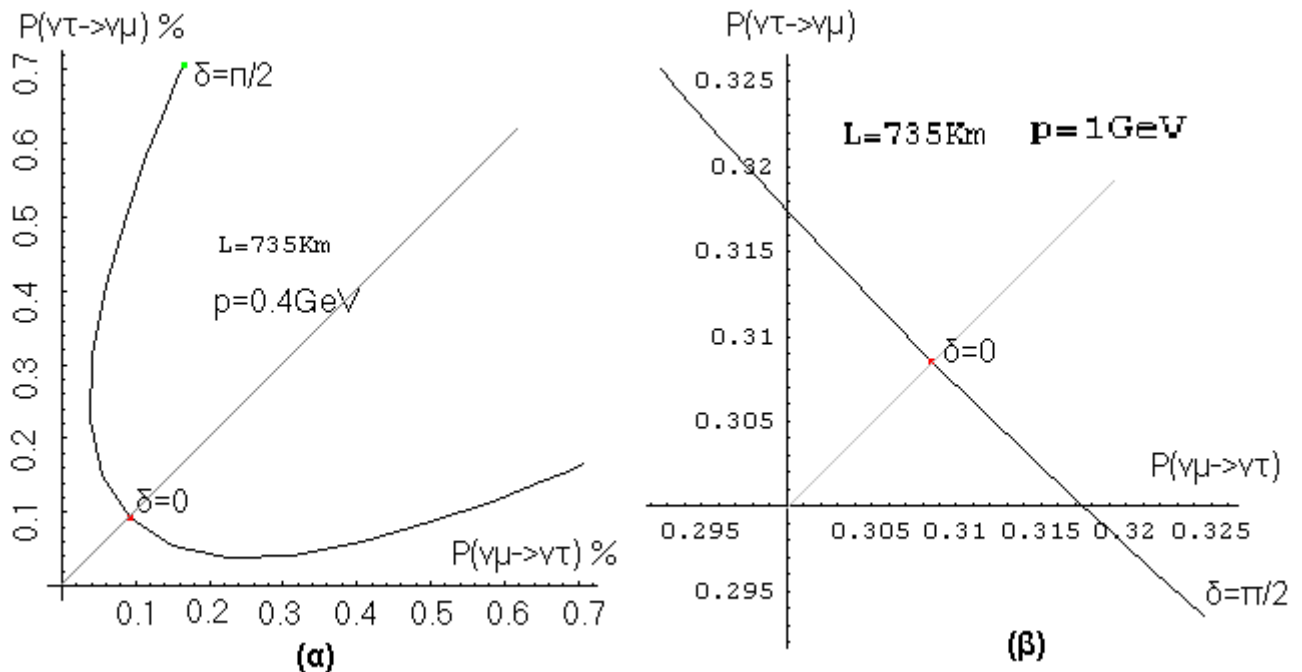
Από τις σχέσεις (1.52) ως (1.57) βλέπουμε ότι, σε αντίθεση με τις  $P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e)$ ,  $P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu)$ ,  $P(\nu_\tau \rightarrow \nu_e)$ , και  $P(\nu_e \rightarrow \nu_\tau)$ , οι πιθανότητες  $P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau)$  και  $P(\nu_\tau \rightarrow \nu_\mu)$  δε μπορούν να παραγοντοποιηθούν σε μια μορφή όπως οι σχέσεις (1.63) και (1.64). Επομένως, το bi-probability γράφημά τους δε σχηματίζει έλλειψη. Η μορφή που μπορούν να πάρουν ώστε να φαίνεται ως παράμετρος το  $\delta$  είναι:

$$P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau) = A \cdot \cos\delta + B \cdot \sin\delta + \Gamma \cdot \cos^2\delta + C \tag{1.69}$$

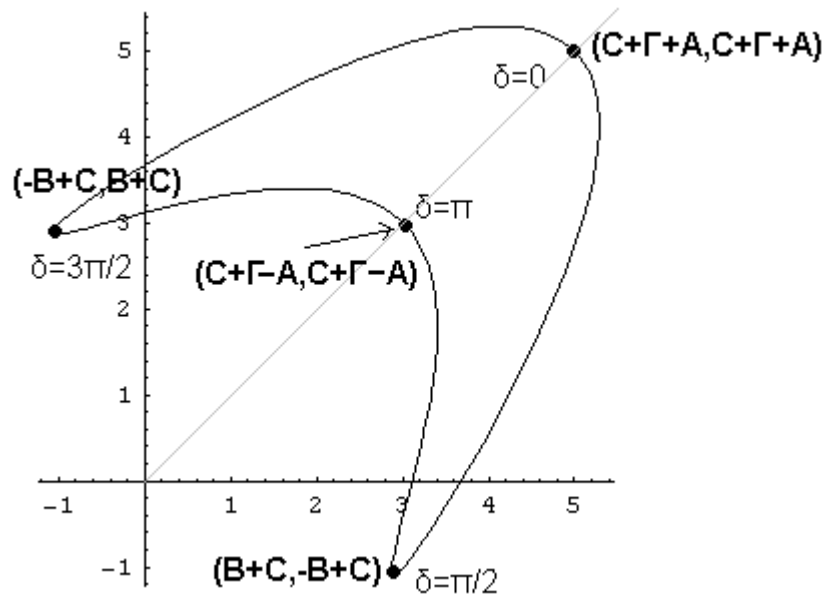
$$P(\nu_\tau \rightarrow \nu_\mu) = A \cdot \cos\delta - B \cdot \sin\delta + \Gamma \cdot \cos^2\delta + C \tag{1.70}$$

Από τη στιγμή που η όλη περίπτωση είναι πέραν παντός πειραματικού ενδιαφέροντος, δε θα μελετήσουμε τους συντελεστές αναλυτικά όπως κάναμε στην προηγούμενη περίπτωση. Θα περιοριστούμε στο να παρουσιάσουμε τη μορφή του bi-probability γραφήματος. Για τις περισσότερες τιμές του  $L$  και της ενέργειας ( $p$  ή  $E$ ) η μεταβολή του  $\delta$  σχηματίζει μια ευθεία, όπως αυτή που φαίνεται στο σχήμα 18α. Μόνο σε ορισμένες τιμές έχουμε καμπύλες που δεν είναι ευθείες, όπως στο σχήμα 18β.

Στη γενική περίπτωση, η μορφή που έχει η σχηματιζόμενη καμπύλη φαίνεται στο σχήμα 19. Το γεγονός ότι στις εικόνες 1.18α και 1.18β βλέπουμε κλειστές καμπύλες εκφυλισμένες σε γραμμές, οφείλεται στη σχέση που έχουν οι συντελεστές  $A$ ,  $B$  και  $\Gamma$ .



**Εικόνα 1.18:** (α): Bi-probability διάγραμμα για  $P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau)$  και  $P(\nu_\tau \rightarrow \nu_\mu)$ , σε  $L=735\text{Km}$  και  $p=0.4\text{GeV}$ .  
 (β): Το αυτό για ενέργεια  $p=1.0\text{GeV}$ .



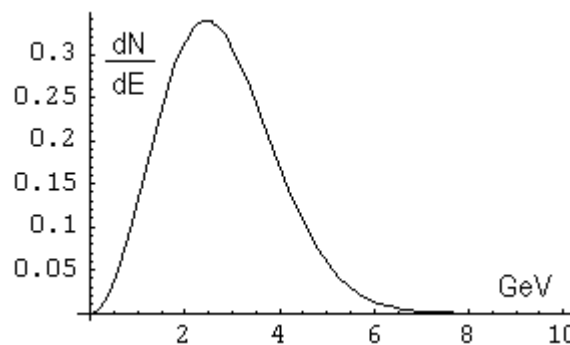
**Εικόνα 1.19:** Η γεωμετρική σημασία των  $A, B, \Gamma, C$  της σχέσεως (1.69).

## Μέτρηση του ταλαντωμένου ενεργειακού φάσματος

Ήδη έχουμε αναφέρει πολλές φορές ότι στο πείραμα MINOS είναι ανώφελο να αναζητούμε φαινόμενα ταλάντωσης νετρίνων σε ενέργειες μικρότερες του  $\sim 1\text{GeV}$ , διότι σε αυτές τις μικρές ενέργειες η διακριτική ικανότητα του ανιχνευτή δεν επιτρέπει ακριβή εντοπισμό της ενέργειας. Στην παράγραφο αυτή θα υπολογίσουμε θεωρητικά το ενεργειακό φάσμα των νετρίνων στο μακρινό ανιχνευτή, θεωρώντας γνωστό το αρχικό ενεργειακό τους φάσμα. Κατόπιν, θα δείξουμε τη συσχέτιση αυτού του θεωρητικού φάσματος με αυτό που θα μπορούσε να μετρηθεί πειραματικά. Θα δούμε ότι υπάρχει απόκλιση λόγω της πεπερασμένης διακριτικής ικανότητας του ανιχνευτή.

Θα θεωρήσουμε το συγκεκριμένο παράδειγμα του πειράματος MINOS, όπου στο Fermilab παράγονται  $\nu_\mu$  με ενεργειακό φάσμα  $f(E)$  που έχει μέγιστο στα 2 με 3 GeV περίπου. Θεωρούμε ότι το φάσμα αυτό είναι μιας μορφής όπως η κατανομή Boltzmann των ταχυτήτων ενός αερίου σε θερμοδυναμική ισορροπία (εικόνα 1.20). Βέβαια, δεν υπάρχει κανένας φυσικός λόγος να θεωρήσουμε κάτι τέτοιο, απλώς αυτή η κατανομή μας είναι γνωστή και μοιάζει με το ενεργειακό φάσμα που πραγματικά έχουμε. Το πραγματικό φάσμα φθίνει πιο αργά οπότε διαθέτουμε και  $\nu_\mu$  ενέργειας  $\sim 10\text{GeV}$ , αλλά αυτό δεν έχει και τόση σημασία στην εφαρμογή που πρόκειται να επιδείξουμε στη συνέχεια.

$$f(E) = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{3\pi}} E^2 e^{-\frac{E^2}{6}} \quad (1.71)$$



**Εικόνα 1.20:** Το ενεργειακό φάσμα  $f(E)$  τύπου Boltzmann των  $\nu_\mu$  που θεωρούμε ότι μοιάζει αρκετά με αυτό που παράγεται στο Fermilab. Το παραπάνω φάσμα είναι κανονικοποιημένο ούτως ώστε το ολοκλήρωμα να ισούται με 1.

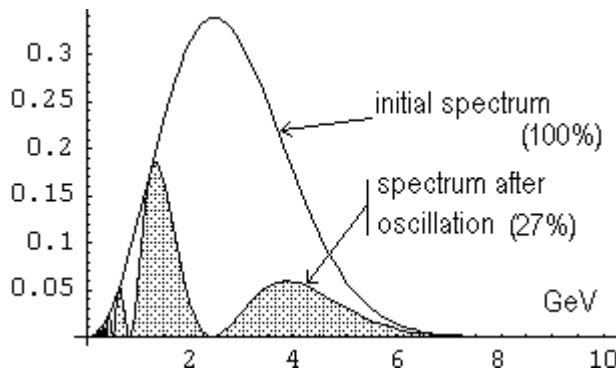
Στο μακρινό ανιχνευτή, σε απόσταση  $L=735\text{Km}$ , το φάσμα αυτό θα έχει αλλοιωθεί, διότι ορισμένα από τα  $\nu_\mu$  θα έχουν ταλαντωθεί σε νετρίνα άλλης γεύσης, οπότε δε θα ανήκουν πλέον σε αυτό το φάσμα. Για ορισμένες ενέργειες νετρίνων μια τέτοια εξαφάνιση θα είναι εντελώς απίθανη, ενώ για άλλες θα είναι πολύ πιθανή.

Αρχικά, μεταξύ  $E$  και  $E+dE$  βρίσκονται  $f(E) \cdot dE \cdot N$  νετρίνα, όπου  $N$  είναι ο συνολικός αριθμός νετρίνων, λόγω του ότι η  $f(E)$  είναι κανονικοποιημένη στη μονάδα. Η πιθανότητα να επιβιώσει ένα νετρίνο από αυτά είναι  $P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu; E, L)$ . Επομένως, στο μακρινό ανιχνευτή, στο ίδιο εύρος ενεργειών θα βρίσκονται  $P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu; E, L) \cdot f(E) \cdot dE \cdot N$  νετρίνα, οπότε το νέο φάσμα θα είναι το  $P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu; E, L) \cdot f(E)$ , το οποίο φυσικά θα έχει ολοκλήρωμα μικρότερο από τη μονάδα, υποδηλώνοντας το γεγονός της εξαφάνισης ορισμένων  $\nu_\mu$ .

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.71) πολλαπλασιασμένη με την (1.59), καταλήγουμε στο *ταλαντωμένο φάσμα* που φαίνεται στην εικόνα 1.21, σε σύγκριση μάλιστα με το αρχικό φάσμα  $f(E)$ . Κάνοντας, με αριθμητικό τρόπο, το ολοκλήρωμα του ταλαντωμένου φάσματος το βρίσκουμε ίσο με 0.27, που σημαίνει ότι 73% των αρχικών  $\nu_\mu$  αναμένεται να αλλάξουν γεύση.

Στο φάσμα της εικόνας 1.21 φαίνεται να καθορίζεται πολύ καλά θεωρητικά, αλλά δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι για τον υπολογισμό του θέσαμε ορισμένες τιμές στις παραμέτρους του



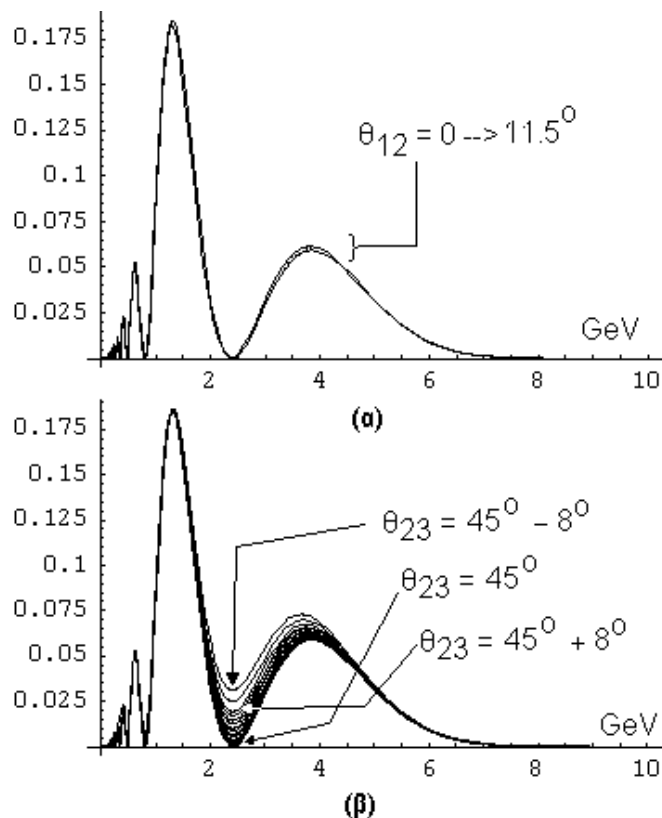


**Εικόνα 21:** Αρχικό και ταλαντωμένο ενεργειακό φάσμα  $\nu_\mu$ . Το 73% των νετρίνων προβλέπεται να αλλάξουν γεύση. Έχουμε θεωρήσει  $\delta=0$ .

ύψος τους. Παρόμοια είναι η εικόνα και για τη γκάμα των τιμών της παραμέτρου  $\theta_{13}$ . Η παράμετρος που επηρεάζει σημαντικά το φάσμα είναι η  $\theta_{23}$ , όπως είναι αναμενόμενο από τη στιγμή που μελετάμε τις ταλαντώσεις των  $\nu_\mu$  που κυρίως γίνονται  $\nu_\tau$ . Στην εικόνα 1.22(β) βλέπει κανείς το πόσο αλλάζει το ταλαντωμένο φάσμα για τις διάφορες τιμές του  $\theta_{23}$ . Και πάλι, οι θέσεις των ακροτάτων του φάσματος δεν αλλάζουν, παρά μόνο τα βάθη και τα ύψη τους. Αυτό είναι λογικό, αν σκεφτεί κανείς ότι στην (1.59) οι γωνίες  $\theta_{12}$ ,  $\theta_{23}$  και  $\theta_{13}$  δεν είναι συντελεστές κάποιας ποσότητας που να σχετίζεται με την ενέργεια, όπως για παράδειγμα είναι οι διαφορές μαζών  $\Delta m^2_{ij}$ .

Σύμφωνα με όσα αναφέραμε, αναμένουμε η διαφοροποίηση του ταλαντωμένου φάσματος λόγω της αβεβαιότητας στις διαφορές μαζών να είναι σημαντική. Πράγματι, όπως φαίνεται στην εικόνα 1.23, το ταλαντωμένο φάσμα αλλάζει δραματικά συναρτήσει της  $\Delta m^2_{32}$ . Η θέση του δεξιότερου τοπικού ελαχίστου μεταβάλλεται έντονα, όπως περιμένουμε άλλωστε σύμφωνα με τη σχέση (1.38). Η μεταβολή λόγω της αβεβαιότητας της διαφοράς  $\Delta m^2_{21}$  επηρεάζει αμελητέα το ταλαντωμένο φάσμα, σε αντίθεση με την  $\Delta m^2_{32}$ . Ο λόγος είναι ότι στην απόσταση των 735Km, ο παράγοντας που παίζει ρόλο στις ταλαντώσεις είναι κυρίως ο  $\Delta m^2_{32} \cdot L/2p$ . Ο παράγων  $\Delta m^2_{21} \cdot L/2p$  είναι δύο τάξεις μεγέθους μικρότερος, οπότε μπορούμε άνετα να πούμε ότι βρισκόμαστε στην περι-

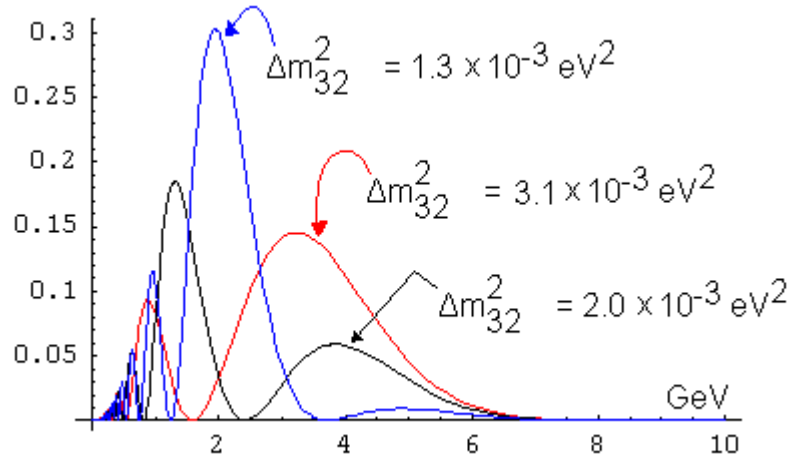
πίνακα PMNS, οι οποίες συνοδεύονται από περιοχές εμπιστοσύνης (βλ. σχέση (1.62)). Διερευνήσαμε το πόσο εξαρτάται το ταλαντωμένο φάσμα από αυτές τις αβεβαιότητες των παραμέτρων. Στην εικόνα 1.22(α) έχουμε σχεδιάσει το ταλαντωμένο φάσμα για όλο το εύρος των πειραματικά επιτρεπτών τιμών του  $\theta_{13}$ . Βλέπουμε ότι η διαφοροποίηση μεταξύ  $\theta_{13}=0^\circ$  και  $\theta_{13}=11.5^\circ$  είναι αμελητέα και δεν επηρεάζει τη θέση των κορυφών του φάσματος, παρά μόνο το



**Εικόνα 22(α):** Το ταλαντωμένο φάσμα για  $\theta_{13} \in [0, 11.5^\circ]$ . Η εξάρτηση είναι αμελητέα και παρόμοια είναι και για το  $\theta_{12}$  και για το  $\delta$ . **(β):** Η εξάρτηση από τη γωνία  $\theta_{23}$  είναι πιο σημαντική, αλλά δεν επηρεάζεται τη θέση του δεξιότερου τοπικού ελαχίστου.

πτώση όπου η προσέγγιση (1.45) είναι ικανοποιητική.

Ένα **πολύ βασικό συμπέρασμα** βγαίνει αβίαστα από τις εικόνες 1.22β και 1.23 και τα όσα σχόλια κάναμε: Αν στο πείραμα MINOS γίνει δυνατή η μέτρηση του ταλαντωμένου φάσματος, πρόκειται να προσδιοριστούν (με ορισμένα σφάλματα φυσικά) οι παράμετροι  $\theta_{23}$  και  $\Delta m_{32}^2$ .



**Εικόνα 1.23:** Η εξάρτηση του ταλαντωμένου φάσματος από τη διαφορά μαζών  $\Delta m_{32}^2$ .

Φυσικά, δε θα είναι ποτέ δυνατόν να μετρήσουμε στο μακρινό ανιχνευτή ένα φάσμα που να μοιάζει ακριβώς με την εικόνα 1.23, λόγω πεπερασμένης διακριτικής ικανότητας. Όπως θα δούμε στο κεφάλαιο όπου θα ασχοληθούμε με τις πειραματικές μεθόδους, η παρατήρηση των νετρίνων δε γίνεται άμεσα, αλλά έμμεσα, παρατηρώντας ορισμένα παράγωγα της αλληλεπίδρασής τους με την ύλη στον ανιχνευτή. Από την ενέργεια των παραγώγων συμπεραίνουμε την ενέργεια του νετρίνου που τα προκάλεσε. Η ενέργεια των παραγώγων μετριέται με ένα σφάλμα, οπότε και η ενέργεια του νετρίνου προσδιορίζεται με σφάλμα. Έτσι, δεν είναι δυνατόν να γνωρίζουμε ακριβώς τη θέση ενός νετρίνου που επιβιώνει στον άξονα των ενεργειών, παρά μόνο μια κατανομή πιθανότητας να έχει μια ενέργεια. Ας εξετάσουμε το πρόβλημα περισσότερο ποσοτικά:

Αν σε ένα καλορίμετρο προσπέσει ένα σωματίο ενέργειας  $p$ , αυτό κατά κανόνα θα μετρήσει ενέργεια περίπου ίση με  $p$ . Η κατανομή πιθανότητας του αποτελέσματος είναι μια gaussian με κέντρο το  $p$  και τυπική απόκλιση  $\sigma$  που εξαρτάται από το  $p$  και τις προδιαγραφές του οργάνου. Συνήθως η έκφραση του  $\sigma$  είναι:

$$\frac{\sigma}{p} = \alpha + \frac{\beta}{\sqrt{p}} \Rightarrow \sigma = \alpha p + \beta \sqrt{p} \quad (1.72)$$

Ας θεωρήσουμε ότι κατά τον έμμεσο προσδιορισμό της ενέργειας του νετρίνου, η απάντηση ακολουθεί μια παρόμοια γκαουσιανή. Άρα, αν συμβολίσουμε με  $p$  την πραγματική ορμή του νετρίνου και με  $E$  την ορμή που προκύπτει από τη μέτρηση, η κατανομή του  $E$  είναι:

$$g_p(E) = \frac{1}{(\alpha p + \beta \sqrt{p}) \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(E-p)^2}{2(\alpha p + \beta \sqrt{p})^2}\right) \quad (1.73)$$

Ένα σωματίο το οποίο έχει μετρούμενη ενέργεια  $E$ , μπορεί στην πραγματικότητα να είχε οποιαδήποτε ενέργεια  $p$ . Η πιθανότητα ταλάντωσής του εξαρτάται από την πραγματική  $p$  και όχι από τη μετρούμενη  $E$ . Στην (1.73) γράψαμε την κατανομή πιθανότητας της  $E$  με δεδομένη την πραγματική  $p$ , αλλά τώρα ενδιαφερόμαστε για την αντίστροφη κατανομή, δηλαδή την κατανομή πιθανότητας της  $p$  με δεδομένη τη μετρούμενη  $E$ , ας την ονομάσουμε  $h_E(p)$ .

Ο λόγος που θέλουμε την  $h_E(p)$  είναι ο εξής: Αν έχουμε ένα νετρίνο  $\nu_\alpha$  μετρούμενης ενέργειας  $E$ , η πιθανότητα να επιβιώσει προκύπτει από μια πράξη που λέγεται convolution και είναι η εξής:

$$P(E) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_E(p) P_{(p)}^{\alpha \rightarrow \alpha} dp \quad (1.74)$$

Για να προσδιορίσουμε την  $h_E(p)$  θα εργασθούμε με έναν γενικό τρόπο, ο οποίος οδηγεί σε ένα συμπέρασμα που δεν ισχύει μόνο για τη γκαουσιανή, αλλά για οποιαδήποτε κατανομή πιθανότητας. Το αποτέλεσμα που θα προκύψει θα είναι εξαιρετικά απλό και θα μπορούσε ίσως κανείς να το μαντέψει χωρίς να μπει στη διαδικασία να το αποδείξει.

Για απλότητα, θα θεωρήσουμε στην αρχή μια ομοιόμορφη κατανομή πιθανότητας:

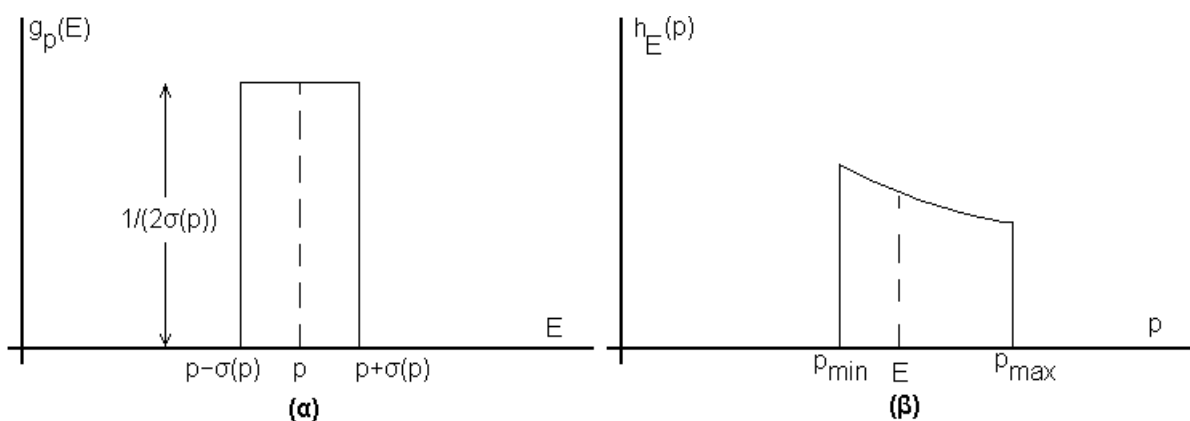
$$g_p(E) = \begin{cases} H_p, & E \in [p - \sigma(p), p + \sigma(p)] \\ 0, & E \notin [p - \sigma(p), p + \sigma(p)] \end{cases}, H = \frac{1}{2\sigma(p)} \quad (1.75)$$

Η σημασία των  $p$  και  $E$  παραμένει αυτή που έχουμε ήδη περιγράψει, απλώς αντί για τη γκαουσιανή κατανομή θεωρήσαμε μια με σαφή όρια και απλή μορφή, που όπως και στην περίπτωση που μελετούμε έχει ένα άνοιγμα  $\sigma$  που εξαρτάται από το  $p$ , ακριβώς όπως δηλώνει και η σχέση (1.72). Η (1.75) απεικονίζεται στην εικόνα 1.24α.

Έστω λοιπόν ότι μετρούμε πειραματικά μια συγκεκριμένη ενέργεια  $E$ . Ποια είναι η  $h_E(p)$ , η κατανομή πιθανότητας της πραγματικής ενέργειας  $p$ ; Αυτή φαίνεται στην εικόνα 1.24β. Η μορφή της είναι μη τετραγωνική, βάση του ακόλουθου συλλογισμού: Για μια δεδομένη  $p$ , κάθε  $E$  εντός ορισμένων ορίων είναι εξίσου πιθανή, σύμφωνα με τη σχέση (1.75). Η μετρούμενη  $E$  προέρχεται από κάποια κατανομή  $g_p(E)$ , όπου όμως δε γνωρίζουμε το  $p$ , οπότε δεν ξέρουμε ποια ακριβώς είναι. Όλες οι  $g_p(E)$  που είναι μη μηδενικές στην τιμή της μετρούμενης  $E$  είναι υποψήφιες. Όμως, μεταξύ των υποψηφίων  $g_p(E)$ , δεν είναι όλες εξίσου πιθανές, διότι το  $\sigma(p)$  είναι μεταβλητό, άρα και το  $H$ . Αν θεωρήσουμε ότι αυξανόμενου του  $p$  αυξάνεται και το  $\sigma(p)$ , τότε όσο μικρότερο  $p$  έχει μια υποψήφια κατανομή τόσο πιο ψηλή είναι, οπότε δίνει μεγαλύτερη πιθανότητα να έχει μετρηθεί μέσω αυτής η ενέργεια  $E$ . Γι' αυτό τα  $p$  που βρίσκονται αριστερά του  $E$  έχουν σχεδιαστεί να είναι περισσότερο πιθανά.

Τα  $p_{\min}$  και  $p_{\max}$  καθορίζονται από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\begin{aligned} p_{\min} + \sigma(p_{\min}) &= E \\ p_{\max} - \sigma(p_{\max}) &= E \end{aligned} \quad (1.76)$$

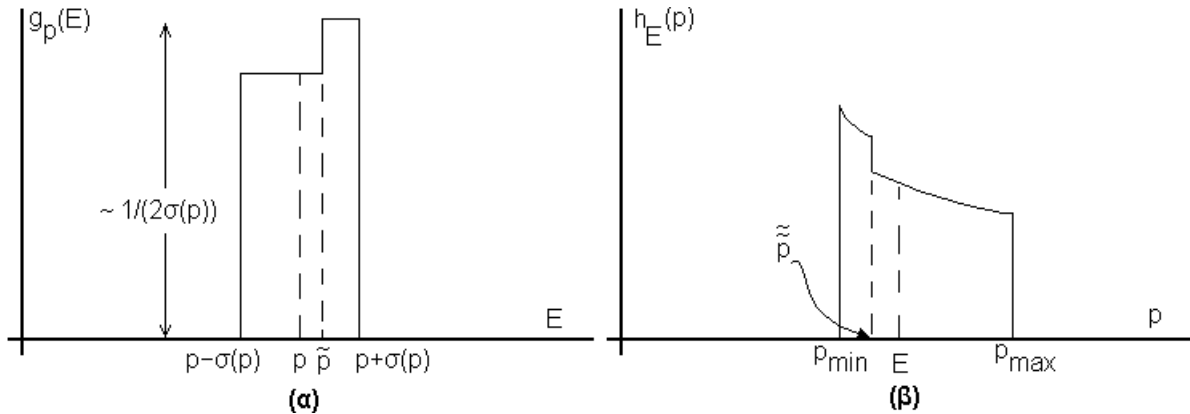


**Εικόνα 1.24 (α):** Η ομοιόμορφη  $g_p(E)$ . **(β):** Η μη ομοιόμορφη και ασύμμετρη  $h_E(p)$ . Έχει θεωρηθεί ότι αυξανόμενου του  $p$  αυξάνεται το  $\sigma(p)$ .

Από αυτήν την απλή  $g_p(E)$  αρχίζουμε να καταλαβαίνουμε ότι η  $h_E(p)$  θα είναι ανάλογη του  $H(p)$ , δηλαδή του  $g_p(E)$  στο συγκεκριμένο παράδειγμα. Βέβαια, επειδή αλλάζει και το σχήμα και τα άκρα της κατανομής, πρέπει να πολλαπλασιαστεί συνολικά με έναν αριθμητικό συντελεστή ώστε να είναι κανονικοποιημένη. Ας δούμε ένα λίγο διαφορετικό παράδειγμα, το οποίο ξεκαθαρίζει τα πράγματα περισσότερο. Έστω:

$$g_p(E) = H \begin{cases} 1 & , E \in [p - \sigma(p), p + 0.6\sigma(p)] \\ 1.2 & , E \in [p + 0.6\sigma(p), p + \sigma(p)] \\ 0 & , E \notin [p - \sigma(p), p + \sigma(p)] \end{cases} \quad (1.77)$$

Η  $g_p(E)$  και η αντίστοιχη  $h_E(p)$  φαίνονται στην εικόνα 1.25. Όσα ειπώθηκαν για το σχήμα 24 ισχύουν και στο 25, αλλά το επιπλέον σχόλιο που πρέπει να γίνει αφορά στη διαταραχή που φροντίσαμε να προσδώσουμε στην  $g_p(E)$ .



**Εικόνα 1.25 (α):** Η διαταραγμένη  $g_p(E)$ . **(β):** Η μη ομοιόμορφη και ασύμμετρη  $h_E(p)$  που φέρει το σημάδι της διαταραχής της  $g_p(E)$ . Έχει θεωρηθεί ότι αυξανόμενου του  $p$  αυξάνεται το  $\sigma(p)$ .

Τοποθετήσαμε μια τοπική ενίσχυση της  $g_p(E)$  στο δεξιό της άκρο. Έτσι, γίνεται περισσότερο πιθανό το μετρούμενο  $E$  να μαρτυρεί ένα  $p$  μικρότερο από το  $E$ . Έτσι εξηγείται η αύξηση της  $h_E(p)$  στην περιοχή  $p \in [p_{\min}, \tilde{p}]$ . Βεβαίως, εντός αυτής της περιοχής η  $h_E(p)$  εξακολουθεί να έχει κλίση λόγω της υποτιθέμενης αύξησης του  $\sigma(p)$  με το  $p$ , που έχει ως συνέπεια να χαμηλώνουν οι τιμές των υπονηφίων κατανομών  $g_p(E)$  στο σημείο της μετρούμενης  $E$ . Το  $\tilde{p}$  δίδεται από τη λύση της εξίσωσης:

$$\tilde{p}(\tilde{p}) = E \quad (1.78)$$

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα που εκφράζεται στη σχέση (1.77), η (1.78) γράφεται:

$$\tilde{p} + 0.8 \left( \sigma(\tilde{p}) \right) = E \quad (1.79)$$

Ουσιαστικά, αν ξεχάσουμε ότι το  $\tilde{p}$  είναι η αρχή του σκαλοπατιού της  $g_p(E)$  και σκεφτούμε ότι μπορεί να είναι οποιοδήποτε συγκεκριμένο σημείο του άξονα των ενεργειών στο σχήμα 25α, η σχέση (1.78) εκφράζει το πώς αντιστοιχούμε σε κάθε  $\tilde{p}$  το κατάλληλο  $\tilde{p}$  με δεδομένη παρατηρούμενη  $E$ . Καταλήγουμε, επομένως, στη σχέση:

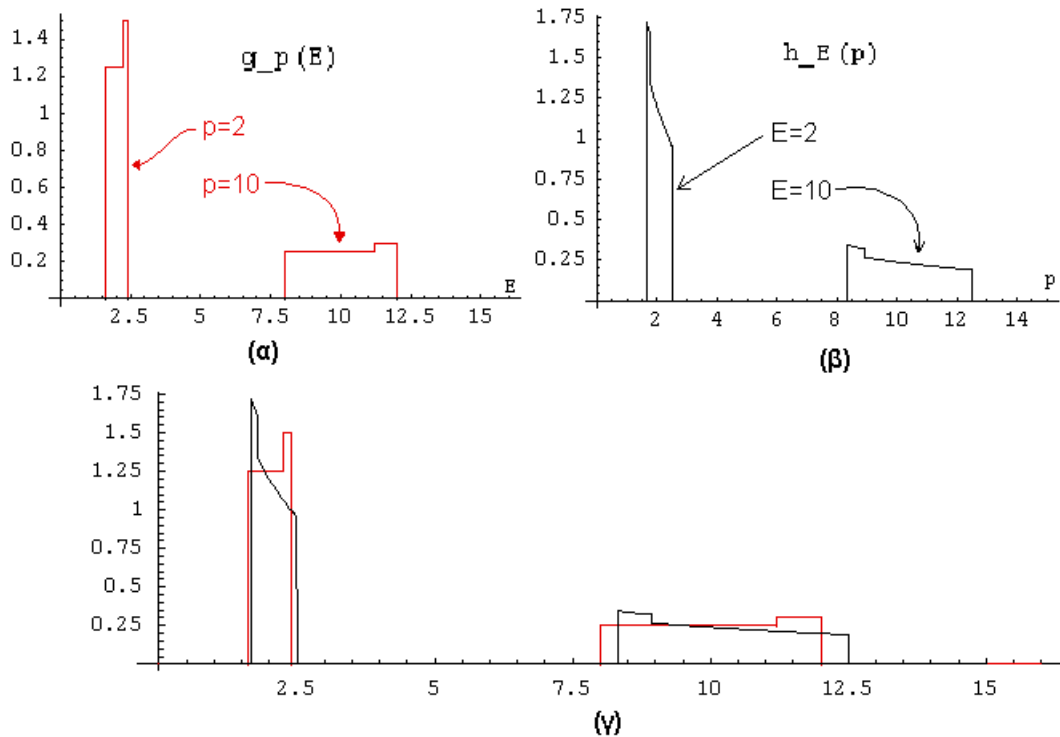
$$h_E(p) = A_{(E)} g_p(E) \quad (1.80)$$

$$\text{όπου} \quad A_{(E)} = 1 / \int_0^{+\infty} g_p(E) dp \quad (1.81)$$

Το  $A$  είναι τέτοιο ώστε η κατανομή  $h_E(p)$  να είναι κανονικοποιημένη. Παρατηρούμε ότι εάν η τυπική απόκλιση  $\sigma$  της γκαουσιανής  $g_p(E)$  δεν εξαρτιόταν από το  $p$  αλλά ήταν σταθερή, τότε θα είχαμε  $A(E)=1 \forall E$ , οπότε θα είχαμε  $h_E(p) = g_p(E) = g_E(p)$ . Επομένως, για το συγκεκριμένο πρόβλημα που μελετούμε, δηλαδή για τη γκαουσιανή  $g_p(E)$ , η  $h_E(p)$  διαφέρει από την  $g_E(p)$  επειδή στο  $\sigma$  της γκαουσιανής υπεισέρχεται η  $p$ . Για τον ίδιο λόγο, η  $h_E(p)$  είναι ασύμμετρη, σε αντίθεση με την  $g_p(E)$ .

Στην εικόνα 1.26(α,β,γ) βλέπουμε την  $g_p(E)$  και την προκύπτουσα  $h_E(p)$ , θεωρώντας τη σχέση (1.77) και με  $\sigma(p) = 0.2 \cdot p$ . Βεβαίως γίνεται χρήση του αποτελέσματος (1.80) και η συμφωνία με την εικόνα 1.25 αποτελεί επιβεβαίωση των θεωρητικών μας συλλογισμών. Α-

ντίστοιχα παραδείγματα για την γκαουσιανή κατανομή (1.73), που πραγματικά μας ενδιαφέρει, φαίνονται στην εικόνα 1.27, και πάλι με  $\sigma(p) = 0.2p$ .



**Εικόνα 1.26:** (α):  $g_p(E)$  για  $\sigma=0.2p$ , για  $p=2$  και  $p=10$ . (β): Η αντίστοιχη  $h_E(p)$  για μετρούμενες «ενέργειες»  $E=2$  και  $E=10$ . (γ): Η σύγκριση των (α) και (β) που δείχνει το ασύμμετρο της  $h_E(p)$ , που για  $\sigma$  αυξανόμενο με το  $p$  εκτείνεται περισσότερο προς  $p$  μεγαλύτερα του  $E$ .

Λόγω της ασυμμετρίας της  $h_E(p)$ , η αναμενόμενη τιμή της  $p$  δεν είναι ίση με την  $E$ . Για παράδειγμα, στην κατανομή του σχήματος 27β με μετρούμενη ενέργεια  $E=10\text{GeV}$ , βρίσκουμε με αριθμητική ολοκλήρωση:

$$\int_0^{+\infty} p \frac{1}{\left( \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}(0.2p)} e^{-\frac{(10-p)^2}{2(0.2p)^2}} dp \right)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}(0.2p)} e^{-\frac{(10-p)^2}{2(0.2p)^2}} dp = 10.85 \text{ GeV} \quad (1.82)$$

Ας επανέλθουμε τώρα στο ζητούμενο, το οποίο είναι να υπολογίσουμε τη μορφή του ταλαντωμένου φάσματος δεδομένης της ανακρίβειας της μετρήσεως της ενέργειας των νετρίνων. Σύμφωνα με όλη την παραπάνω μαθηματική διαδικασία, καταλήγουμε στο ότι η σχέση (1.74) πρέπει να γραφτεί:

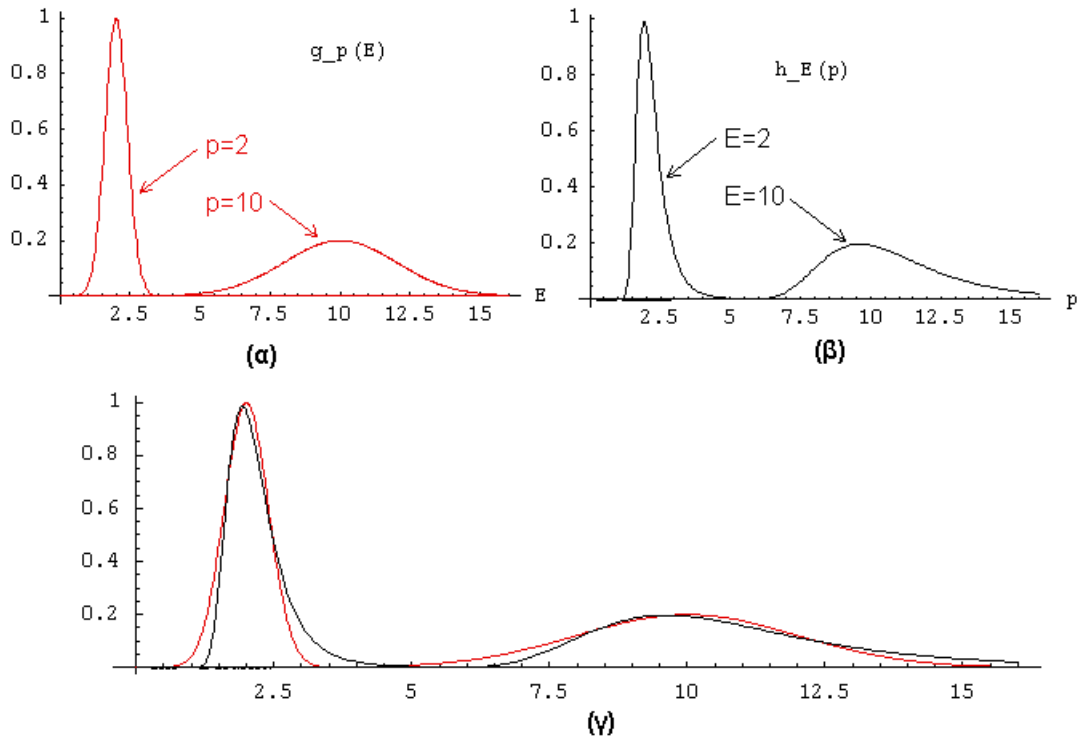
$$P(E) = \int_0^{+\infty} \frac{g_p(E)}{\int_0^{+\infty} g_p(E) dp} P_{(p)}^{\alpha \rightarrow \alpha} dp \quad (1.83)$$

όπου η  $g_p(E)$  δίδεται από τη σχέση (1.73) και η  $P_{(p)}^{\alpha \rightarrow \alpha}$  είναι η υπό εξέταση πιθανότητα επιβίωσης. Αν μιλάμε για  $\nu_\mu$  στον μακρινό ανιχνευτή, τότε η  $P_{(p)}^{\alpha \rightarrow \alpha}$  είναι η (1.59) με  $L=735\text{Km}$ .

Ομως, για να βρούμε το ταλαντωμένο φάσμα δεν αρκεί να κάνουμε convolution της  $P_{\mu \rightarrow \mu}(p)$  με την  $h_E(p)$ , διότι υπάρχει αβεβαιότητα και ως προς το  $p$  που υπεισέρχεται στο φάσμα  $f(p)$  της σχέσεως (1.71). Αν γνωρίζαμε με απόλυτη ακρίβεια την  $p$ , τότε η πιθανότητα που θα είχε

ένα  $\nu_\mu$  να έχει υπάρξει και να έχει επιβιώσει θα ήταν  $f(p) \cdot P_{\mu \rightarrow \mu}(p)$ . Τώρα που υπάρχει η μετρούμενη  $E$ , η πιθανότητα να έχει υπάρξει και να έχει επιβιώσει ένα νεutrino μετρούμενης ενέργειας  $E$  είναι:

$$f'(E) = \int_0^{+\infty} \frac{g_p(E)}{\int_0^{+\infty} g_p(E) dp} P_{(p)}^{\mu \rightarrow \mu} f(p) dp \quad (1.84)$$



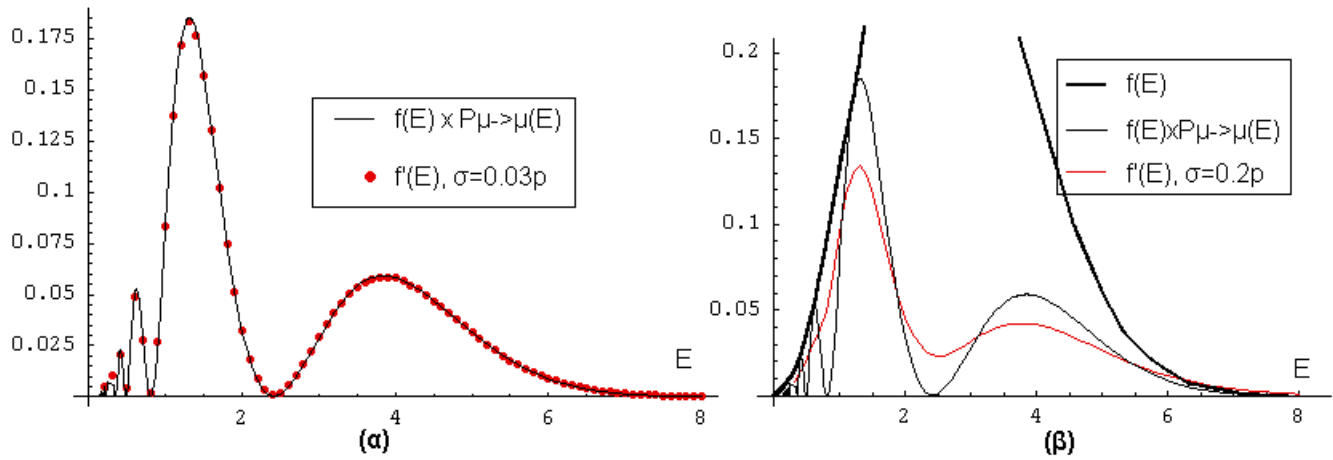
**Εικόνα 1.27:** (α):  $g_p(E)$  για  $\sigma=0.2p$ , για  $p=2$  και  $p=10$ . (β): Η αντίστοιχη  $h_E(p)$  για μετρούμενες «ενέργειες»  $E=2$  και  $E=10$ . (γ): Η σύγκριση των (α) και (β) που δείχνει το ασύμμετρο της  $h_E(p)$ , που για  $\sigma$  αυξανόμενο με το  $p$  εκτείνεται περισσότερο προς  $p$  μεγαλύτερα του  $E$

Η δυσκολία τώρα είναι ότι ο υπολογισμός της  $f'(E)$  σε κάθε  $E$  περιλαμβάνει τον υπολογισμό δύο ολοκληρωμάτων που δεν είναι αναλυτικά υπολογίσιμα, όπως φαίνεται στη σχέση (1.84). Προκειμένου να ξεπεράσουμε αυτό το πρόβλημα κατασκευάσαμε ένα πρόγραμμα που εκμεταλλεύεται τις βιβλιοθήκες του πακέτου MATHEMATICA 4.0 και υπολογίζει τα ολοκληρώματα αυτά αριθμητικά. Επιστρατεύοντας ορισμένες βελτιώσεις στον αλγόριθμο για να κάνουμε τους υπολογισμούς όσο γίνεται γρηγορότερους και ακριβέστερους, καταλήξαμε στα φάσματα της εικόνας 1.28.

Παρατηρούμε στην εικόνα 1.28α ότι για μικρό  $\sigma(p)/p$  έχουμε σχεδόν απόλυτη ταύτιση του μετρούμενου φάσματος με το θεωρητικά προβλεπόμενο. Αυτό είναι λογικό εφόσον θεωρούμε ότι η διακριτική ικανότητα που έχουμε στην ενέργεια των νετρίνων είναι σχεδόν τέλεια, δηλαδή  $p \cong E$ . Μόνο σε πολύ μικρές ενέργειες,  $E < 0.5 \text{ GeV}$  έχουμε ανακριβή μέτρηση.

Στην εικόνα 1.28β, όπου έχουμε θεωρήσει  $\sigma(p)/p = 0.2$ , δηλαδή αρκετά μεγάλο, έχουμε σημαντική απόκλιση του πειραματικού φάσματος από το θεωρητικό. Μάλιστα, αλλάζει και η ενέργεια στην οποία παρατηρούμε τοπικά ακρότατα, γεγονός που αναμένεται να δυσχεράνει τον προσδιορισμό του  $\Delta m_{32}^2$ . Τέλος, παρατηρούμε ότι για  $E > 6.5 \text{ GeV}$  το πειραματικό φάσμα ξεπερνά σε ύψος και το αρχικό ακόμα φάσμα που είχαμε στον κοντινό ανιχνευτή. Η τιμή  $6.5 \text{ GeV}$  δεν πρέπει να λαμβάνεται κατά κυριολεξία υπ' όψη, εφόσον το φάσμα  $f(p)$  που έχουμε θεωρήσει δεν είναι ακριβώς ίδιο με αυτό που θα έχουμε στο πείραμα. Από αυτό το υπολογιστικό μοντέλο πάντως εξάγεται το συμπέρασμα ότι είναι δυνατόν, για μεγάλα  $\sigma/E$ , να παρατηρηθεί και αυτό το ανώμαλο φαινόμενο. Δεν πρέπει να μας παραξενεύει, εφόσον όταν

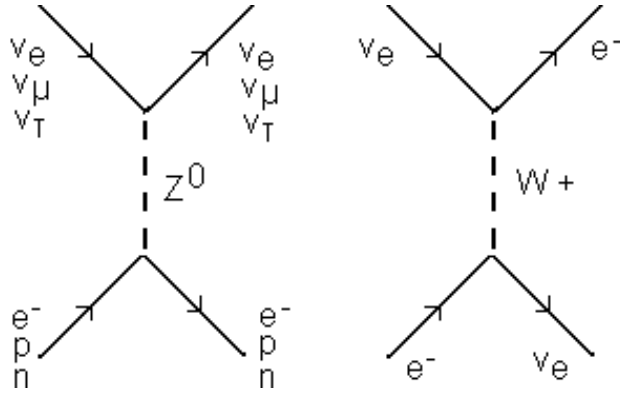
υπείσρχονται αβεβαιότητες στις μετρήσεις, αυτές μπορεί να φαίνεται να λαμβάνουν και εξωπραγματικές τιμές.



**Εικόνα 1.28:** (α): Σύγκριση του θεωρητικού και του πειραματικού ταλαντωμένου φάσματος για  $\sigma(p)=0.03p$ . (β): Σύγκριση του αρχικού ενεργειακού φάσματος, του θεωρητικά υπολογισμένου ταλαντωμένου και αυτού που θα παρατηρούσαμε με  $\sigma(p)=0.2p$ .

### Ταλαντώσεις νετρίνων παρουσία ύλης

Όσα αναλύσαμε μέχρι εδώ αφορούσαν τις ταλαντώσεις νετρίνων εν κενώ. Όμως, στην



Εικόνα 1.29: Σκεδάσεις νετρίνων στην ύλη

πράξη τα νετρίνα αλληλεπιδρούν με την ύλη, έστω και ασθενέστατα, μέχρι να παρατηρηθούν από εμάς. Για παράδειγμα, τα ηλιακά νετρίνα, από το σημείο δημιουργίας τους μέχρι να φτάσουν στη Γη, διασχίζουν τον πελώριο Ήλιο. Όπως θα δείξουμε αναλυτικά στη συνέχεια, η αλληλεπίδραση αυτή έχει ως αποτέλεσμα να μεταβάλλονται οι πιθανότητες των διαφόρων ταλαντώσεων, πολλές φορές δραματικά.

Στη συνήθη κατάσταση της ύλης υπάρχουν πρωτόνια, νετρόνια και ηλεκτρόνια. Μάλιστα, συνήθως τα

πρωτόνια και τα νετρόνια είναι περίπου ισάριθμα (με εξαίρεση τα πολύ ασταθή ισότοπα και τους πολύ ελαφρούς πυρήνες), ενώ δεδομένης της ηλεκτρικής ουδετερότητας της ύλης γνωρίζουμε ότι και τα ηλεκτρόνια είναι ισάριθμα με τα πρωτόνια. Και τα τρία flavors νετρίνων ( $\nu_e, \nu_\tau, \nu_\mu$ ) μπορούν να αλληλεπιδράσουν και με τα τρία αυτά μέρη της ύλης μέσω ανταλλαγής  $Z^0$  (neutral current). Μόνο το  $\nu_e$ , όμως, έχει την τύχη να μπορεί να αλληλεπιδρά με τη συνήθη ύλη κατά έναν επιπλέον τρόπο: μέσω ανταλλαγής  $W^+$  με τα ηλεκτρόνια (charge current). Αυτή η ασυμμετρία εκφράζεται ως μια διαταραχή στη hamiltonian, όπως θα δούμε, που έχει αντίκτυπο στις πιθανότητες ταλάντωσης.

Η hamiltonian της CC (=charge current) αλληλεπίδρασης σε χαμηλές ενέργειες νετρίνων είναι:

$$H_{CC} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{e}\gamma_\mu (1-\gamma_5) \nu_e] [\bar{\nu}_e \gamma^\mu (1-\gamma_5) e] \tag{1.85}$$

$$= \frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{e}\gamma_\mu (1-\gamma_5) e] [\bar{\nu}_e \gamma^\mu (1-\gamma_5) \nu_e]$$

Για να εκφράσουμε την hamiltonian αυτήν ως συνάρτηση μόνο της κυματοσυνάρτησης  $\nu_e$ , ολοκληρώνουμε ως προς τις παραμέτρους που αναφέρονται στο ηλεκτρόνιο. Έτσι υπολογίζουμε το επιπλέον δυναμικό που συναντά το  $\nu_e$  λόγω της CC αλληλεπίδρασής του:

$$H_{\text{eff}}(\nu_e) = \langle H_{CC} \rangle_{\text{electron}} \equiv \bar{\nu}_e V_e \nu_e \tag{1.86}$$

Ισχύουν οι εκφράσεις:

$$\langle \bar{e}\gamma_0 e \rangle = \langle e^\dagger e \rangle = N_e, \quad \langle \bar{e}\gamma e \rangle = \langle v_e \rangle, \quad \langle \bar{e}\gamma_0 \gamma_5 e \rangle = \left\langle \frac{\sigma_e \mathbf{p}_e}{E_e} \right\rangle, \quad \langle \bar{e}\gamma_5 e \rangle = \langle \sigma_e \rangle \tag{1.87}$$

όπου  $N_e$  συμβολίζουμε τη συγκέντρωση των ηλεκτρονίων, δηλαδή το πλήθος των ηλεκτρονίων ανά μονάδα όγκου. Στο σύστημα φυσικών μονάδων μπορούμε να εκφράσουμε αυτήν τη συγκέντρωση σε  $\text{GeV}^3$ . Εφόσον αντιστοιχεί  $1\text{m}=5.07 \times 10^{15} \text{GeV}^{-1}$ , έπεται ότι:

$$1\text{GeV}^3 = 1.3 \times 10^{47} \text{m}^{-3} \tag{1.88}$$

Από τις (1.87), (1.86) και (1.85) προκύπτει ότι:

$$(V_e)_{CC} \equiv V_{CC} = \sqrt{2} G_F N_e \tag{1.89}$$

Κατ' ανάλογο τρόπο, από τις αντίστοιχες hamiltonians, μπορεί κανείς να εξάγει το δυναμικό που επάγεται από τις NC (=neutral current) αλληλεπιδράσεις. Όπως είπαμε, οι NC αλληλεπιδράσεις είναι ίδιες και για τις τρεις γεύσεις νετρίνων. Επίσης, το ότι στην ηλεκτρικά



ουδέτερη ύλη το πλήθος των πρωτονίων είναι ίσο με το πλήθος των ηλεκτρονίων έχει ως αποτέλεσμα να αλληλεξουδετερώνονται τα αντίστοιχα  $V_{NC}$  και να απομένει μόνο το  $V_{NC}$  που προέρχεται από τις αλληλεπιδράσεις με τα νετρόνια  $n$ . Ο υπολογισμός, λοιπόν του  $V_{NC}$  ισοδυναμεί με τον υπολογισμό του δυναμικού που επάγεται από την παρουσία των νετρίνων, που υπολογίζεται ίσο με  $V_{NC} = -G_F N_n / \sqrt{2}$ , όπου  $N_n$  η συγκέντρωση των νετρίνων στην ύλη. Συνοψίζοντας, λοιπόν, τα δυναμικά που επάγονται λόγω της παρουσίας της ύλης έχουμε:

$$V_e = \sqrt{2}G_F \left( N_e - \frac{N_n}{2} \right), \quad V_\mu = V_\tau = \sqrt{2}G_F \left( -\frac{N_n}{2} \right) \quad (1.90)$$

Για να υπολογίσουμε πιθανότητες ταλάντωσης χρειαζόμαστε την εξίσωση χρονικής εξέλιξης στην οποία υπακούει ένα νεutrino. Στην περίπτωση του κενού ήταν βολικότερο να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση χρονικής εξέλιξης εκπεφρασμένη στην ιδιοβάση μάζας. Τώρα όμως, επειδή τα δυναμικά (1.90) αναφέρονται σε flavors και όχι σε μάζες, είναι απαραίτητο να υπολογίσουμε την εξίσωση χρονικής εξέλιξης στην ιδιοβάση γεύσης. Αυτό, όμως, δεν είναι καθόλου δύσκολο:

Η εξίσωση χρονικής εξέλιξης εν κενώ, στην ιδιοβάση μάζας είναι:

$$i \frac{\partial}{\partial t} |v\rangle_m = H_m |v\rangle_m \quad (1.91)$$

ενώ στην ιδιοβάση γεύσης είναι:

$$i \frac{\partial}{\partial t} |v\rangle_f = H_f |v\rangle_f \quad (1.92)$$

Η μίξη γεύσεων και μαζών μπορεί<sup>1</sup> να γραφτεί:

$$|v_\alpha\rangle_f = \sum_i U_{\alpha i} |v_i\rangle_m \quad (1.93)$$

Επομένως, κάνουμε τις πράξεις:

$$\begin{aligned} |v\rangle_f = U |v\rangle_m &\Rightarrow |v\rangle_m = U^{-1} |v\rangle_f = U^\dagger |v\rangle_f \\ (1.91) \Rightarrow i \frac{\partial}{\partial t} U^\dagger |v\rangle_f &= H_m U^\dagger |v\rangle_f \Rightarrow \\ i \frac{\partial}{\partial t} |v\rangle_f &= (U H_m U^\dagger) |v\rangle_f \end{aligned} \quad (1.94)$$

Οπότε, από τις (1.94) και (1.92) συμπεραίνουμε ότι:

$$H_f = U H_m U^\dagger \quad (1.95)$$

<sup>1</sup> Η (1.93) φαίνεται να διαφέρει από την (1.10), όμως από την (1.6) φαίνεται ότι και οι δύο συμβάσεις είναι εξίσου σωστές. Η μόνη διαφορά θα είναι στο πρόσημο της φάσης  $\delta$ .

## Ταλαντώσεις δύο γεύσεων στην ύλη

Η απλούστερη περίπτωση που μπορούμε να μελετήσουμε αναλυτικά είναι όταν περιοριζόμαστε σε 2 μόνο γενεές νετρίνων στην ύλη.

Γνωρίζουμε ότι για κάθε ιδιοκατάσταση μάζας, η ενέργεια δίνεται από τη σχέση (1.3) και στην ιδιοβάση μάζας η hamiltonian είναι  $H_m = \text{diag}\{E_1, E_2\}$ . Επομένως, από την (1.95) έχουμε:

$$H_f = \begin{pmatrix} \cos \theta_0 & \sin \theta_0 \\ -\sin \theta_0 & \cos \theta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_0 & -\sin \theta_0 \\ \sin \theta_0 & \cos \theta_0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \quad (1.96)$$

$$= \begin{pmatrix} c^2 E_1 + s^2 E_2 & -cs(E_1 - E_2) \\ cs(E_2 - E_1) & s^2 E_1 + c^2 E_2 \end{pmatrix}$$

Λόγω της ταυτότητας  $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2 \theta = 2\cos^2 \theta - 1$  και της (1.3) έχουμε:

$$H_f = \begin{pmatrix} \left( p + \frac{m_1^2 + m_2^2}{4E} \right) - \frac{\Delta m^2}{4E} \cos 2\theta_0 & \frac{\Delta m^2}{4E} \sin 2\theta_0 \\ \frac{\Delta m^2}{4E} \sin 2\theta_0 & \left( p + \frac{m_1^2 + m_2^2}{4E} \right) + \frac{\Delta m^2}{4E} \cos 2\theta_0 \end{pmatrix} \quad (1.97)$$

Επομένως, για 2 γενεές, η εξίσωση χρονικής εξέλιξης είναι:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left( p + \frac{m_1^2 + m_2^2}{4E} \right) - \frac{\Delta m^2}{4E} \cos 2\theta_0 & \frac{\Delta m^2}{4E} \sin 2\theta_0 \\ \frac{\Delta m^2}{4E} \sin 2\theta_0 & \left( p + \frac{m_1^2 + m_2^2}{4E} \right) + \frac{\Delta m^2}{4E} \cos 2\theta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} \quad (1.98)$$

που δεν είναι παρά ένα σύστημα δύο διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης.

Ως γνωστόν, για να επιλύσουμε αυτό το σύστημα, ονομάζουμε  $\mathbf{X}$  το άνυσμα  $(\nu_e, \nu_\mu)$  και η (1.98) γράφεται:  $i\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{H}\mathbf{X}$ . Αναζητώντας λύσεις της μορφής  $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 \exp(i\lambda t)$  αντικαθιστούμε και έχουμε:

$$-\lambda \mathbf{X}_0 = \mathbf{H}\mathbf{X}_0 \Rightarrow (\mathbf{H} + \lambda \mathbf{I})\mathbf{X}_0 = 0 \quad (1.99)$$

Για να λύσουμε αυτήν την εξίσωση και να βρούμε τους όρους  $\lambda$  πρέπει να λύσουμε την εξίσωση:

$$\det[\mathbf{H} + \lambda \mathbf{I}] = 0 \quad (1.100)$$

Έστω, τώρα ότι ο πίνακας  $\mathbf{H}$  μπορεί να γραφτεί στη μορφή:

$$\mathbf{H} = \tilde{\mathbf{H}} + \alpha \mathbf{I}, \quad \alpha = \text{σταθερά} \quad (1.101)$$

Τότε, η (1.100) γράφεται:

$$\det[\tilde{\mathbf{H}} + (\lambda + \alpha)\mathbf{I}] = 0 \quad (1.102)$$

Δηλαδή, οι ιδιοτιμές του  $\mathbf{H}$  διαφέρουν απ' τις ιδιοτιμές του  $\tilde{\mathbf{H}}$  μόνο κατά μια σταθερά, την  $\alpha$ , αν αυτή η σταθερά επαναλαμβάνεται στα στοιχεία της διαγωνίου του  $\mathbf{H}$ . Επομένως, οι λύσεις της διαφορικής  $i\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{H}\mathbf{X}$  δε διαφέρουν από τις λύσεις της  $i\dot{\mathbf{X}} = \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{X}$  παρά μόνο κατά μια σταθερή διαφορά στη συχνότητα:  $\mathbf{X}_0 \exp(i\lambda t)$  και  $\mathbf{X}_0 \exp(i\lambda t + i\alpha t)$ .

Ο λόγος που αναφέρουμε όλα αυτά είναι ότι στον πίνακα  $H_f$  διακρίνουμε στα στοιχεία της διαγωνίου τον σταθερό προσθετέο  $\left( p + \frac{m_1^2 + m_2^2}{4E} \right)$ , που παίζει το ρόλο της σταθεράς  $\alpha$  που

αναφέραμε. Το συμπέρασμα είναι ότι μπορούμε να παραλείψουμε αυτούς τους όρους και να λύσουμε την εξίσωση χρονικής εξέλιξης με μια απλούστερη hamiltonian. Ο λόγος είναι ότι, όπως δείξαμε, αν αφήσουμε τον όρο  $\alpha$  στη hamiltonian θα βρούμε λύσεις  $\nu$ , ενώ αν τον παραλείψουμε θα βρούμε λύσεις  $\tilde{\nu} = \nu \exp(i\alpha t)$ , που ως προς τις ταλαντώσεις των νετρίνων είναι ισοδύναμες, εφόσον  $|\tilde{\nu}| = |\nu \exp(i\alpha t)| = |\nu|$ .

Επομένως, αντί για την (1.98), αρκεί να λύσουμε την εξίσωση:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A & B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix}, \quad A \equiv \frac{\Delta m^2}{4E} \cos 2\theta_0, \quad B \equiv \frac{\Delta m^2}{4E} \sin 2\theta_0 \quad (1.103)$$

Ακόμα, όμως, δεν έχουμε εισάγει τα δυναμικά που επάγονται παρουσία της ύλης. Για να το κάνουμε αυτό πρέπει να προσθέσουμε τα δυναμικά  $V_e$  και  $V_\mu$  της (1.90) στη διαγώνιο του πίνακα  $H_f$ . Οι όροι που είναι ανάλογοι της  $N_n$  είναι ίδιοι, οπότε μπορούν να παραληφθούν, όπως παραλείψαμε και τους όρους  $\left(p + \frac{m_1^2 + m_2^2}{4E}\right)$ . Ο όρος που απομένει είναι ο

$$\sqrt{2}G_F N_e \equiv M: \quad i \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A+M & B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} \quad (1.104)$$

Στην απλούστερη περίπτωση όπου το  $N_e$  είναι σταθερό, δηλαδή το νεutrino διασχίζει ένα ομογενές κομμάτι ύλης, το σύστημα (1.104) μπορεί να επιλυθεί αναλυτικά, διαγωνιοποιώντας τον πίνακα  $H = \begin{pmatrix} -A+M & B \\ B & A \end{pmatrix}$ . Για να τον διαγωνιοποιήσουμε πρέπει να βρούμε έναν κα-

τάλληλο πίνακα  $T$ , τέτοιο ώστε  $H = T^{-1}H_M T$ , όπου  $H_M = \begin{pmatrix} E_A & 0 \\ 0 & E_B \end{pmatrix}$ . Με άλλα λόγια, πρέπει

να κάνουμε μια κατάλληλη αλλαγή βάσης, ώστε στη νέα βάση ο  $H$  να εμφανίζεται με τη διαγωνιοποιημένη μορφή  $H_M$ , όπου  $E_A$  και  $E_B$  είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα  $H$ . Όπως μας διδάσκουν τα μαθηματικά ο πίνακας  $T$  βρίσκεται αν συνενώσουμε σαν στήλες τα ιδιοανύσματα του πίνακα  $H$ . Ας υπολογίσουμε, λοιπόν, τις ιδιοτιμές και τα ιδιοανύσματα του  $H$ :

$$\det[H - \lambda I] = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -A+M-\lambda & B \\ B & A-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - M\lambda + AM - A^2 - B^2 = 0 \quad (1.105)$$

$$\Rightarrow \lambda = \lambda_{1,2} = \frac{M \pm \sqrt{M^2 + 4(A^2 + B^2 - AM)}}{2} \quad (1.106)$$

Γνωρίζοντας τώρα τις ιδιοτιμές  $\lambda_{1,2}$  του  $H$  πάμε να βρούμε τα ιδιοανύσματά του:

$$\begin{pmatrix} -A+M & B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \Rightarrow \beta = \frac{B}{\lambda - A} \alpha$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \frac{B}{\lambda - A} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Normalization}} \alpha^2 \left( 1 + \left( \frac{B}{\lambda - A} \right)^2 \right) = 1$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}_{1,2} = \begin{pmatrix} |\lambda_{1,2} - A| / \sqrt{(\lambda_{1,2} - A)^2 + B^2} \\ B / \sqrt{(\lambda_{1,2} - A)^2 + B^2} \end{pmatrix} \quad (1.107)$$

Επομένως, ο πίνακας  $T$  που εκτελεί το μετασχηματισμό ομοιότητας είναι:

$$T = \begin{pmatrix} |\lambda_1 - A| / \sqrt{(\lambda_1 - A)^2 + B^2} & |\lambda_2 - A| / \sqrt{(\lambda_2 - A)^2 + B^2} \\ B / \sqrt{(\lambda_1 - A)^2 + B^2} & B / \sqrt{(\lambda_2 - A)^2 + B^2} \end{pmatrix} \quad (1.108)$$

Εφόσον ο  $T$  αποτελεί πίνακα στροφής, αναμένουμε να ισχύει  $T^T T = T T^T = I$ . Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες:

$$\lambda_1 \lambda_2 = AM - A^2 - B^2, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = M \quad (1.109)$$

είναι εύκολο να αποδείξει κανείς ότι πράγματι,  $T^T = T^{-1}$ . Ακόμα, αποδεικνύεται εύκολα ότι  $\det T = +1$ . Επίσης, είναι τετριμμένα απλό το να αποδείξει κανείς πως ο  $T$  που βρήκαμε ικανοποιεί, όπως αναμένεται εκ κατασκευής, τη σχέση ομοιότητας:

$$\begin{pmatrix} -A+M & B \\ B & A \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} T \quad (1.110)$$

Επομένως, μπορούμε να γράψουμε στη νέα βάση τη σχέση (1.104) ως εξής:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} v_e \\ v_\mu \end{pmatrix} &= T^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} T \begin{pmatrix} v_e \\ v_\mu \end{pmatrix} \Rightarrow \\ i \frac{\partial}{\partial t} T \begin{pmatrix} v_e \\ v_\mu \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} T \begin{pmatrix} v_e \\ v_\mu \end{pmatrix} \\ \Rightarrow i \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} v_A \\ v_B \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} E_A & 0 \\ 0 & E_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_A \\ v_B \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.111)$$

$$\text{όπου} \quad E_A = \lambda_1, \quad E_B = \lambda_2, \quad \begin{pmatrix} v_A \\ v_B \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} v_e \\ v_\mu \end{pmatrix} \quad (1.112)$$

Εφόσον ο  $T$  είναι unitary και έχει ορίζουσα +1 αποτελεί στροφή και μπορεί να παραμετροποιηθεί στη μορφή:

$$T = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (1.113)$$

Επομένως, οι νέες συντεταγμένες  $v_{A,B}$  σχετίζονται με τις παλιές  $v_{e,\mu}$  ως εξής:

$$\begin{cases} v_A = \cos \theta v_e + \sin \theta v_\mu \\ v_B = -\sin \theta v_e + \cos \theta v_\mu \end{cases} \quad (1.114)$$

Συγκρίνοντας τις (1.113) και (1.108) συμπεραίνουμε ότι:

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta &= \lambda_1 - A / \sqrt{(\lambda_1 - A)^2 + B^2} \\ \sin \theta &= -B / \sqrt{(\lambda_1 - A)^2 + B^2} \end{aligned} \right\} \tan \theta = -\frac{B}{\lambda_1 - A} \quad (1.115)$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{2B(\lambda_1 - A)}{(\lambda_1 - A)^2 - B^2} \quad (1.116)$$

Δεδομένου ότι το  $\lambda_1$  επαληθεύει το τριώνυμο (1.105), είναι εύκολο να δειχθεί ότι:

$$\tan 2\theta = \frac{2B}{2A - M} = \frac{\frac{\Delta m^2}{2E} \sin 2\theta_0}{\frac{\Delta m^2}{2E} \cos 2\theta_0 - \sqrt{2} G_F N_e} \quad (1.117)$$

Λόγω του  $N_e > 0 \Rightarrow \theta \neq \theta_0$ , οπότε  $v_{A,B} \neq v_{1,2}$ , ενώ για  $N_e = 0$ , δηλαδή στο κενό, πράγματι  $v_{A,B} = v_{1,2}$ .

Στην ύλη, η διαφορά των ιδιοτιμών  $\lambda_1 - \lambda_2$  είναι:

$$\lambda_1 - \lambda_2 = E_A - E_B = \sqrt{\left( \frac{\Delta m^2}{2E} \cos 2\theta_0 - \sqrt{2} G_F N_e \right)^2 + \left( \frac{\Delta m^2}{2E} \right)^2 \sin^2 2\theta_0} \quad (1.118)$$

Στην περίπτωση του κενού, δηλαδή για  $N_e = 0$ , παίρνουμε  $E_A - E_B = \frac{\Delta m^2}{2E}$ .

Αντιλαμβανόμαστε, λοιπόν, ότι μπορούμε να χειρισθούμε τα  $v_{A,B}$  κατά τον ίδιο τρόπο που χειρισθήκαμε τα  $v_{1,2}$  στην περίπτωση του κενού, μόνο που τώρα η γωνία μίξης δεν είναι η  $\theta_0$  (δηλαδή η  $\theta$  που γράφουμε στη σχέση (1.32)) αλλά το  $\theta$  που υπολογίζεται από τη σχέση

(1.117). Επίσης, αντί για τον όρο  $\frac{\Delta m^2}{2E}$  πρέπει να χρησιμοποιούμε το δεξιό μέλος της σχέσης (1.118). Επομένως, σε αντιστοιχία με την (1.36),

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu} = P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_e} = \frac{1}{2} \sin^2 2\theta \left( 1 - \cos 2\pi \frac{L}{L_m} \right) = \sin^2 (2\theta) \sin^2 \left( \pi \frac{L}{L_m} \right) \quad (1.119)$$

όπου 
$$L_m = \frac{2\pi}{E_A - E_B} \hbar c = \frac{2\pi \hbar c}{\sqrt{\left( \frac{\Delta m^2}{2E} \cos 2\theta_0 - \sqrt{2} G_F N_e \right)^2 + \left( \frac{\Delta m^2}{2E} \right)^2 \sin^2 2\theta_0}} \quad (1.120)$$

και 
$$\sin^2 2\theta = \frac{\tan^2 2\theta}{1 + \tan^2 2\theta} = \frac{(2B/(2A-M))^2}{1 + (2B/(2A-M))^2} = \frac{(2B)^2}{(2A-M)^2 + (2B)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin^2 2\theta = \frac{\left( \frac{\Delta m^2}{2E} \right)^2 \sin^2 2\theta_0}{\left( \frac{\Delta m^2}{2E} \cos 2\theta_0 - \sqrt{2} G_F N_e \right)^2 + \left( \frac{\Delta m^2}{2E} \right)^2 \sin^2 2\theta_0} \quad (1.121)$$

Για να γίνουν πιο εύχρηστες αυτές οι σχέσεις αντικαθιστούμε τις τιμές των φυσικών σταθερών και μετά από ορισμένες πράξεις καταλήγουμε ότι:

$$L_m = \frac{1.2397 \text{ Km}}{\sqrt{\left( \frac{\Delta m^2_{(\text{eV}^2)}}{2E_{(\text{GeV})}} \cos 2\theta_0 - 7.638 \times 10^{-11} \frac{N_{e(m^{-3})}}{N_{Av}} \right)^2 + \left( \frac{\Delta m^2_{(\text{eV}^2)}}{2E_{(\text{GeV})}} \right)^2 \sin^2 2\theta_0}} \quad (1.122)$$

$$\sin^2 2\theta = \frac{\left( \frac{\Delta m^2_{(\text{eV}^2)}}{2E_{(\text{GeV})}} \right)^2 \sin^2 2\theta_0}{\left( \frac{\Delta m^2_{(\text{eV}^2)}}{2E_{(\text{GeV})}} \cos 2\theta_0 - 7.638 \times 10^{-11} \frac{N_{e(m^{-3})}}{N_{Av}} \right)^2 + \left( \frac{\Delta m^2_{(\text{eV}^2)}}{2E_{(\text{GeV})}} \right)^2 \sin^2 2\theta_0} \quad (1.123)$$

όπου  $N_{Av} = \text{o αριθμός Avogadro} = 6.023 \cdot 10^{23}$ .

Παρατηρούμε στην (1.123) ότι υπάρχει περίπτωση το  $\sin^2 2\theta$  να γίνει ίσο με μονάδα, δηλαδή  $\theta = 45^\circ$ , δηλαδή να έχουμε μέγιστο πλάτος ταλάντωσης, ανεξάρτητα του  $\theta_0$ . Αυτός ο συντονισμός είναι ένα φαινόμενο γνωστό ως *MSW effect*, κατά το οποίο η παρουσία ύλης εξισώνει με τη μονάδα την μέγιστη πιθανότητα ταλάντωσης, ανεξαρτήτως του πόση είναι η μέγιστη πιθανότητα ταλάντωσης στο κενό (εκτός αν  $\theta_0 = 0$ , οπότε  $\theta = 0 \forall N_e$ ). Η *συνθήκη συντονισμού* είναι:

$$\sqrt{2} G_F N_e = \frac{\Delta m^2}{2E} \cos 2\theta_0 \quad (1.124)$$

Θέτουμε στην (1.124) αριθμούς και βρίσκουμε την ακόλουθη έκφραση για το  $N_e$  συντονισμού, το οποίο συμβολίζουμε  $N_{e, \text{res}}$ :

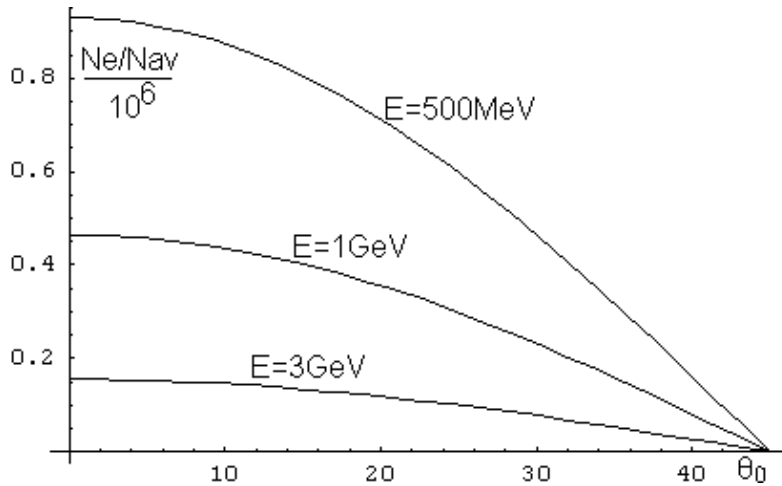
$$\begin{aligned}
N_{e, \text{res}} &= \frac{\frac{\Delta m^2_{(\text{eV}^2)} 10^{-18} \cos(2\theta_0)}{2E_{(\text{GeV})}}}{\sqrt{2} \times 1.166 \times 10^{-5}} \text{GeV}^3 \\
&= \frac{\Delta m^2_{(\text{eV}^2)} \cos(2\theta_0)}{2E_{(\text{GeV})}} \times 6.064 \times 10^{-14} \times 1.3 \times 10^{47} \text{m}^{-3} \\
&= \frac{\Delta m^2_{(\text{eV}^2)} \cos(2\theta_0)}{2E_{(\text{GeV})}} \times 7.884 \times 10^{33} \text{m}^{-3} \\
\Rightarrow \frac{N_{e, \text{res}}}{N_{\text{Av}}} &= \frac{\Delta m^2_{(\text{eV}^2)} \cos(2\theta_0)}{2E_{(\text{GeV})}} \times 1.309 \times 10^{10} \text{m}^{-3} \quad (1.125)
\end{aligned}$$

Για να έχουμε μια καλύτερη αντίληψη για την  $N_e$  θα εξάγουμε μια έκφραση που τη σχετίζει με ιδιότητες της ύλης, όπως η πυκνότητα και ο ατομικός αριθμός:

Σε ένα δείγμα ύλης πυκνότητας  $\rho(\text{gr/ml})$  και ατομικού αριθμού  $Z$ , η συγκέντρωση των ηλεκτρονίων είναι:

$$\begin{aligned}
N_e &= \frac{Z \cdot \text{πληθος πυρηνων}}{\text{ογκος}} = \frac{Z \cdot \frac{\text{μαζα}}{\text{μαζα πυρηνα}}}{\text{ογκος}} \\
&= \frac{Z \cdot \rho}{\text{μαζα πυρηνα}} = Z\rho \frac{N_{\text{Av}}}{AB \text{ gr}} \\
\Rightarrow \frac{N_e}{N_{\text{Av}}} &= \frac{Z\rho_{(\text{gr/ml})} \text{gr/ml}}{AB \text{ gr}} = \frac{Z\rho_{(\text{gr/ml})}}{AB} \text{cm}^{-3} = 10^6 \frac{Z\rho_{(\text{gr/ml})}}{AB} \text{m}^{-3} \quad (1.126)
\end{aligned}$$

Για παράδειγμα, αν πάρουμε ένα κομμάτι σιδήρου (Fe) πυκνότητας  $\rho=7.87\text{gr/cm}^3$ ,  $AB=55.845$  και  $Z=26$  έχουμε  $N_e/N_{\text{Av}} = 3.66 \times 10^6 \text{m}^{-3}$ . Για τον άργιλο (Al), βασικό συστατικό



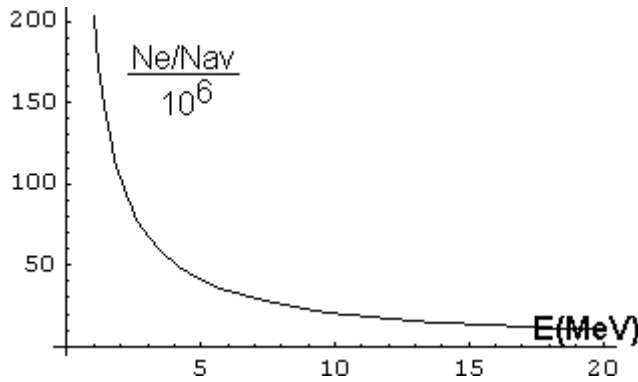
**Εικόνα 1.30:**  $N_e$  συντονισμού συναρτήσει της  $\theta_0$  για τρεις διαφορετικές ενέργειες, με  $\Delta m^2=7.1 \times 10^{-5} \text{eV}^2$

του εδάφους, το αντίστοιχο αποτέλεσμα είναι  $1.3 \times 10^6 \text{m}^{-3}$ .

Ας θεωρήσουμε  $\Delta m^2 = 7.1 \times 10^{-5} \text{eV}^2$ . Τότε, η (1.125) μπορεί να απεικονισθεί ως συνάρτηση της γωνίας  $\theta_0$ , με παράμετρο την ενέργεια  $E$  των νετρίνων. Έτσι, παίρνουμε την εικόνα 1.30. Βλέπουμε ότι η  $N_{e, \text{res}}$  είναι συνήθως μικρότερη από αυτήν στον άργιλο, με εξαίρεση τις μικρές ενέργειες σε συνδυασμό με μικρές  $\theta_0$ . Αν και δεν

έχουμε λάβει υπόψη τρεις γεύσεις νετρίνων, μπορούμε να θεωρήσουμε ενδεικτικά  $\theta_0=\theta_{12}\approx 32^\circ$  οπότε η  $N_{e, \text{res}}$  παίρνει τιμές μικρές σε σχέση με αυτές στη συνήθη στερεά ύλη.

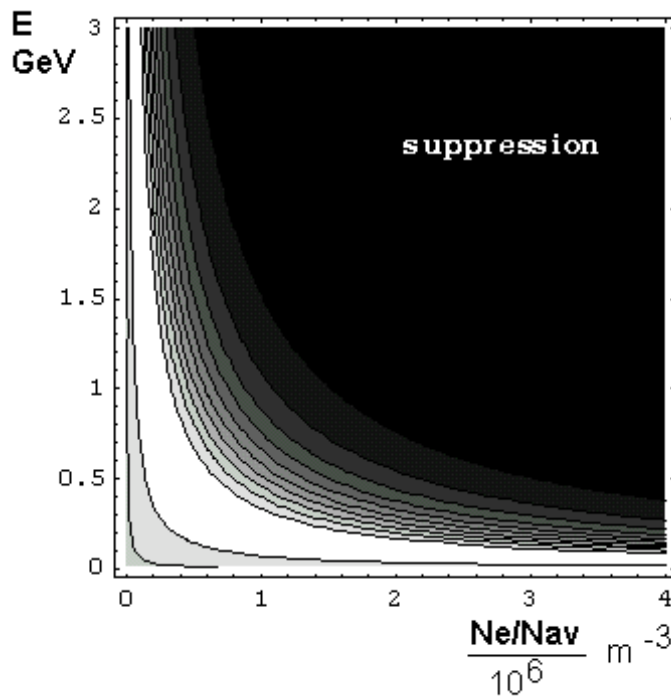
Στην εικόνα 1.31 έχουμε σταθεροποιήσει τη γωνία  $\theta_0=32^\circ$  και τη μάζα  $\Delta m^2 = 7.1 \times 10^{-5} \text{eV}^2$  και υπολογίζουμε την  $N_{e, \text{res}}$  συναρτήσει της ενέργειας  $E$ , εστιάζοντας στις ενέργειες μέχρι  $20\text{MeV}$ , εφόσον σε αυτήν την περιοχή παράγονται τα ηλιακά νετρίνα. Για μεγαλύτερες ενέργειες νετρίνων, όπως αυτές που παράγονται στο Fermilab, η εικόνα 1.30 είναι αρκετά διαφωτιστική. Βλέπουμε ότι η  $N_{e, \text{res}}$  των ηλιακών νετρίνων αναμένονται να είναι πολύ μεγάλες,



**Εικόνα 1.31:**  $N_{e,res}$  για  $\theta_0=32^\circ$ ,  $\Delta m^2 = 7.1 \times 10^{-5} \text{ eV}^2$ , στην περιοχή των ενεργειών που παράγονται στον Ήλιο.

εξέλθουν έχει καθοριστική σημασία στο λεγόμενο πρόβλημα των ηλιακών νετρίνων, αλλά αυτό δε θα το εξετάσουμε σε αυτό το σημείο.

Είπαμε ότι τα νετρίνα με ενέργειες από  $\sim 0.5 \text{ GeV}$  μέχρι  $\sim 10 \text{ GeV}$ , δηλαδή νετρίνα παρόμοια με αυτά που θα παράγονται στο Fermilab, για να παρουσιάσουν συντονισμό πρέπει να περάσουν μέσα από αρκετά αραιή ύλη, ειδικά εφόσον θεωρούμε  $\theta_0=\theta_{12}\approx 32^\circ$ . Αν και τα νετρίνα που θα χρησιμοποιηθούν στο MINOS δεν θα διέλθουν από ύλη ομογενούς  $N_e$ , έχει ενδιαφέρον να διερευνήσουμε τι αποτελέσματα θα είχε το πέρασμά τους από το υπέδαφος αν αυτό ήταν ομογενές.



**Εικόνα 1.32:** Το πλάτος πιθανότητας ταλάντωσης συναρτήσει του  $N_e$  και της ενέργειας των νετρίνων E.

πλάτους ταλάντωσης, είναι αρκετά πιθανότερο να επιφέρει καταπίεση και να εξαφανίσει σχεδόν το φαινόμενο της ταλάντωσης. Αν θεωρήσουμε για το υπέδαφος μια μέση  $N_e/N_{Av} = 2 \times 10^6 \text{ m}^{-3}$ , τότε βλέπουμε στην εικόνα 1.32 ότι ενισχύεται η ταλάντωση των νετρίνων με ενέργεια περίπου  $110 \text{ MeV}$ , ενώ τα νετρίνα με ενέργεια μεγαλύτερη από  $2 \text{ GeV}$  σχεδόν παύουν να ταλαντώνονται.

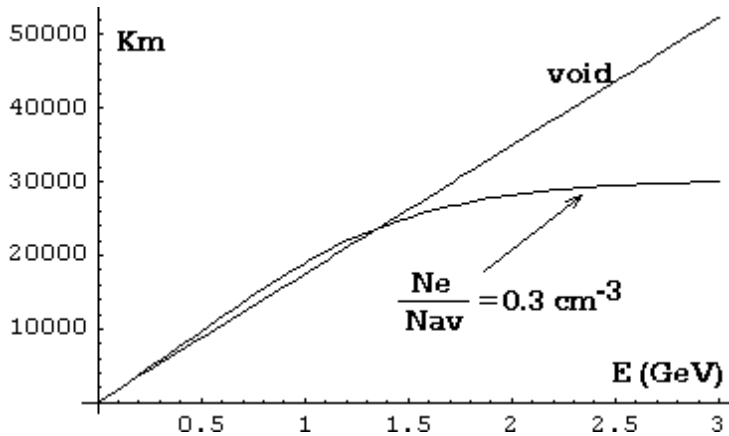
Όπως φαίνεται στη σχέση (1.122), η απόσταση  $L_m/2$ , όπου η πιθανότητα ταλάντωσης μεγιστοποιείται, εξαρτάται κι αυτή από το  $N_e$ , το E, το  $\Delta m^2$  και από το  $\theta_0$ , ενώ στην περίπτωση του κενού εξαρτάται μόνο από το E με την απλή σχέση (1.37). Όπως θα δούμε, η παρουσία

περίπου 100 φορές μεγαλύτερες από αυτές που συναντώνται στη συνήθη στερεά ύλη. Όμως, δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι στον ήλιο η πυκνότητα ηλεκτρονίων αφ' ενός δεν είναι σταθερή και αφ' εταίρου μπορεί να λαμβάνει τιμές πολύ διαφορετικές από αυτές στη συνήθη ύλη, αφού ο Ήλιος βρίσκεται σε κατάσταση πλάσματος. Πράγματι, το γεγονός ότι τα ηλιακά νετρίνα διασχίζουν τη μάζα του Ήλιου μέχρι να

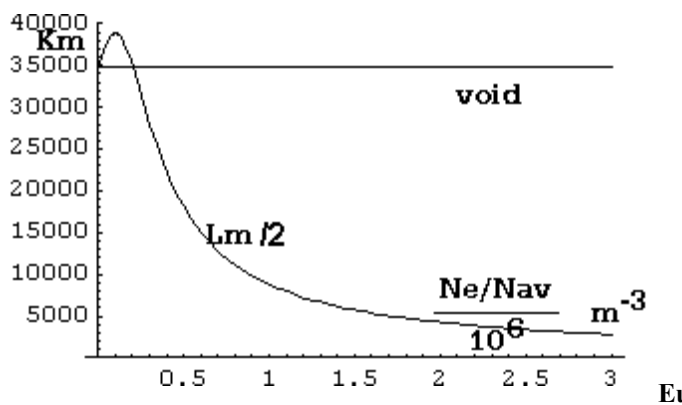
στην εικόνα 1.32 βλέπουμε το πώς μεταβάλλεται το πλάτος πιθανότητας ταλάντωσης (1.123) συναρτήσει της  $N_e$  και της E, με σταθεροποιημένη  $\theta_0=32^\circ$ . Στη λευκή περιοχή το πλάτος είναι σχεδόν ίσο με τη μονάδα, ενώ στη μαύρη περιοχή είναι σχεδόν ίσο με το μηδέν, δηλαδή έχουμε καταπίεση (*suppression*) της ταλάντωσης, ένα φαινόμενο με αντίθετο αποτέλεσμα από αυτό του συντονισμού. Άρα, αν και η παρουσία ύλης είναι δυνατόν να επιφέρει συντονισμό και μεγιστοποίηση του

της ύλης διαφοροποιεί δραματικά το  $L_m$  από το  $L$  του κενού. Στην εικόνα 1.33 φαίνεται η εξάρτηση του  $L_m/2$  από την  $E$ , για  $N_e=0$  και για μέση  $N_e/N_{Av} = 0.3 \times 10^6 \text{ m}^{-3}$ , θεωρώντας  $\theta_0=32^\circ$  και  $\Delta m^2=7.1 \times 10^{-5} \text{ eV}^2$ . Αυτό που έχει μεγάλο ενδιαφέρον είναι ότι για μεγάλες ενέργειες το  $L_m$  τείνει σε μια σταθερή τιμή:

$$\lim_{E \rightarrow \infty} L_m = \frac{1.623 \times 10^{10}}{N_{e(m^{-3})} / N_{Av}} \text{ Km} \quad (1.127)$$



Εικόνα 1.33:  $L_m/2$  και  $L/2$ , για  $\theta_0=32^\circ$  και  $\Delta m^2=7.1 \times 10^{-5} \text{ eV}^2$ .



Εικόνα 1.34:  $L_m/2$  και  $L/2$ , για  $\theta_0=32^\circ$  και  $\Delta m^2=7.1 \times 10^{-5} \text{ eV}^2$ , με σταθερή  $E=2 \text{ GeV}$

Δηλαδή, για δεδομένο και σταθερό  $N_e$ , όταν αυξάνεται αρκετά η ενέργεια  $E$  αρχίζει να φθίνει το πλάτος ταλάντωσης και να σταθεροποιείται η απόσταση μεγιστοποίησης της πιθανότητας ταλάντωσης.

Στην εικόνα 1.34 φαίνονται τα ίδια μεγέθη για σταθεροποιημένη ενέργεια  $E=2 \text{ GeV}$ , συναρτήσεως του  $N_e$ . Προφανώς, το  $L/2$  είναι σταθερό, εφόσον δεν εξαρτάται από το  $N_e$ . Ενδιαφέρον είναι ότι αυξανόμενου του  $N_e$  τείνει να μηδενισθεί η  $L_m$ .



## Ταλαντώσεις σε μεταβαλλόμενη συγκέντρωση ηλεκτρονίων

Στην πραγματικότητα τα νετρίνα δε συμβαίνει να διασχίζουν ύλη σταθερής αριθμητικής πυκνότητας ηλεκτρονίων, αλλά μεταβαλλόμενης. Σε αυτές τις περιπτώσεις, η επίλυση της εξίσωσης χρονικής εξέλιξης με αναλυτικό τρόπο είναι αδύνατη, πλην πολύ ειδικών περιπτώσεων, όπου το προφίλ της πυκνότητας ( $N_e = N_e(t)$ ) επιτρέπει αναλυτική επίλυση του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων. Επομένως, ο μόνος τρόπος που μας απομένει είναι ο αριθμητικός. Σε αυτόν τον τρόπο και στις εφαρμογές του θα επανέλθουμε αργότερα.

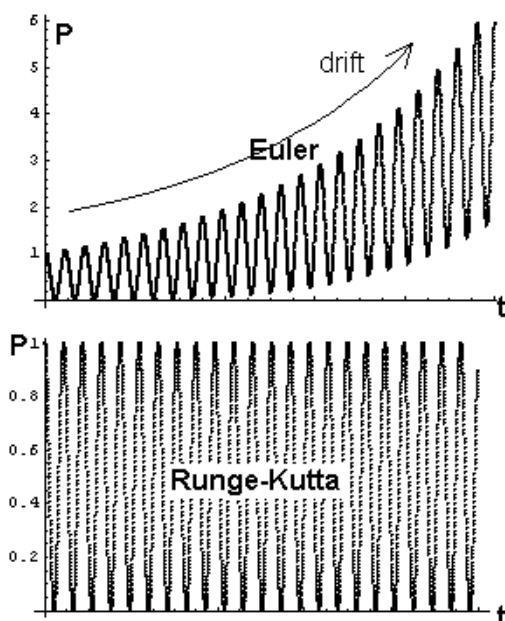
Μια ευρέως γνωστή ειδική περίπτωση όπου μπορούμε να επιλύσουμε το πρόβλημα προσεγγιστικά είναι η λεγόμενη περίπτωση της *αδιαβατικής προσεγγίσεως (adiabatic approximation)*. Η προσεγγιστική λύση που λαμβάνουμε με αυτήν τη μέθοδο προϋποθέτει ότι η μεταβολή της συγκέντρωσης  $N_e$  γίνεται πολύ αργά κατά μήκος της διαδρομής του νετρίνου.

Ας υποθέσουμε ότι στο κέντρο του Ηλίου, όπου η  $N_e$  είναι εξαιρετικά υψηλή, δημιουργείται ένα  $\nu_e$ , το οποίο αρχίζει τη διαδρομή του προς την επιφάνεια. Είναι λογικό, σε πρώτη προσέγγιση, να θεωρήσουμε ότι η  $N_e$  φθίνει μονότονα όσο το νεutrίνο κινείται προς τα εξώτερα στρώματα.

Στην αρχή, λόγω της τεράστιας  $N_e$ , η ταλάντωση του νετρίνου είναι έντονα καταπιεσμένη (suppressed). Αν θεωρήσουμε ότι αρχικά  $N_e$  τείνει στο άπειρο, από τη σχέση (1.117) παίρνουμε  $\tan 2\theta \rightarrow 0 \Rightarrow \theta \approx 90^\circ$ . Καθώς το  $N_e$  φθίνει, σε κάποιο σημείο θα είναι ίσο με το  $N_{e, \text{resonance}}$ , όπου  $\theta = 45^\circ$ , ενώ ακόμα πιο έξω το  $N_e$  θα μικραίνει και το  $\theta$  θα τείνει να εξισωθεί με το  $\theta_0$ .

Εφόσον για  $t=0$  η  $\theta$  ήταν ίση με  $\theta_i = 90^\circ$  και το νεutrίνο ήταν αμιγές  $\nu_e$ , από την (1.114) προκύπτει ότι για  $t=0$ , το νεutrίνο ήταν  $\nu_B$  στην ιδιοβάση της hamiltonian στην ύλη. Η βασική υπόθεση της αδιαβατικής προσέγγισης είναι ότι, επειδή το  $N_e$  μεταβάλλεται αργά, το νεutrίνο βρίσκει συνεχώς το χρόνο να «αναπροσαρμόζεται» στις νέες συνθήκες χωρίς να αλλάζει προβολές στα ιδιοανύσματα της hamiltonian στην ύλη. Έτσι, κι όταν το νεutrίνο θα εξέλθει του Ηλίου, να παραμένει  $\nu_B$ . Τότε, όμως, το  $\theta$  θα είναι ίσο με  $\theta_f = \theta_0$ . Επομένως, από την (1.114) και πάλι, προκύπτει ότι:

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) \approx \cos^2 \theta_0 \quad (1.128)$$



Εικόνα 1.35: Το φαινόμενο drift στην μέθοδο Euler

Αξίζει να επανέλθουμε τώρα στην συζήτηση περί αριθμητικής επίλυσεως της εξίσωσης χρονικής εξέλιξης, διότι για ρεαλιστικά προβλήματα αυτή είναι ουσιαστικά η μόνη που μπορεί να δώσει αποτελέσματα.

Κατασκευάσαμε ένα πρόγραμμα το οποίο πραγματοποιεί την αριθμητική ολοκλήρωση της εξίσωσης χρονικής εξέλιξης χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο *Runge-Kutta* 2<sup>ης</sup> τάξεως. Πρώτα δοκιμάσαμε τον απλούστερο αλγόριθμο που υπάρχει για να λύνει διαφορικές εξισώσεις, τη μέθοδο *Euler*, αλλά λόγω της απλοτητάς της αυτή η μέθοδος έδινε λάθος αποτελέσματα. Συγκεκριμένα, με την μέθοδο Euler παρατηρείται το λεγόμενο *drift* της ολικής πιθανότητας. Στην εικόνα 1.35 αντιπαρατίθεται δύο διαγράμματα της πιθανότητας επιβίωσης ενός  $\nu_e$  συναρτήσει του χρόνου, σε μονάδες και με παραμέτρους που προς το παρόν δεν έχει σημασία να αναλύσουμε, η μία υπολογισμένη με τη μέθοδο Euler και η άλλη με τη *Runge-Kutta*. Είναι προφανές ότι η Euler είναι

τελείως ακατάλληλη για τέτοιου είδους φυσικά προβλήματα, όπου έχει σημασία να διατηρούνται ορισμένα ολοκληρώματα της κίνησης (πχ η μηχανική ενέργεια, εν προκειμένω η ολική πιθανότητα=1).

Το σύστημα που λύνουμε είναι, σύμφωνα με την (1.104):

$$\begin{cases} \frac{\partial v_e}{\partial t} = -i(H_{1,1}(t)v_e + H_{1,2}(t)v_\mu) \equiv f_e(t, v_e, v_\mu) \\ \frac{\partial v_\mu}{\partial t} = -i(H_{2,1}(t)v_e + H_{2,2}(t)v_\mu) \equiv f_\mu(t, v_e, v_\mu) \end{cases} \quad (1.129)$$

Η μέθοδος Runge-Kutta που χρησιμοποιήσαμε συνοψίζεται στα εξής βήματα:

$$\begin{aligned} k_{1e} &= h f_e(t, v_e, v_\mu) \\ k_{1\mu} &= h f_\mu(t, v_e, v_\mu) \\ k_{2e} &= h f_e\left(t + \frac{h}{2}, v_e + \frac{k_{1e}}{2}, v_\mu + \frac{k_{1\mu}}{2}\right) \\ k_{2\mu} &= h f_\mu\left(t + \frac{h}{2}, v_e + \frac{k_{1e}}{2}, v_\mu + \frac{k_{1\mu}}{2}\right) \end{aligned} \quad (1.130)$$

$$v_e(t+h) = v_e(t) + k_{2e}$$

$$v_\mu(t+h) = v_\mu(t) + k_{2\mu}$$

$$\text{όπου} \quad H_{(t)} = \begin{pmatrix} -\frac{\Delta m^2}{4E} \cos 2\theta_0 + \sqrt{2}G_F N_e(t) & \frac{\Delta m^2}{4E} \sin 2\theta_0 \\ \frac{\Delta m^2}{4E} \sin 2\theta_0 & \frac{\Delta m^2}{4E} \cos 2\theta_0 \end{pmatrix} \quad (1.131)$$

Προσοχή απαιτείται κατά την αριθμητική ολοκλήρωση στις μονάδες που χρησιμοποιούνται. Οι όροι του πίνακα  $H$  έχουν μονάδες ενέργειας, τα  $v_{\mu,\tau}$  είναι αδιάστατες συνιστώσες, και ο χρόνος σε φυσικές μονάδες είναι εκπεφρασμένος σε μονάδες αντίστροφης ενέργειας. Όντως, έτσι οι μονάδες στο δεξί και στο αριστερό μέλος των (1.129) ταιριάζουν. Εφόσον δουλεύουμε σε φυσικές μονάδες όπου  $c=1$ , είναι εύκολο να χειριστούμε το χρόνο  $t$  σαν την απόσταση που διανύουν τα νετρίνα, θεωρώντας ότι η ταχύτητά τους είναι  $c$ , οπότε  $x=ct=t$ .

Το βήμα χρόνου, ή απόστασης ισοδύναμα, το οποίο συμβολίσαμε με  $h$  παίζει πολύ σημαντικό ρόλο. Αν είναι υπερβολικά μεγάλο, τότε ακόμα και με τη Runge-Kutta παρατηρείται drift. Από την άλλη, αν είναι υπερβολικά μικρό η αριθμητική επίλυση απαιτεί υπερβολικά πολλή ώρα. Για το λόγο αυτό, υπάρχει η μέθοδος ρύθμισης του βήματος  $h$  με τρόπο δυναμικό. Για το συγκεκριμένο πρόβλημα, ξέρουμε ότι αν η  $N_e$  είναι σταθερή, η πιθανότητα ταλάτωσης κυμαίνεται ημιτονοειδώς με μήκος ταλάντωσης ( $L_m$ ) που δίνεται από τη σχέση (1.120). Ένα λογικό βήμα ολοκλήρωσης είναι το  $1/100$  του εκάστοτε  $L_m$ .

Ας παρουσιάσουμε ορισμένα συγκεκριμένα παραδείγματα αριθμητικής ολοκλήρωσης. Έστω ένα νετρίνο το οποίο αρχικά είναι 100%  $\nu_e$  και σε ένα σημείο της διαδρομής του συναντά μια συγκέντρωση νετρίνων, για παράδειγμα έναν πλανήτη ή ένα άστρο. Σε αυτό το παράδειγμα θέτουμε  $E=3\text{GeV}$  και την πυκνότητα των ηλεκτρονίων την θεωρούμε σαν γκαουσιανή

$$\text{κατανομή:} \quad N_e(t) = \rho_0 \exp\left(-\frac{(t-t_0)}{2\sigma^2}\right) \quad (1.132)$$

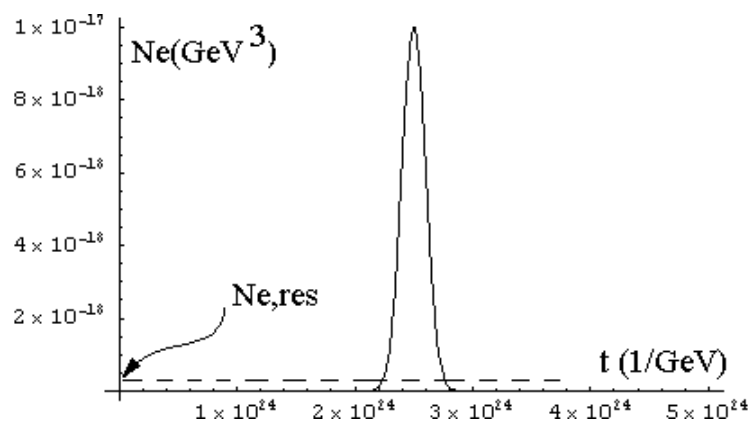
όπου  $t_0=0.25 \cdot 10^{25} \text{GeV}^{-1}=493.25 \cdot 10^6 \text{m}$  και  $\sigma=10^{23} \text{GeV}^{-1}=1.973 \cdot 10^7 \text{m}$ . Για  $\theta_0=32^\circ$  και  $\Delta m^2=7.2 \cdot 10^{-5} \text{eV}^2$  έχουμε  $N_{e,\text{res}}=3.2 \cdot 10^{-19} \text{GeV}^3$ . Οπότε θέτουμε  $\rho_0=1 \cdot 10^{-17} \text{GeV}^3$ , ώστε να πετύχουμε suppression στο εσωτερικό του σώματος. Στην εικόνα 1.36 βλέπουμε το  $N_e(t)$ .

Την αριθμητική ολοκλήρωση θα μπορούσαμε πολύ εύκολα να την εκτελέσουμε χρησιμοποιώντας C++, αλλά χρησιμοποιήσαμε τελικά το MATHEMATICA, ώστε να κάνουμε εύκολα γραφικές παραστάσεις των αποτελεσμάτων. Ακολουθεί ο ακριβής κώδικας που χρησιμοποιήσαμε για την εφαρμογή της μεθόδου Runge-Kutta 2<sup>ης</sup> τάξης και μεταβλητού βήματος ολοκλήρωσης (dt):

```

tmax = .5*^25;
dt = tmax / 30000;
{x, y} = {1, 0};
{x, y} = 1 / Sqrt[x^2 + y^2] * {x, y};
Lx = {{0, x*Conjugate[x]}};
Ly = {{0, y*Conjugate[y]}};
L = {{0, dt}};
Ne = (1*^17) * Exp[-((#1 - .2*^25) ^2) / (2 * (10*^22) ^2)] &;
u = 32. * Pi / 180.;
s = Dm / (4 En) /. Dm -> (7.2*^-23) /. En -> 3;
M = (Ne[#1] * Sqrt[2] * 1.166*^-5 &);
Nres = 2 * s * Cos[2 u] / (Sqrt[2] * 1.166*^-5);
t = 0;
While[t < tmax,
  A = (
    -s * Cos[2 u] + M[t]   s * Sin[2 u]
     s * Sin[2 u]         s * Cos[2 u]
  );
  k1x = dt * (-I) * (A[[1, 1]] * x + A[[1, 2]] * y);
  k1y = dt * (-I) * (A[[2, 1]] * x + A[[2, 2]] * y);
  A[[1, 1]] = -s * Cos[2 u] + M[t + 0.5 * dt];
  k2x = dt * (-I) * (A[[1, 1]] * (x + 0.5 * k1x) + A[[1, 2]] * (y + 0.5 * k1y));
  k2y = dt * (-I) * (A[[2, 1]] * (x + 0.5 * k1x) + A[[2, 2]] * (y + 0.5 * k1y));
  x = x + k2x;
  y = y + k2y;
  t = t + dt;
  Lxnew = Append[Lx, {t, x*Conjugate[x]}};
  Lynew = Append[Ly, {t, y*Conjugate[y]}};
  Lx = Lxnew;
  Ly = Lynew;
  dt = Im[t] / 100;
  Lnew = Append[L, {t, dt}];
  L = Lnew;
]

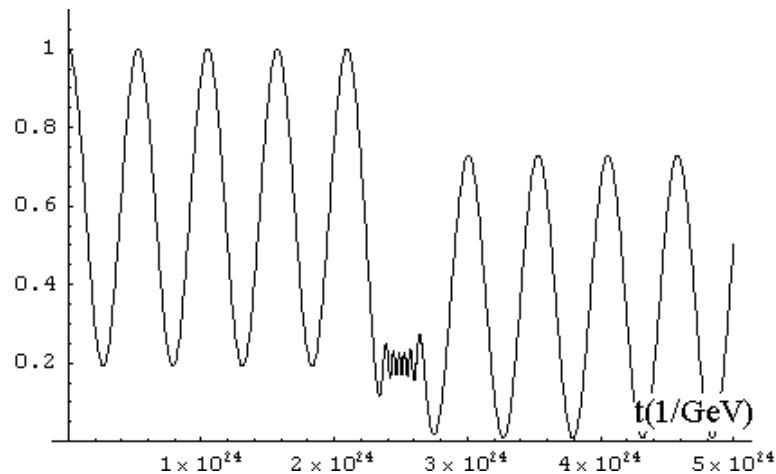
```



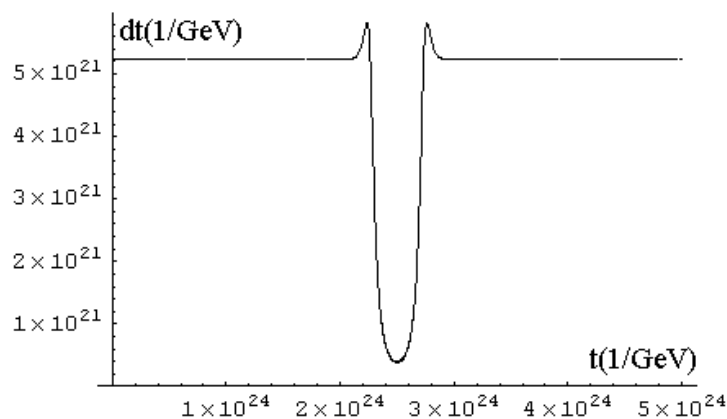
Εικόνα 1.36: Η  $N_e(t)$  που υποθέτουμε.

Σχεδιάζοντας στο τέλος τα σημεία που έχουν συντεταγμένες που περιέχονται στη λίστα  $L_x$  παίρνουμε την πιθανότητα επιβίωσης του  $\nu_e$  σε κάθε  $t$ . Η λίστα  $L_y$  μας δίνει την πιθανότητα ταλάντωσης  $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ . Στην εικόνα 1.37 βλέπουμε την πιθανότητα επιβίωσης του  $\nu_e$ . Παρατηρούμε, όπως το αναμέναμε, ότι στο κέντρο του υποτιθέμενου σώματος, η ταλάντωση καταπιέζεται έντονα.

Παρατηρούμε ότι το βήμα χρόνου πράγματι μεταβάλλεται και γίνεται πιο μικρό στο κέντρο του σώματος, όπου το μήκος ταλάντωσης  $L_m$  μικραίνει. Με το να εστιάζεται η λεπτομέρεια εκεί που πραγματικά χρειάζεται, το πρόγραμμα μειώνει αισθητά το χρόνο που απαιτεί. Στην εικόνα 1.38 φαίνεται η τιμή του βήματος χρόνου (ή απόστασης ισοδύναμα) συναρτήσει της απόστασης.



**Εικόνα 1.37:** Η πιθανότητα επιβίωσης του  $\nu_e$ ,  $E=3\text{GeV}$ ,  $\theta_0=32^\circ$ ,  $\Delta m^2=7.2 \cdot 10^{-5} \text{eV}^2$ .

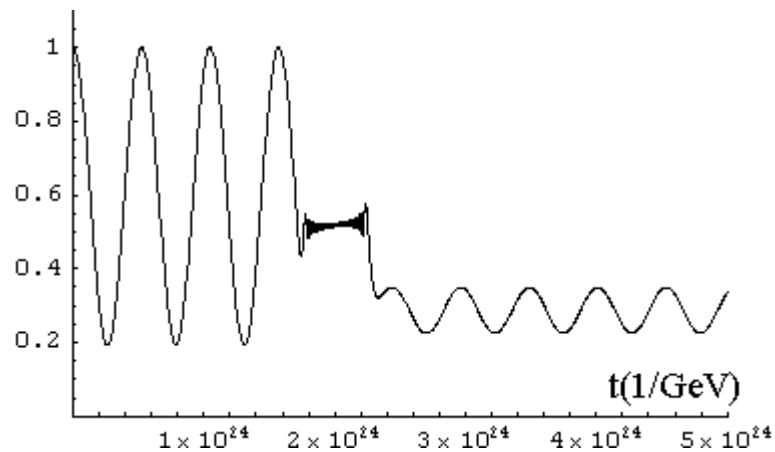


**Εικόνα 1.38:** Το προσαρμοζόμενο βήμα ολοκλήρωσης.

Αυτό που παρατηρούμε και είναι εντυπωσιακό είναι ότι η πιθανότητα ταλάντωσης μετά την έξοδο από το υποθετικό σώμα φαίνεται να «θυμάται» ότι έχει περάσει από το σώμα, καθώς διαφέρει αισθητά πριν και μετά. Ενώ πριν η πιθανότητα επιβίωσης έφτανε κατά τόπους και το 100%, μετά την έξοδο από το σώμα δεν φτάνει ποτέ αυτήν την τιμή. Αντίθετα, ενώ πριν ποτέ δεν παρατηρούταν πλήρης εξαφάνιση (πιθανότητα επιβίωσης = 0), μετά την έξοδο η ελάχιστη πιθανότητα επιβίωσης πλησιάζει πολύ στο 0.

Ο τρόπος με τον οποίον επηρεάστηκε η πιθανότητα ταλάντωσης στην προκειμένη περίπτωση αφορά την συγκεκριμένη περίπτωση και μόνο. Αν αλλάξει η θέση, το εύρος ή το ύψος της  $N_e(t)$ , η επιρροή θα είναι διαφορετική. Ένα ενδιαφέρον παράδειγμα είναι το ακόλουθο:

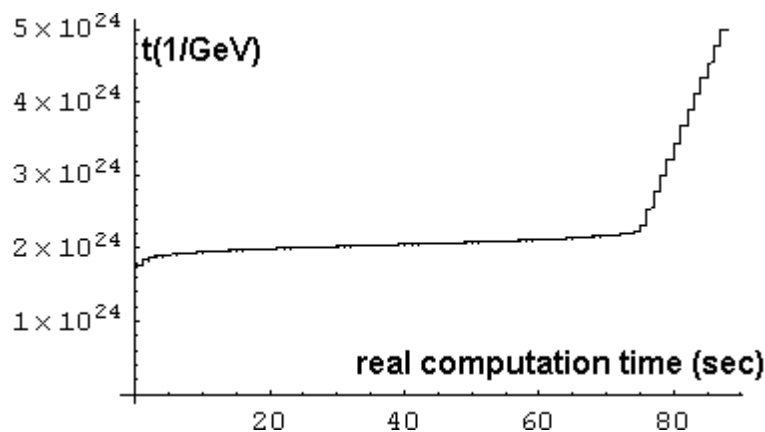
Αν αφήσουμε όλες τις παραμέτρους ίδιες, αλλά θέσουμε  $t_0=0.2 \cdot 10^{25} \text{GeV}^{-1}$  και  $\rho_0=10^{-16} \text{GeV}^3=21.6 \cdot 10^6 \cdot N_A \text{m}^{-3}$ , η πιθανότητα επιβίωσης παίρνει τη μορφή της εικόνας 1.39. Το εντυπωσιακό είναι το πόσο μειώθηκε το πλάτος ταλάντωσης. Μοιάζει σαν το νεutrίνο να εστιάστηκε σχεδόν σε μια συγκεκριμένη αναλογία  $\nu_e$  και  $\nu_\mu$ .



**Εικόνα 1.39:** Πιθανότητα επιβίωσης  $\nu_e$ , όπου φαίνεται η δυνατότητα «εστίασης» του flavor.

Το φαινόμενο αυτό είναι εκτός από εντυπωσιακό και πολύ σημαντικό, όταν κανείς μελετά νεutrίνα που έρχονται από το διάστημα. Είναι δυνατόν νεutrίνα περνώντας από διάφορα ουράνια αντικείμενα να «εστιάζονται» σε μια συγκεκριμένη πιθανότητα επιβίωσης. Φαντάζεται λοιπόν κανείς πόσο σημαντικό είναι να εισέρχεται σε ένα άστρο ένα νεutrίνο που να ταλαντώνεται μεταξύ  $\nu_e$  και  $\nu_\mu$ , και να βγαίνει ένα νεutrίνο που να είναι σταθερά σχεδόν  $\nu_e$  ή εν μέρει  $\nu_e$  για πάντα.

Κατά τον τελευταίο υπολογισμό ο χρόνος που απαιτήθηκε ήταν αισθητά μεγαλύτερος, αλλά αυτό είναι λογικό. Στο εσωτερικό του σώματος αυτή τη φορά το suppression είναι πολύ έντονο, οπότε το  $L_m$  γίνεται εξαιρετικά μικρό (βλ. εικόνα 1.34). Στην εικόνα 1.40 βλέπουμε ένα διάγραμμα που φανερώνει ότι ο περισσότερος πραγματικός χρόνος που απαιτήσε ο υπολογισμός δαπανήθηκε όσο το νεutrίνο βρισκόταν μέσα στο σώμα. Βλέπουμε ότι μετά την έξο-

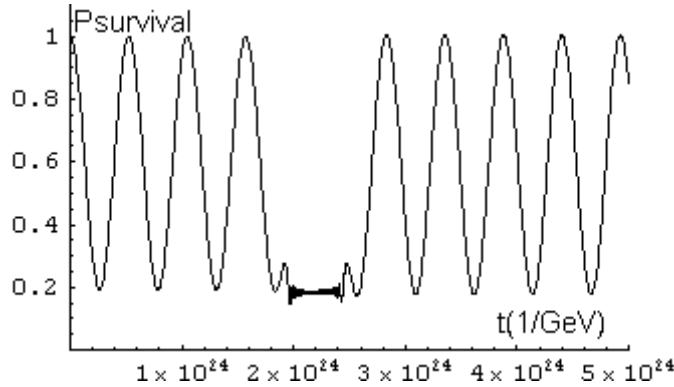


**Εικόνα 1.40:** Ο χρόνος (απόσταση) στον οποίο βρισκόταν το νεutrίνο συναρτήσει του πραγματικού χρόνου υπολογισμού.

δο, η κλίση της γραφικής παράστασης της εικόνας 1.20 είναι μικρότερη απ' ό τι πριν την είσοδο του νεutrίνου στο σώμα. Το  $L_m$  και το  $dt$  είναι ίσα πριν και μετά την έξοδο. Πιθανόν η

μείωση της ταχύτητας του υπολογισμού να συμβαίνει λόγω μείωσης των πηγών του υπολογιστή.

Το να αλλάξει ο τρόπος ταλάντωσης του νετρίνου περνώντας μέσα από ένα σώμα δεν είναι απαραίτητο. Υπάρχει συνθήκη που επιτρέπει το νεutrino πριν και μετά να ταλαντώνεται κατά ίδιον τρόπο. Για παράδειγμα, να βάλουμε ακριβώς την ίδια  $N_e(t)$  με το κέντρο λίγο πιο δεξιά, στη θέση  $t_0=0.22 \cdot 10^{25} \text{GeV}^{-1}$ , η πιθανότητα επιβίωσης του  $\nu_e$  φαίνεται στην εικόνα 1.41.



**Εικόνα 1.41:** Πιθανότητα επιβίωσης με  $t_0=0.22 \cdot 10^{25} \text{GeV}^{-1}$ ,  $\rho_0=10^{-16} \text{GeV}^3$ ,  $\sigma=10^{23} \text{GeV}^{-1}$ .

Ας εξετάσουμε θεωρητικά το ενδεχόμενο να υπάρχουν νετρίνα που αφότου περάσουν μέσα από κάποιο κατάλληλο σώμα να παύουν να ταλαντώνονται. Αρχικά φαίνεται παράλογο να υπάρχει νεutrino εν κενώ που να μπορεί να μην ταλαντώνεται. Όμως, δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι συνήθως τα νετρίνα που ξέρουμε και που εξετάζουμε δημιουργούνται σε κάποιον κόμβο ασθενούς αλληλεπίδρασης και τη στιγμή  $t=0$  έχουν καθαρό flavor, είτε 100%  $\nu_e$  είτε 100%  $\nu_\mu$ . Πράγματι, είναι αδύνατον ένα νεutrino που ξεκινά από μια ιδιοκατάσταση του flavor να παραμείνει σε αυτήν. Όμως, όπως πάντα, στις διαφορικές εξισώσεις παίζουν ρόλο οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος. Έτσι, αν μπορούσαμε να κατασκευάσουμε (πάντα εν κενώ) ένα νεutrino που στην αρχή να μην είναι σε κάποια ιδιοκατάσταση γεύσης, τότε θα μπορούσαμε να παραμείνουμε στην ίδια κατάσταση συνεχώς. Στη συνέχεια θα διερευνήσουμε ποια πρέπει να είναι η (μια και μοναδική) κατάλληλη αρχική κατάσταση του νετρίνου για να παραμείνει σ' αυτήν.

Φυσικά, στις ασθενείς αλληλεπιδράσεις είναι αδύνατον να δημιουργηθεί νεutrino που να μην είναι ιδιοκατάσταση του flavor, εφόσον τα  $W^+$ ,  $W^-$  και  $Z^0$  συζευγνύονται (couple) εξ ορισμού με διπλέτες ιδιοκαταστάσεων του flavor. Όμως, αυτό που δε μπορεί να συμβεί στη δημιουργία του νετρίνου το καταφέρνει η ασύμμετρη επίδραση της ύλης. Κατά την έξοδό του το νεutrino, όπως βλέπουμε στις εικόνες 1.37, 1.39 και 1.41, ξαναβρίσκεται στο κενό αλλά από μια αναμειγμένη κατάσταση ως προς το flavor. Από' κει και πέρα ταλαντεύεται εν κενώ όπως ακριβώς θα ταλαντωνόταν αν από την αρχή ήταν στη συγκεκριμένη αναμειγμένη κατάσταση.

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε ποια είναι η κατάλληλη αναμειγμένη αρχική κατάσταση (ας την ονομάσουμε *αρχική συνθήκη γευστικής ισορροπίας ΑΣΓΙ*) που αν ξεκινούσε το νεutrino απ' αυτήν εν κενώ θα παρέμενε σε αυτήν:

Η διαφορική εξίσωση που περιγράφει 2 γεύσεις εν κενώ είναι η (1.103). Ας ονομάσουμε την ποσότητα  $s \equiv \frac{\Delta m^2}{4E}$  και το άνυσμα  $\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{(t)} \equiv \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix}_{(t)}$ . Η διαφορική εξίσωση, λοιπόν, γράφεται:

$$i\dot{\vec{X}} = \begin{pmatrix} -A & B \\ B & A \end{pmatrix} \vec{X}. \quad (1.133)$$

Δε χρειάζεται να ξαναλύσουμε αυτό το σύστημα, αφού το έχουμε ήδη κάνει έμμεσα. Έχουμε λύσει ακριβώς το ίδιο σύστημα αλλά με τον πίνακα  $\begin{pmatrix} -A+M & B \\ B & A \end{pmatrix}$ , στη σχέση (1.104)

. Αρκεί, λοιπόν να κοιτάξουμε τι είχαμε κάνει τότε, και να θέσουμε  $M=0$ . Αν κάνουμε αυτό το απλό πράγμα καταλήγουμε στις εξής ιδιοτιμές:

$$\lambda_1 = \sqrt{A^2 + B^2} = s, \quad \lambda_2 = -s \quad (1.134)$$

Εξίσου εύκολα, από την (1.107), θέτοντας  $M=0$  (ή και απ' ευθείας, αφού είναι εξαιρετικά εύκολο) βρίσκουμε τα ιδιοανύσματα του πίνακα  $\begin{pmatrix} -A & B \\ B & A \end{pmatrix}$ :

$$\vec{X}_1 = \left( 1 + \left( \frac{A-s}{B} \right)^2 \right)^{-1/2} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{A-s}{B} \end{pmatrix}, \quad \vec{X}_2 = \left( 1 + \left( \frac{A+s}{B} \right)^2 \right)^{-1/2} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{A+s}{B} \end{pmatrix} \quad (1.135)$$

Επομένως, η εξίσωση κίνησης στο 2-διάστατο χώρο των γεύσεων για το νετρίνο είναι:

$$\begin{aligned} \vec{X}(t) &= C_1 \vec{X}_1 e^{ist} + C_2 \vec{X}_2 e^{-ist} = C_1 \begin{pmatrix} X_{11} \\ X_{12} \end{pmatrix} e^{ist} + C_2 \begin{pmatrix} X_{21} \\ X_{22} \end{pmatrix} e^{-ist} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} v_e \\ v_\mu \end{pmatrix}_{(t)} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{(t)} = \begin{pmatrix} C_1 X_{11} e^{ist} + C_2 X_{21} e^{-ist} \\ C_1 X_{12} e^{ist} + C_2 X_{22} e^{-ist} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.136)$$

Οι αρχικές συνθήκες του συστήματος (του νετρίνου δηλαδή) καθορίζουν τις σταθερές  $C_{1,2}$ . Μάλιστα, μόνο τα  $x(0) \equiv x_0$  και  $y(0) \equiv y_0$  αρκούν, εφόσον η διαφορική εξίσωση είναι πρώτου βαθμού ως προς  $t$ . Το απλό σύστημα που πρέπει να λύσουμε για να βρούμε τα  $C_{1,2}$  είναι το εξής:

$$\begin{cases} X_{11} C_1 + X_{21} C_2 = x_0 \\ X_{12} C_1 + X_{22} C_2 = y_0 \end{cases} \quad (1.137)$$

$$\text{με λύση:} \quad \begin{cases} C_1 = \frac{y_0 - \frac{X_{22} x_0}{X_{21}}}{X_{12} - \frac{X_{22} X_{11}}{X_{21}}} \\ C_2 = \frac{x_0 - X_{11} C_1}{X_{21}} \end{cases} \quad (1.138)$$

Για να φτάσουμε στο ζητούμενο, ας απαιτήσουμε η πιθανότητα να βρεθεί το νετρίνο σε γεύση  $v_e$  να είναι σταθερή, δηλαδή:

$$\frac{\partial |x(t)|^2}{\partial t} = 0 \quad \forall t \quad (1.139)$$

Εύκολα, από την (1.136) βρίσκουμε:

$$|x(t)|^2 = |C_1 X_{11}|^2 + |C_2 X_{21}|^2 + (C_1 X_{11} C_2^* X_{21}) e^{i2st} + (C_1^* X_{11} C_2 X_{21}) e^{-i2st} \quad (1.140)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial |x(t)|^2}{\partial t} = (C_1 X_{11} C_2^* X_{21}) e^{i2st} i2s - i2s (C_1^* X_{11} C_2 X_{21}) e^{-i2st} \quad (1.141)$$

Η συνθήκη (1.139) επιβάλλει  $(C_1 X_{11} C_2^* X_{21}) = 0$ . Εφόσον πάντα τα ιδιοανύσματα ενός πίνακα είναι διάφορα του μηδενικού ανύσματος (που τετριμμένα είναι ιδιοάνυσμα κάθε πίνακα), ο μόνος τρόπος να αληθεύει αυτή η συνθήκη είναι  $C_1 \cdot C_2^* = 0$ . Σύμφωνα με τη σχέση (1.138) αυτό σημαίνει:

$$C_1 = 0 \quad \text{ή} \quad C_2 = 0 \Leftrightarrow C_1 = x_0 / X_{11}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} C_1 = 0 \\ C_1 = \frac{x_0}{X_{11}} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x_0}{y_0} = \frac{B}{A \pm s} = \frac{\sin(2\theta_0)}{\cos(2\theta_0) \pm 1}$$

Εφόσον  $|x_0|^2 + |y_0|^2 = 1$  καταλήγουμε ότι η αρχική συνθήκη γευστικής ισορροπίας είναι:

$$\boxed{\begin{array}{l} |x_0| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\cos 2\theta_0 \pm 1}{\sin 2\theta_0}\right)^2}} \\ y_0 = \frac{\cos 2\theta_0 \pm 1}{\sin 2\theta_0} x_0 \end{array}} \quad (1.142)$$

Ενδιαφέρον έχει ότι η αρχική συνθήκη γευστικής ισορροπίας (ΑΣΓΙ) δεν εξαρτάται παρά μόνο από τη  $\theta_0$  και όχι από την ενέργεια. Δηλαδή, όλων των ενεργειών τα νετρίνα, αν βγαίνοντας από ένα σώμα στο κενό βρεθούν να ικανοποιούν την ΑΣΓΙ θα παραμείνουν στην κατάσταση αυτή.

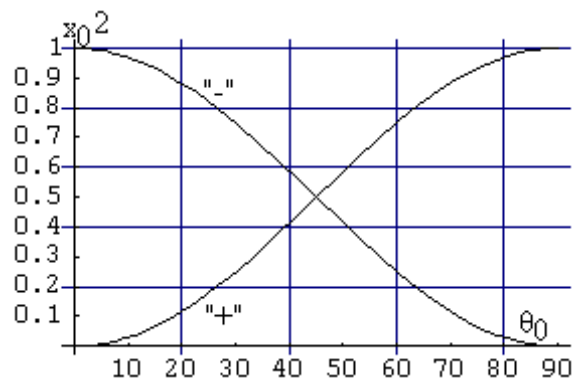
Επιπλέον, προσδιορίζεται μόνο το μέτρο των  $x_0$  και  $y_0$ , ενώ η μιγαδική τους φάση  $\phi$  παραμένει αυθαίρετη. Αρκεί, έχοντας ορίσει μια μιγαδική φάση για το  $x_0$ , το  $y_0$  να έχει την ίδια φάση, σύμφωνα με τη δεύτερη σχέση της (1.142).

Ένα λογικό ερώτημα είναι: ποια η σημασία του  $\pm$  στην ΑΣΓΙ; Όσο κι αν αρχικά δε φαίνεται, έχει μεγάλη σημασία. Για παράδειγμα, θεωρώντας  $\theta_0 = 32^\circ$  παίρνουμε:

$$\begin{array}{l} "+" \rightarrow \begin{cases} x_0 = 0.530 \cdot e^{i\phi} \\ y_0 = 0.848 \cdot e^{i\phi} \end{cases} \\ "-" \rightarrow \begin{cases} x_0 = 0.848 \cdot e^{i\phi} \\ y_0 = -0.530 \cdot e^{i\phi} \end{cases} \end{array}$$

Εν πάση περιπτώσει παίρνουμε  $|x_0|^2 = 0.2808$  or  $|y_0|^2 = 0.2808$ . Δηλαδή, το  $\pm$  στην ΑΣΓΙ δηλώνει ότι μπορούμε να δώσουμε την κατάλληλη αρχική τιμή είτε στη μία συνιστώσα είτε στην άλλη. Στην περίπτωση "-", το αρχικό άνυσμα  $\vec{X}_0$  ισούται με το αρχικό άνυσμα της περίπτωσης "+", στραμμένο κατά  $90^\circ$ .

Επομένως, υπάρχουν δύο τιμές πιθανότητας παρατήρησης  $\nu_e$ , οι οποίες είναι δυνατόν να παραμείνουν σταθερές:  $P(\nu_e) = 0.53^2 = 0.2809$  και  $P(\nu_e) = (-0.848)^2 = 0.7191$ . Αντίστοιχα, υπάρχουν δύο τιμές πιθανότητας μέτρησης  $\nu_\mu$ , οι οποίες είναι δυνατόν να παραμείνουν σταθερές:  $P(\nu_\mu) = 0.848^2 = 0.7191$  και  $P(\nu_\mu) = 0.53^2 = 0.2809$ .

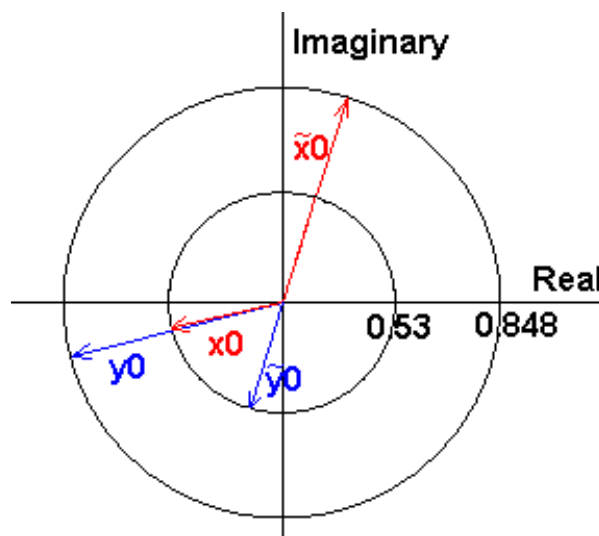


Εικόνα 1.42:  $|x_0|^2$  συναρτήσεσι του  $\theta_0$ .



Στην εικόνα 1.42 βλέπουμε το  $|x_0|^2$  που υπαγορεύει η ΑΣΓΙ, συναρτήσει του  $\theta_0$ . Φυσικά διακρίνονται και οι δύο κλάδοι, ο «+» και ο «-». Αν δεν υπήρχε ένας από τους δύο, τότε θα μπορούσε να παρατηρηθεί άμεσα αν  $\theta_0 > 45^\circ$  ή  $\theta_0 < 45^\circ$ . Η ύπαρξη και των δύο κλάδων καθιστά αδύνατο αυτόν τον διαχωρισμό, καθιστώντας το σχήμα 42 συμμετρικό ως προς την κατακόρυφο των  $45^\circ$ .

Την περίπτωση του υποθετικού σώματος που πέτυχε τη διαμόρφωση της εικόνας 1.39 την βρήκαμε σχεδόν κατά τύχη. Με διαδοχικές δοκιμές πετύχαμε ένα  $N_e(t)$  που πέτυχε να μειώσει το μετά την έξοδο πλάτος ταλάντωσης. Τώρα, έχουμε πλέον στα χέρια μας την ΑΣΓΙ. Αν βγαίνοντας το νετρίνο από ένα σώμα πληρεί την ΑΣΓΙ, θα πάψει εντελώς να ταλαντώνεται. Έχει λοιπόν μεγάλο ενδιαφέρον να διερευνήσουμε το πώς μπορεί ένα υποθετικό σώμα να επιτύχει αυτήν την πολύ ιδιαίτερη συνθήκη, δηλαδή να δράσει ως ένας *μηχανισμός γευστικής εστίασης (ΜΓΕ)*. Ακόμα δεν είμαστε βέβαιοι ότι κάτι τέτοιο είναι δυνατόν να επιτευχθεί. Τα γνωρίσματα της  $N_e(t)$  που θα καθορίσουν αν είναι ΜΓΕ ή όχι είναι η θέση και το σχήμα της, όπως για έναν οπτικό φακό έχει σημασία η θέση και η καμπυλότητά του.



**Εικόνα 1.43:** Δύο παραδείγματα  $x_0$  και  $y_0$  στο μιγαδικό επίπεδο, τα οποία ικανοποιούν την ΑΣΓΙ για  $\theta_0=32^\circ$ .

Η ΑΣΓΙ είναι μια πολύ απαιτητική συνθήκη. Ορίζει με την πρώτη σχέση δύο κύκλους στο μιγαδικό επίπεδο με άξονες  $\text{Re}[x_0]$  και  $\text{Im}[x_0]$ . Πρέπει το  $x_0$  που θα έχει το νετρίνο κατά την έξοδο να ανήκει σε έναν από αυτούς τους δύο κύκλους. Αλλά η πιο απαιτητική συνθήκη είναι ότι και το  $y_0$  θα πρέπει να βρίσκεται στον άλλον από τους δύο κύκλους και μάλιστα σε σημείο μοναδικό, όντας συνευθειακό με το μιγαδικό  $x_0$ . Στην εικόνα 1.43 αναπαρίσταται γραφικά η ΑΣΓΙ, για δεδομένο  $\theta_0$ , έστω  $32^\circ$ .

Καταλαβαίνουμε από την εικόνα 1.43 ότι για να διερευνήσουμε το πώς μπορεί να επιτευχθεί η ΑΣΓΙ πρέπει να μελετήσουμε την τροχιά που διαγράφουν τα μιγαδικά  $x(t)$  και  $y(t)$  στο μιγαδικό επίπεδο. Στην περίπτωση του κενού, η τροχιές αυτές είναι αναλυτικά υπολογίσιμες. Από την (1.136) έχουμε:

$$\text{Re}[x(t)] = \sqrt{\Pi_1^2 + \Pi_2^2} \cos\left(st - \arctan\left(\frac{\Pi_2}{\Pi_1}\right)\right) \quad (1.143)$$

$$\text{Im}[x(t)] = \sqrt{\Pi_3^2 + \Pi_4^2} \sin\left(st + \arctan\left(\frac{\Pi_3}{\Pi_4}\right)\right)$$

$$\text{Re}[y(t)] = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} \cos\left(st - \arctan\left(\frac{B_2}{B_1}\right)\right) \quad (1.144)$$

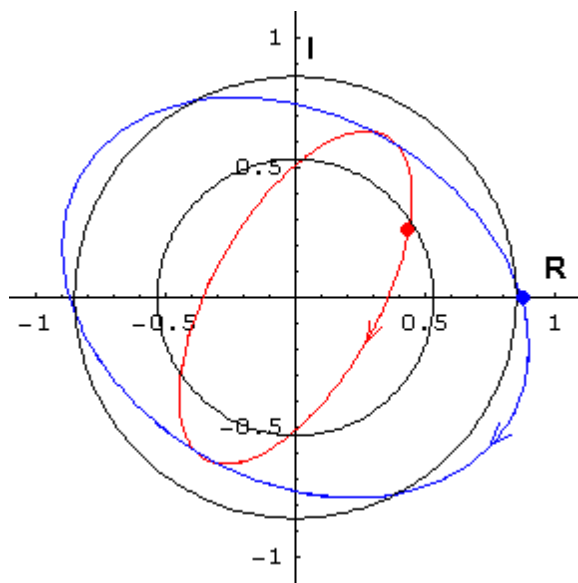
$$\text{Im}[y(t)] = \sqrt{B_3^2 + B_4^2} \sin\left(st + \arctan\left(\frac{B_3}{B_4}\right)\right)$$

$$\begin{aligned}
 \Pi_1 &= X_{11} \operatorname{Re}[C_1] + X_{21} \operatorname{Re}[C_2], & B_1 &= X_{12} \operatorname{Re}[C_1] + X_{22} \operatorname{Re}[C_2] \\
 \Pi_2 &= X_{21} \operatorname{Im}[C_2] - X_{11} \operatorname{Im}[C_1], & B_2 &= X_{22} \operatorname{Im}[C_2] - X_{12} \operatorname{Im}[C_1] \\
 \Pi_3 &= X_{11} \operatorname{Im}[C_1] + X_{21} \operatorname{Im}[C_2], & B_3 &= X_{12} \operatorname{Im}[C_1] + X_{22} \operatorname{Im}[C_2] \\
 \Pi_4 &= X_{11} \operatorname{Re}[C_1] - X_{21} \operatorname{Re}[C_2], & B_4 &= X_{12} \operatorname{Re}[C_1] - X_{22} \operatorname{Re}[C_2]
 \end{aligned}
 \tag{1.145}$$

όπου τα  $C_{1,2}$  βρίσκονται στη σχέση (1.138).

Οι εξισώσεις (1.143) και (1.144) μας πληροφορούν ότι τα  $x(t)$  και  $y(t)$  κινούνται σε ελλειπτικές τροχιές στο μιγαδικό επίπεδο, ενώ από τις σχέσεις (1.145) και (1.138) καταλαβαίνουμε ότι οι παράμετροι των ελλείψεων εξαρτώνται αποκλειστικά από τα  $x_0$  και  $y_0$ . Για πα-

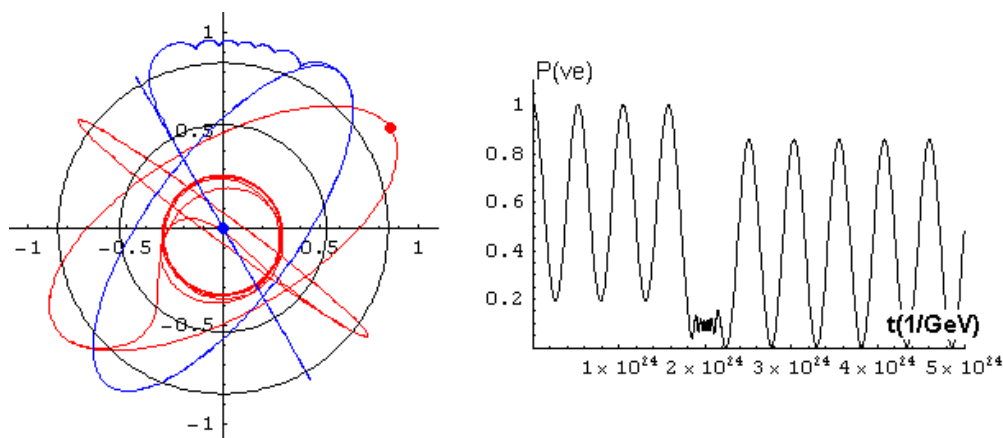
ράδειγμα, αν θέσουμε  $\{x_0=0.5e^{i\frac{\pi}{6}}, y_0=0.866e^{i0}\}$ , ώστε να σεβόμαστε φυσικά τη συνθήκη  $|x_0|^2 + |y_0|^2 = 1$ , τότε τα  $x(t)$  και  $y(t)$  ακολουθούν τις τροχιές του σχήματος 44.



**Εικόνα 1.44:**  $x_0=0.5e^{i\frac{\pi}{6}}$ ,  $y_0=0.866e^{i0}$ , με κόκκινο το  $x(t)$  και με μπλε το  $y(t)$ . Οι μαύροι κύκλοι είναι οι κύκλοι ισορροπίας. Οι κουκίδες είναι τα  $x_0, y_0$ .

Εν κενώ τα  $x(t)$  και  $y(t)$  διανύουν τις τροχιές τους με την ίδια γωνιακή συχνότητα  $s$ , όπως φαίνεται και από τις σχέσεις (1.143) και (1.144). Οπότε, παρόλο που στιγμιαία οι τροχιές τους τέμνουν τους κύκλους γευστικής ισορροπίας, ποτέ δεν ικανοποιείται και η συνθήκη της συγγραμμικότητας, εφόσον αυτή δεν ικανοποιούταν εξ αρχής.

Όμως, όταν το νεutrino διανύει ένα σώμα οι τροχιές των  $x(t)$  και  $y(t)$  παύουν να είναι ελλείψεις και αποκτούν σχήματα που είναι συνήθως αδύνατον να υπολογισθούν αναλυτικά. Για παράδειγμα, στην εικόνα 1.45 φαίνονται οι αντίστοιχες τροχιές για gaussian  $N_e$  με  $\rho_0=10^{17}\text{GeV}^3$ ,  $t_0=2\cdot 10^{24}\text{GeV}^{-1}$  και  $\sigma=10^{23}\text{GeV}^{-1}$ , θέτοντας  $x_0=1\cdot e^{i\frac{\pi}{6}}$ .



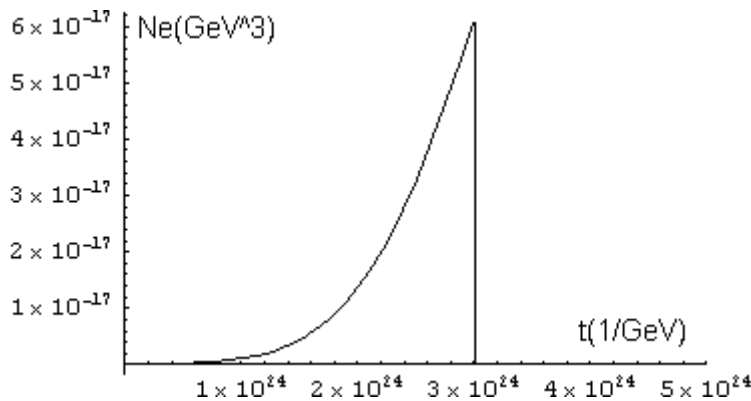
**Εικόνα 1.45:** Κόκκινο:  $x(t)$  και μπλε:  $y(t)$ . Δεξιά η πιθανότητα επιβίωσης του  $\nu_e$ . Έχουμε υποθέσει  $N_e$  με  $\rho_0=10^{17}\text{GeV}^3$ ,  $t_0=2\cdot 10^{24}\text{GeV}^{-1}$  και  $\sigma=10^{23}\text{GeV}^{-1}$ .

Είναι μεν αδύνατον να υπολογίσουμε απ' ευθείας ένα  $N_e(t)$  που να είναι ΜΓΕ, τουλάχιστον με τα όσα έχουμε αναφέρει μέχρις εδώ. Είναι όμως δυνατόν να κατασκευάσουμε έναν τέτοιο ΜΓΕ μέσω ενός αλγορίθμου τον οποίον αναπτύξαμε με αυτόν ακριβώς το σκοπό. Για την ακρίβεια, υπάρχει απειρία από ΜΓΕ. Αλλά, το να δείξουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας έχει θεωρητικό ενδιαφέρον.

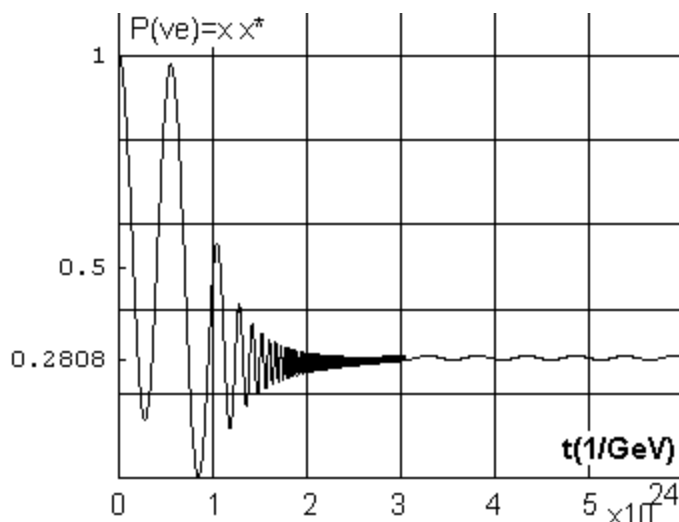
Ο αλγόριθμος που χρησιμοποιούμε είναι σχεδόν ίδιος με αυτόν που παραθέτουμε λίγες σελίδες παραπάνω, αλλά προστίθεται μια διαφοροποιός εντολή: Μόλις πριν πάει το πρόγραμμα να υπολογίσει την παρούσα  $L_m$  για να ρυθμίσει το βήμα της ολοκλήρωσης, προσθέτουμε την εντολή:

```
If [ (Abs [Im [x/y]] < .001) &&
      ((Abs [Abs [x] - Sqrt [1 / (1 + ((Cos [2u] + 1) / Sin [2u]) ^ 2])]) < .001)
      || (Abs [Abs [x] - Sqrt [1 / (1 + ((Cos [2u] - 1) / Sin [2u]) ^ 2])]) < .001) )
    , Print [t, x, y ; Ne=0&; , Null];
```

Με αυτήν την εντολή, κάθε στιγμή κρίνω εάν ικανοποιείται η ΑΣΓΙ (με κάποια ανοχή, στο συγκεκριμένο παράδειγμα 0.001). Εάν ικανοποιείται, τότε διατάζω το πρόγραμμα να θεωρεί τη  $N_e=0$  απ' εκείνη τη στιγμή και μετά. Επομένως, η λογική είναι απλή: Ακολουθώ το  $N_e(t)$  που σου έδωσα αρχικά και μόλις αντιληφθείς ότι πληρείται η ΑΣΓΙ, "πέτα" το σωματίο στο κενό μηδενίζοντας απότομα την  $N_e$ .



**Εικόνα 1.46:** Ένας ΜΓΕ για  $x_0=1 \cdot e^{i0}$ ,  $E=3\text{GeV}$ ,  $\Delta m^2=7.2 \cdot 10^{-5}\text{eV}^2$  και  $\theta_0=32^\circ$ .



**Εικόνα 1.47:** Πιθανότητα επιβίωσης  $\nu_e$  που εστιάζεται από τον ΜΓΕ της εικόνας 1.46.

Μπορεί κανείς να φοβηθεί ότι το να ρίξω ακαριαία το  $N_e$  από κάποια τιμή στο μηδέν θα δημιουργήσει ανακρίβεια στην αριθμητική επίλυση της εξίσωσης εξέλιξης. Πράγματι, οι ακαριαίες μεταβολές είναι επικίνδυνες, γιατί έχουμε αναγκαστικά κβαντίσει το χρόνο  $t$ , οπότε αν η αλλαγή είναι πολύ απότομη είναι πιθανόν το  $dt$  να μην είναι αρκετά μικρό για να μπορέσει να την παρακολουθήσει πιστά. Όμως, στην προκειμένη περίπτωση που από  $N_e > 0$  πέφτουμε σε  $N_e = 0$ , αυτός ο κίνδυνος δεν υφίσταται συνήθως, γιατί λίγο πριν το μηδενισμό το  $dt_m \propto L_m$  είναι μικρότερο από το βήμα χρόνου εν κενώ:  $dt \propto L_0 > L_m$ . Οπότε στο πρώτο βήμα του προγράμματος στο κενό, η ήδη υπάρχουσα ακρίβεια είναι μεγαλύτερη από την απαιτούμενη. Βέβαια, το εν λόγω πρόβλημα μπορεί να υπάρχει, όταν ο μηδενισμός γίνει ενώ  $N_e < N_{e, \text{res}}$ , περίπτωση στην οποία  $L_m > L_0$  (βλ. εικόνα 1.34). Σίγουρα θα ήταν παρακινδυνευμένο να κάνουμε το ανάποδο, δηλαδή να έχουμε  $N_e=0$  και ακαριαία να θέσουμε  $N_e > 0$ .

Εντοπίσαμε έναν ΜΓΕ για νετρίνα που αρχικά είναι 100%

$\nu_e$ , με  $x_0=1 \cdot e^{i0}$ . Θεωρήσαμε ενέργεια  $E=3\text{GeV}$ ,  $\Delta m^2=7.2 \cdot 10^{-5}\text{eV}^2$  και  $\theta_0=32^\circ$ . Μπορεί η ΑΣΓΙ να εξαρτάται μόνο από το  $\theta_0$ , αλλά το αν ένα σώμα θα αποτελέσει ΜΓΕ εξαρτάται από όλες αυτές τις παραμέτρους και από το σχήμα και τη θέση του σώματος. Τοποθετήσαμε ένα αρχικό  $N_e(t)$  της μορφής (1.132) με  $t_0=4 \cdot 10^{24}\text{GeV}^{-1}$ ,  $\rho_0=10^{-16}\text{GeV}^3$  και  $\sigma=10^{24}\text{GeV}^{-1}$ . Ο ακαριαίος μηδενισμός έγινε στο σημείο  $t=3.03 \cdot 10^{24}\text{GeV}^{-1}$ . Επομένως, ιδού στην εικόνα 1.46 ο πρώτος ΜΓΕ που βρήκαμε. Στην εικόνα 1.47 φαίνεται το μετρήσιμο αποτέλεσμα, η πιθανότητα επιβίωσης ενός αρχικά ηλεκτρονικού νετρίνου. Το γεγονός ότι δεν είναι απόλυτα σταθεροποιημένη αυτή η πιθανότητα οφείλεται στην ανοχή 0.001 που βάλαμε στη διαφοροποιό εντολή if, οπότε η ΑΣΓΙ δεν επιτεύχθηκε ακριβώς, αλλά σχεδόν.

Τώρα που είδαμε ότι είναι δυνατόν να επιτευχθεί  $|x|^2=\text{const}$ , ας επανέλθουμε σε μια εννοιολογική συζήτηση. Θα μπορούσε κανείς να νομίζει ότι η σταθερότητα στην πιθανότητα παρατήρησης  $\nu_e$  ή  $\nu_\mu$  είναι ένα φαινόμενο δυναμικής ισορροπίας πληθυσμών. Δηλαδή ότι σε μια δέσμη το κάθε νεutrino μεμονωμένα ταλαντώνεται, αλλά επειδή όσα χάνονται από μια γεύση τόσα μεταπίπτουν στην ίδια γεύση, γι' αυτό τελικά σε μια παρατήρηση η πιθανότητα παρατήρησης της συγκεκριμένης γεύσης δε θα αλλάζει. Ας το μελετήσουμε.

Πρώτον, αν ισχύει η ΑΣΓΙ για όλα τα νετρίνα μιας δέσμης, τότε σίγουρα η δέσμη θα διατηρεί σταθερή σύσταση, εφόσον το κάθε νεutrino θα διατηρεί σταθερή πιθανότητα να παρατηρηθεί σαν  $\nu_e$  ή σαν  $\nu_\mu$ . Για παράδειγμα, αν βάλω σε μια δέσμη 100% νετρίνα που ικανοποιούν την ΑΣΓΙ(+), τότε θα έχουμε συνεχώς πιθανότητα παρατήρησης  $\nu_e$   $P(\nu_e)=0.28$  και πιθανότητα παρατήρησης  $\nu_\mu$   $P(\nu_\mu)=0.72\%$ . Αν βάλω 45% νετρίνα που ικανοποιούν την ΑΣΓΙ(+) και 55% νετρίνα που ικανοποιούν την ΑΣΓΙ(-), τότε θα έχω συνεχώς:

\*Πιθανότητα παρατήρησης  $\nu_e$  στη δέσμη =  $0.45 \cdot 0.28 + 0.55 \cdot 0.72 = 0.522$  ενώ,

\*πιθανότητα παρατήρησης  $\nu_\mu$  στη δέσμη =  $0.45 \cdot 0.72 + 0.55 \cdot 0.28 = 0.478 = 1 - 0.522$ .

Ας φανταστούμε τώρα μια δέσμη νετρίνων που δεν πληρούν την ΑΣΓΙ, όπως για παράδειγμα τα συνήθη νετρίνα που γεννιούνται σε ασθενείς αλληλεπιδράσεις και δεν έχουν υποστεί κανένα (σημαντικό) matter effect. Ας πούμε λοιπόν ότι η δέσμη αρχικά περιέχει 100% «φρέσκα»  $\nu_e$ , δηλαδή νετρίνα που αρχίζουν με πιθανότητα παρατήρησης  $\nu_e$   $P(\nu_e)=1$  (δηλαδή το καθένα έχει  $|x_0|^2=1$ ), αλλά στην πορεία η πιθανότητα αυτή θα ταλαντώνεται ημιτονοειδώς. Τότε, θα έχουμε τη στιγμή  $t$

\*πιθανότητα παρατήρησης  $\nu_e$  στη δέσμη =  $1.00 \cdot P(\nu_e, t) = P(\nu_e, t)$

Αν όμως έχουμε αρχικά στη δέσμη μας ποσοστό  $\alpha$  από «φρέσκα»  $\nu_e$  και ποσοστό  $\beta$  από «φρέσκα»  $\nu_\mu$ , τότε, τη στιγμή  $t=0$  θα έχω πιθανότητα  $\alpha$  να παρατηρήσω ένα  $\nu_e$  στη δέσμη και πιθανότητα  $\beta$  να παρατηρήσω ένα  $\nu_\mu$  στη δέσμη. Μετά από χρόνο  $t$ , κάθε αρχικά φρέσκο  $\nu_e$  θα πιθανότητα  $P(\nu_e \rightarrow \nu_e, t)$  να έχει επιβιώσει ενώ κάθε αρχικά φρέσκο  $\nu_\mu$  θα έχει πιθανότητα  $P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu, t) = P(\nu_e \rightarrow \nu_e, t)$  να έχει επιβιώσει. Όσα δεν επιβίωσαν από κάθε γεύση έχουν μεταβεί στην άλλη γεύση. Οπότε, στο χρόνο  $t$  ισχύει:

$$\begin{aligned} \text{πιθανότητα παρατήρησης } \nu_e \text{ στη δέσμη} &= \\ &= \alpha P(\nu_e \rightarrow \nu_e, t) + \beta P(\nu_\mu \rightarrow \nu_e, t) \\ &= \alpha P(\nu_e \rightarrow \nu_e, t) + \beta [1 - P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu, t)] \quad (1.146) \\ &= \alpha P(\nu_e \rightarrow \nu_e, t) + \beta [1 - P(\nu_e \rightarrow \nu_e, t)] \\ &= \beta + (\alpha - \beta) P(\nu_e \rightarrow \nu_e, t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{πιθανότητα παρατήρησης } \nu_\mu \text{ στη δέσμη} &= \\ &= \beta P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu, t) + \alpha P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu, t) \\ &= \beta P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu, t) + \alpha [1 - P(\nu_e \rightarrow \nu_e, t)] \quad (1.147) \\ &= \beta P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu, t) + \alpha [1 - P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu, t)] \\ &= \alpha + (\beta - \alpha) P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu, t) \end{aligned}$$

Από τις σχέσεις (1.146) και (1.147) είναι προφανές ότι αν επιθυμώ η (πιθανότητα παρατήρησης  $v_e$  στη δέσμη) να παραμένει σταθερή στο χρόνο, η μόνη περίπτωση είναι  $\alpha=\beta=0.5$ . Δηλαδή, αν επιλέξω να έχω τα μισά νετρόνια σε αρχική κατάσταση  $\{|x_0|^2=1, y_0=0\}$  και τα άλλα μισά να έχουν αρχική κατάσταση  $\{x_0=0, |y_0|^2=1\}$ , τότε σε ολόκληρο τον πληθυσμό της δέσμης θα επικρατεί μια δυναμική ισορροπία, ενώ το κάθε νεutrino θα ταλαντώνεται κανονικά. Δηλαδή η (πιθανότητα παρατήρησης  $v_e$  κατά τη μέτρηση ενός συγκεκριμένου νετρίνου) θα διακυμαίνεται ημιτονοειδώς, ενώ η (πιθανότητα παρατήρησης  $v_e$  στη δέσμη) θα παραμένει σταθερή και ίση με 0.5. Είναι σαφές ότι ουδεμία σχέση έχει η σταθερότητα της γεύσης που επιβάλλει η ΑΣΓΙ με το φαινόμενο που περιγράψαμε και που αφορά έναν κατάλληλα κατασκευασμένο πληθυσμό «φρέσκων» νετρίνων. Η ΑΣΓΙ μας λέγει ότι ένα συγκεκριμένο νεutrino θα πάψει να ταλαντώνεται (επομένως και μια ομάδα από τέτοια εστιασμένα νετρίνα θα κάνει το ίδιο), ενώ η παραπάνω κατάσταση  $\alpha=\beta=0.5$  δεν έχει κανένα βαθύτερο φυσικό περιεχόμενο, από το απλό αριθμητικό φαινόμενο του «όσα έρχονται τόσα φεύγουν».

Θα μπορούσε κανείς να αναρωτηθεί:

“Εγώ στο εργαστήριο μπορώ να επέμβω μόνο στην ποσοστιαία σύσταση της δέσμης που παράγω. Να φροντίσω να περιέχεται τάδε ποσοστό  $v_e$ . Πώς μπορώ να επηρεάσω τους μιγαδικούς αριθμούς  $x_0$  και  $y_0$  ως προς τη μιγαδική τους φάση, το λεγόμενο argument τους; Οπότε, πώς είναι δυνατόν να πετύχω στο εργαστήριο την ΑΣΓΙ; Τέλος πάντων, τα μιγαδικά  $x$  και  $y$  έχουν μόνο μαθηματική υπόσταση και αυτά που πραγματικά υπάρχουν είναι τα  $|x|^2$  και  $|y|^2$ . Τι είναι λοιπόν η ΑΣΓΙ που αναφέρεται στα  $x_0$  και  $y_0$  ως μιγαδικούς.”

Η απάντηση είναι ότι: Πρώτον, τα  $x$  και  $y$  είναι μαθηματικές οντότητες (συνιστώσες της κατάστασης του νετρίνου στην ιδιοβάση των γεύσεων) και δεν υπάρχουν στη φύση μόνο μέσω των  $|x|^2$  και  $|y|^2$ , αλλά και τα arguments τους έχουν σημασία. Ο λόγος που έχουν σημασία φαίνεται στη διαφορική εξίσωση χρονικής εξέλιξης, που είναι μια διαφορική εξίσωση μιγαδικών μεταβλητών. Κάθε στιγμή τα  $dx$  και  $dy$  εξαρτώνται τόσο από τα πραγματικά όσο και από τα φανταστικά μέρη των  $x$  και  $y$ .

Δεύτερον, είναι γεγονός ότι δεν είναι καθόλου εύκολο να καθορίσουμε τα arguments των  $x_0$  και  $y_0$ . Ούτε και τα μέτρα τους δε μπορούμε να ρυθμίσουμε εύκολα, εφόσον τα νετρίνα δημιουργούνται σε κόμβους ασθενών αλληλεπιδράσεων όπου παράγονται πάντα με  $|x_0|=1$  ή  $|y_0|=1$  αναλόγως αν είναι  $v_e$  ή  $v_\mu$  αντίστοιχα. Τα νετρίνα δημιουργούνται με συγκεκριμένη γεύση, οπότε έχουν αρχικά καθορισμένο μονάχα το μέτρο  $|x_0|^2=1$  ή 0, αλλά το αρχικό argument μπορεί να είναι οποιαδήποτε γωνία. Συμβαίνει όταν το  $|x_0|^2$  είναι 0 ή 1, δηλαδή κατά κάθε ασθενή δημιουργία νετρίνου, να μην εξαρτάται η παρατηρούμενη  $|x(t)|^2$  από το αρχικό argument. Δε συμβαίνει όμως το ίδιο όταν  $0 < |x_0|^2 < 1$ . Είναι λοιπόν ψευδαίσθηση ότι το αρχικό  $|x_0|^2$  καθορίζει τα πάντα. Όταν το νεutrino από την ύλη επανέρχεται στο κενό, τότε δεν είναι απαραίτητο ότι  $|x|^2=0$  ή 1, οπότε φανερώνεται η φυσική σημασία του argument των  $x$  και  $y$ . Δηλαδή το matter effect είναι μια θαυμάσια περίπτωση αναδείξεως μιας μαθηματικής παραμέτρου που έχει φυσική σημασία και συνήθως είναι κρυμμένη, διότι βλέπουμε νετρίνα μιας ειδικής κατηγορίας, αυτά που παράγονται από ασθενείς κόμβους και δεν έχουν υποστεί ποτέ στην ιστορία τους σημαντικό matter effect.

## Ταλαντώσεις τριών γεύσεων στην ύλη

Η εύρεση της εξίσωσης χρονικής εξέλιξης στο χώρο των τριών γεύσεων δε διαφέρει από τη διαδικασία που ακολουθήσαμε στην περίπτωση των δύο γεύσεων. Και πάλι θα εισάγουμε την αλληλεπίδραση με την ύλη που διαφοροποιεί τα  $\nu_e$ . Μόνο οι πράξεις θα είναι κάπως πιο επίπονες, διότι ο πίνακας μίξης  $U$  δεν είναι πια ένας απλός  $2 \times 2$  πίνακας μίξης με μία παράμετρο, αλλά ο πίνακας στροφής στις τρεις διαστάσεις που δίνεται στη σχέση (1.6).

Και πάλι, ισχύει η (1.95). Για να μη γίνονται τις πράξεις δυσκολότερες, διώχνουμε από την αρχή τον όρο  $p$  που είναι κοινός στα τρία στοιχεία του διαγωνίου πίνακα  $H_m$ , οπότε η (1.95) γράφεται:

$$H_f = \frac{1}{2E} U \begin{pmatrix} m_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & m_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3^2 \end{pmatrix} U^\dagger \quad (1.148)$$

Αν θεωρήσουμε ότι ισχύει η ορθή ιεραρχία (normal hierarchy), τότε, εισάγοντας και το δυναμικό που επάγεται λόγω της παρουσίας της ύλης, η εξίσωση χρονικής εξέλιξης στις τρεις γεύσεις γράφεται:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \left[ \frac{1}{2E} U \begin{pmatrix} m_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & m_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3^2 \end{pmatrix} U^\dagger + \begin{pmatrix} V_{CC} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} \quad (1.149)$$

Αν θέλουμε να είμαστε ακριβείς, δε μένει παρά να γράψουμε προσεκτικά το σύστημα των τριών αυτών διαφορικών εξισώσεων και να τις λύσουμε αριθμητικά. Θα κάνουμε κάτι τέτοιο στη συνέχεια. Πρώτα, όμως, αξίζει να αναφέρουμε ότι, όπως κάναμε και εν κενώ, γίνεται να εφαρμόσουμε ορισμένες προσεγγίσεις που ανάγουν το πρόβλημα των τριών γεύσεων σε πρόβλημα δύο γεύσεων:

Ο πίνακας  $U$  (αγνοώντας τις φάσεις Majorana που όπως έχουμε εξηγήσει δεν επηρεάζουν τις ταλαντώσεις) τριχοτομείται ως εξής:

$$U = V_{23} W_{13} V_{12}$$

$$\text{όπου } V_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix}, W_{13} = \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13} e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13} e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix}, V_{12} = \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.150)$$

Μπορούμε άφοβα, όπως έχουμε εξηγήσει, να αφαιρέσουμε την ποσότητα  $m_1^2$  από τα τρία στοιχεία της διαγωνίου του πίνακα  $M^2 = \text{diag}\{m_1^2, m_2^2, m_3^2\}$ . Σε περιπτώσεις πειραμάτων ατμοσφαιρικών νετρίνων ή νετρίνων πυρηνικών αντιδραστήρων και επιταχυντών, ο όρος  $\Delta m_{21}^2$  μπορεί να αγνοηθεί ως δύο τάξεις μεγέθους μικρότερος από τον  $\Delta m_{31}^2$ . Έτσι, ο πίνακας  $M^2$  μπορεί προσεγγιστικά να αντικατασταθεί από τον  $\tilde{M}^2 = \text{diag}\{0, 0, \Delta m_{31}^2\}$ . Ο  $\tilde{M}^2$  μετατίθεται με τον πίνακα στροφής  $V_{12}$ . Ας ονομάσουμε  $V = \text{diag}\{V_{CC}, 0, 0\}$ . Προφανώς, ο  $V$  μετατίθεται με τον  $V_{23}^\dagger$ . Χρησιμοποιώντας όλα αυτά, η εξίσωση χρονικής εξέλιξης γράφεται:

$$\begin{aligned} i(d/dt)v &= \left[ V_{23} W_{13} V_{12} (\tilde{M}^2 / 2E) V_{12}^\dagger W_{13}^\dagger V_{23}^\dagger + V \right] v \\ \Rightarrow i(d/dt)v &= \left[ V_{23} W_{13} (\tilde{M}^2 / 2E) W_{13}^\dagger V_{23}^\dagger + V \right] v \\ \Rightarrow i(d/dt)V_{23}^\dagger v &= \left[ W_{13} (\tilde{M}^2 / 2E) W_{13}^\dagger V_{23}^\dagger + V_{23}^\dagger V \right] v \\ \Rightarrow i(d/dt)(V_{23}^\dagger v) &= \left[ W_{13} (\tilde{M}^2 / 2E) W_{13}^\dagger + V \right] (V_{23}^\dagger v) \end{aligned} \quad (1.151)$$

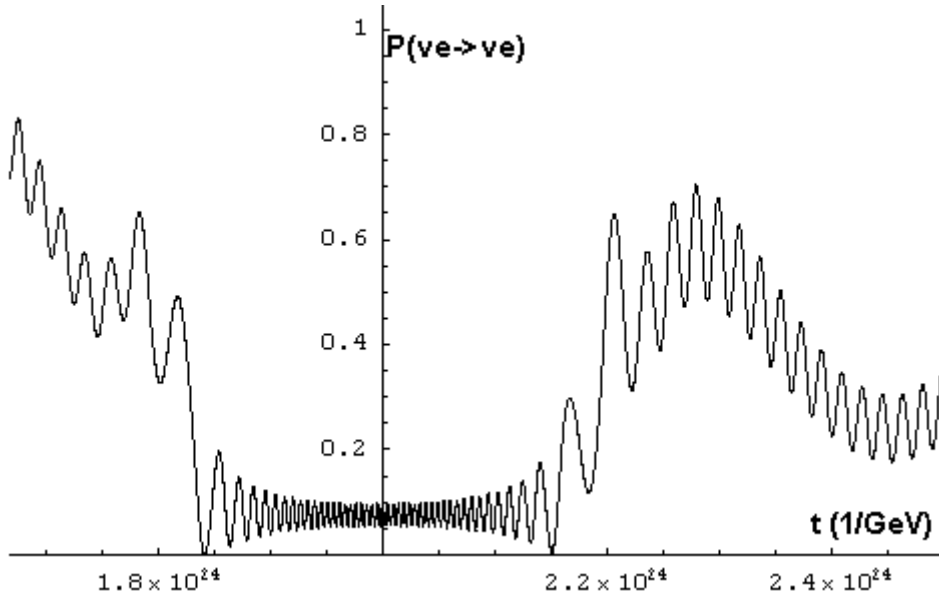
Ας χρησιμοποιήσουμε αντί για το  $\nu$ , δηλαδή το άνυσμα του νετρίνου στην ιδιοβάση της  $H_{\nu}$ , μια διαφορετική βάση, στην οποία το άνυσμα γράφεται  $\tilde{\nu} = \mathbf{V}_{23}^{\dagger} \nu$ . Τότε, η (1.151) γράφεται:

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_1 \\ \tilde{\nu}_2 \\ \tilde{\nu}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta m_{31}^2}{2E} s_{13}^2 + V_{CC} & 0 & \frac{\Delta m_{31}^2}{2E} s_{13} c_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\Delta m_{31}^2}{2E} s_{13} c_{13} & 0 & \frac{\Delta m_{31}^2}{2E} c_{13}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_1 \\ \tilde{\nu}_2 \\ \tilde{\nu}_3 \end{pmatrix}$$

οπότε ανάγεται σε ένα πρόβλημα δύο γεύσεων:

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_1 \\ \tilde{\nu}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\Delta m_{31}^2}{4E} \cos 2\theta_{13} + \frac{V_{CC}}{2} & \frac{\Delta m_{31}^2}{4E} \sin 2\theta_{13} \\ \frac{\Delta m_{31}^2}{4E} \sin 2\theta_{13} & \frac{\Delta m_{31}^2}{4E} \cos 2\theta_{13} - \frac{V_{CC}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_1 \\ \tilde{\nu}_3 \end{pmatrix} \quad (1.152)$$

Είναι εύκολο να προσαρμόσουμε τον αλγόριθμο που χρησιμοποιήθηκε για την αριθμητική επίλυση της διαφορικής εξίσωσης χρονικής εξέλιξης στις δύο γεύσεις, προκειμένου να επιλύει το σύστημα με τρεις γεύσεις. Χρησιμοποιούμε τις κεντρικές τιμές των παραμέτρων που αναφέρονται στις σχέσεις (1.62) και (1.61). Στην εικόνα 1.48 βλέπουμε την πιθανότητα επιβίωσης ενός αρχικά ηλεκτρονικού νετρίνου, υπό την επίδραση του  $N_e(t)$  με  $\rho_0 = 10^{-16} \text{GeV}^3$ ,  $t_0 = 0.2 \cdot 10^{25} \text{GeV}^{-1}$  και  $\sigma = 10^{23} \text{GeV}^{-1}$ . Έχει γίνει επικέντρωση στους χρόνους κατά τους οποίους το νεutrino περνά μέσα από την ύλη. Στην εικόνα 1.49 βλέπουμε την πιθανότητα  $P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu)$  μαζί με την  $P(\nu_e \rightarrow \nu_\tau)$ . Δεν είναι δυνατόν να έχουμε μια πολύ καθαρή εικόνα για ολόκληρο τον ολοκληρωμένο χρόνο, γιατί οι πιθανότητες ταλαντεύονται με πολύ μικρότερο μήκος κύματος.



**Εικόνα 1.48:** Πιθανότητα επιβίωσης  $\nu_e$  ενέργειας  $3 \text{GeV}$ , με  $\delta=0$ , καθώς διέρχεται από ύλη με  $N_e(t)$  γκαουσιανό με  $\rho_0 = 10^{-16} \text{GeV}^3$ ,  $t_0 = 0.2 \cdot 10^{25} \text{GeV}^{-1}$  και  $\sigma = 10^{23} \text{GeV}^{-1}$

Αυτό που έχει ενδιαφέρον είναι αν υπάρχει ΑΣΓΠ στην περίπτωση των τριών γεύσεων. Θα δούμε ότι υπάρχει. Αλλά ο ευθύς τρόπος με τον οποίον εξαγάγαμε την ΑΣΓΠ στις δύο γεύσεις θα είναι πολύ επίπονος στις τρεις γεύσεις. Γι' αυτό θα δείξουμε πρώτα πώς μπορούμε να εξαγάγουμε την ΑΣΓΠ ευκολότερα στις δύο γεύσεις και θα χρησιμοποιήσουμε αυτόν τον ευκολότερο τρόπο στην περίπτωση των τριών γεύσεων.

Στις δύο γεύσεις χρησιμοποιήσαμε την εξίσωση χρονικής εξέλιξης στην ιδιοβάση του flavor και απαιτήσαμε  $\partial |x|^2 / \partial t = 0 \forall t$ . Ο λόγος που το flavor ταλαντώνεται είναι ότι το νεutrino που παράγεται σε έναν ασθενή κόμβο δεν είναι ιδιοκατάσταση της μάζας. Δηλαδή, αρχικά δεν έχουμε ούτε  $v_1=0$  ούτε  $v_2=0$ , όπου  $v_{1,2}$  είναι οι (μυγαδικές) προβολές του νεutrino στην ιδιοβάση των μαζών. Η συνθήκη που θα επέτρεπε στο νεutrino να μην ταλαντώνεται είναι να βρίσκεται αρχικά σε μία ιδιοκατάσταση μάζας. Ας απαιτήσουμε, λοιπόν για παράδειγμα,  $v_1=0$  αρχικά και να δούμε αν η συνθήκη που θα προκύψει θα μοιάζει με την ΑΣΓΙ της σχέσεως (1.142).

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v_e \\ v_\mu \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \theta_0 & \sin \theta_0 \\ -\sin \theta_0 & \cos \theta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \theta_0 & -\sin \theta_0 \\ \sin \theta_0 & \cos \theta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_e \\ v_\mu \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Επομένως, αν απαιτήσουμε  $v_1=0$  έχουμε:

$$\cos \theta_0 v_e = \sin \theta_0 v_\mu \Rightarrow \frac{v_e}{v_\mu} = \tan \theta_0 \quad (1.153)$$

Η (1.153) συνεπαληθεύεται με την απαίτηση  $|v_e|^2 + |v_\mu|^2 = 1$  για:

$$|v_e| = 1 / \sqrt{1 + (\cot \theta_0)^2} \quad (1.154)$$

Αν απαιτήσουμε  $v_2=0$  τότε παίρνουμε:

$$\frac{v_e}{v_\mu} = -\cot \theta_0 \quad (1.155)$$

$$|v_e| = 1 / \sqrt{1 + (\tan \theta_0)^2} \quad (1.156)$$

Δεδομένου ότι:

$$\frac{\cos 2\theta_0 + 1}{\sin 2\theta_0} = \cot \theta_0, \quad \frac{\cos 2\theta_0 - 1}{\sin 2\theta_0} = -\tan \theta_0 \quad (1.157)$$

βλέπουμε ξεκάθαρα ότι οι (1.153) και (1.154) ταυτίζονται με την ΑΣΓΙ(+) της σχέσης (1.142), ενώ οι (1.155) και (1.156) ταυτίζονται με την ΑΣΓΙ(-).

Επομένως, όπως ήταν αναμενόμενο, η συνθήκη μη ταλάντωσης ταυτίζεται με τη συνθήκη αρχικά να έχουμε νεutrino καθορισμένης μάζας. Αυτό το απόφθεγμα θα εφαρμόσουμε τώρα στην περίπτωση των τριών γεύσεων.

Ισχύει η σχέση  $v_\alpha = \sum_{i=1}^3 U_{\alpha i} v_i \Rightarrow v_i = \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} U_{\alpha i}^* v_\alpha$ . Είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι, έ-

χοντας πάντα την απαίτηση  $|v_e|^2 + |v_\mu|^2 + |v_\tau|^2 = 1$ , παίρνουμε:

$$\boxed{\begin{aligned} |v_\mu| &= 1 / \sqrt{1 + |A|^2 + |B|^2} \\ v_e &= A v_\mu, \quad v_\tau = B v_\mu \end{aligned}} \quad (1.158)$$

όπου για να ισχύει  $v_{i'} = 1, v_i = v_i = 0$  τα A, B είναι:

$$\boxed{A = \frac{U_{\mu i}^* U_{\tau i'}^* - U_{\mu i'}^*}{U_{\tau i}^*}, \quad B = \left( -\frac{U_{e i}^*}{U_{\tau i}^*} A - \frac{U_{\mu i}^*}{U_{\tau i}^*} \right)} \quad (1.159)$$

Η σχέση (1.158) με τα A και B όπως ορίζονται στην (1.159) αποτελεί την ΑΣΓΙ στις τρεις γεύσεις.



Όπως περιμέναμε, στις τρεις γεύσεις η ΑΣΓΙ ικανοποιείται με τρεις τρόπους. Αν ταυτίσουμε το  $x$  με το  $v_\epsilon$ , το  $y$  με το  $v_\mu$  και το  $z$  με το  $v_\tau$ , υπάρχουν τρεις τριάδες  $(|x_0|^2, |y_0|^2, |z_0|^2)$  για τις οποίες τα  $|x|^2$ ,  $|y|^2$  και  $|z|^2$  παραμένουν σταθερά. Οι τιμές που παίρνουν εξαρτώνται από τις τρεις γωνίες μίξης και το  $\delta$ .

## Δεύτερο Κεφάλαιο – Πειράματα νετρίνων

Σε αυτό το κεφάλαιο πρόκειται να αναφερθούμε περιληπτικά σε ορισμένα σημαντικά πειράματα νετρίνων που έγιναν ή που ακόμα βρίσκονται σε εξέλιξη. Ο σκοπός είναι να γίνει κατανοητή η συμβολή κάθε πειράματος στη γνώση που έχουμε σήμερα για τα νετρίνα. Φυσικά, ιδιαίτερο βάρος θα δοθεί στο πείραμα MINOS, επί του οποίου εκπονείται η παρούσα εργασία, το οποίο θα παρουσιαστεί με αρκετά λεπτομερή αναφορά τόσο στους στόχους που έχει θέσει όσο και στα τεχνικά του χαρακτηριστικά.

Το πείραμα που πρώτο παρατήρησε το νετρίνο ήταν αυτό των Fred Reines και Cowan, το 1956, που χρησιμοποίησε έναν όγκο χλωριούχου καδμίου με υλικό σπινθηρισμού, κοντά σε έναν πυρηνικό αντιδραστήρα.

Σήμερα, τα πειράματα νετρίνων είναι πολυάριθμα και χωρίζονται στις ακόλουθες κατηγορίες:

- Πειράματα ηλιακών νετρίνων
- Πειράματα διπλής β-διάσπασης
- Πειράματα νετρίνων από πυρηνικούς αντιδραστήρες
- Πειράματα ατμοσφαιρικών νετρίνων
- Τηλεσκόπια νετρίνων
- Πειράματα άμεσης μέτρησης της μάζας των νετρίνων
- Βραχείας εμβέλειας πειράματα επιταχυντών
- Μακράς εμβέλειας πειράματα επιταχυντών

Για καθεμιά από τις παραπάνω κατηγορίες θα περιγράψουμε ένα αντιπροσωπευτικό πείραμα.



### Το πείραμα SNO

Το πείραμα SNO είναι ένα πείραμα ηλιακών νετρίνων και το πλήρες όνομά του είναι *Sudbury Neutrino Observatory*. Λαμβάνει δεδομένα από το Νοέμβριο του 1999, συγκεντρώνοντας πληροφορίες για τα νετρίνα που προέρχονται από τον Ήλιο και για την κατάσταση που επικρατεί στο εσωτερικό του Ηλίου. Ο ανιχνευτής του πειράματος βρίσκεται σε βάθος 6800 ποδών, στο ορυχείο Creighton, στο Sudbury του Καναδά. Πρόκειται για έναν σφαιρικό ανιχνευτή Cherenkov που περιέχει βαρύ ύδωρ, δηλαδή  $D_2O$ . Όταν εισέρχονται στο βαρύ ύδωρ νετρίνα παράγουν ακτινοβολία Cherenkov η οποία ανιχνεύεται από τους 9600 φωτοπολλαπλασιαστές που βρίσκονται διατεταγμένοι στα όρια της σφαιρικής δεξαμενής. Η δεξαμενή είναι κατασκευασμένη από ακρυλικό υλικό, έχει διάμετρο 12m και περιέχει συνολικά 1000 τόνους βαρέως ύδατος. Η σφαιρική δεξαμενή περιέχεται σε μια κυλινδρική δεξαμενή με κανονικό νερό ( $H_2O$ ), ύψους 30 μέτρων. Χάρη στο μεγάλο πάχος βράχου που βρίσκεται πάνω από τον ανιχνευτή επιτυγχάνεται η θωράκισή του από την κοσμική ακτινοβολία. Επιπλέον, για να μειωθεί ο θόρυβος από προϊόντα πυρηνικών διασπάσεων που βρίσκονται στη σκόνη και αλλού, ο χώρος του ανιχνευτή διατηρείται σε συνθήκες υψηλής καθαριότητας.

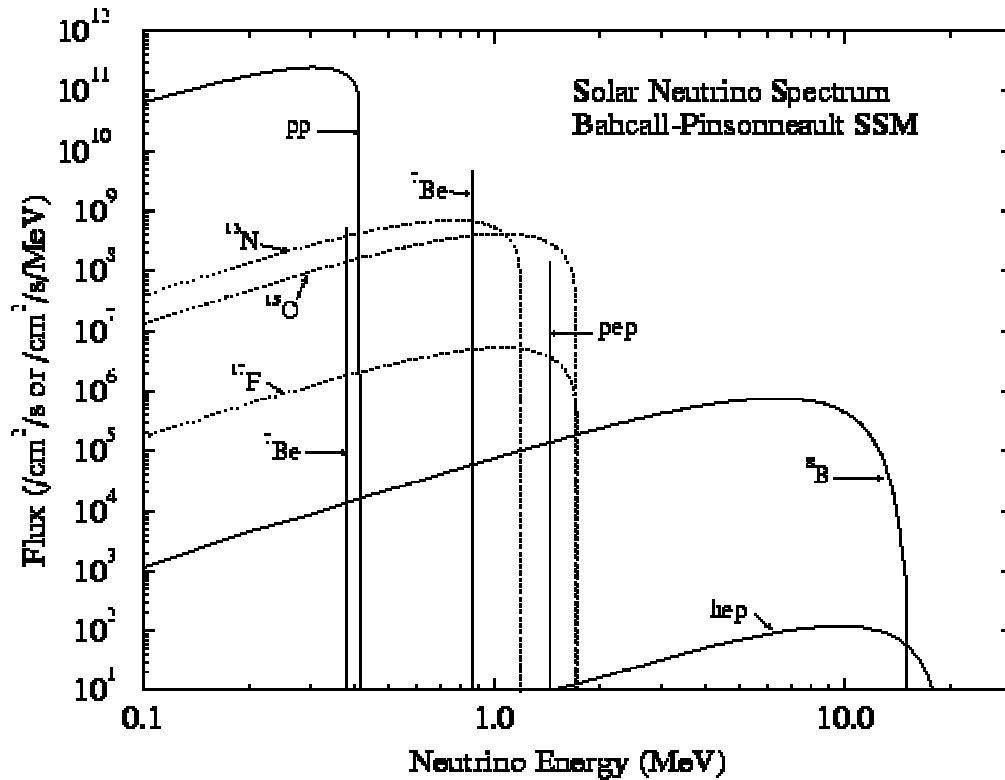
Ο σκοπός για τον οποίο δημιουργήθηκε το SNO είναι να μετρήσει τη ροή, την ενέργεια και την κατεύθυνση των νετρίνων που δημιουργούνται στον ήλιο. Επίσης, σκόπευε να παρατηρήσει και τους άλλους δύο τύπους νετρίνων, το  $\nu_\mu$  και το  $\nu_\tau$ .

Το ενδιαφέρον της επιστημονικής κοινότητας στράφηκε στα ηλιακά νετρίνα προκειμένου να δοθεί απάντηση στο άλυτο πρόβλημα των ηλιακών νετρίνων. Το πρόβλημα αυτό ανέκυψε το 1967, όταν ο Ray Davis επιχείρησε να μετρήσει τη ροή των ηλιακών νετρίνων χρησιμοποιώντας 600 τόνους χλωρίνης στο ορυχείο Homestake, στη South Dakota. Αυτό που παρατηρήθηκε είναι ότι η ροή  $\nu_e$  είναι περίπου το 1/3 αυτής που υπολόγιζαν τα ηλιακά μοντέλα. Στον πίνακα 2.1 βλέπουμε τις αντιδράσεις που παράγουν τα ηλιακά νετρίνα σύμφωνα με το μηχανισμό p-p, ενώ παρατίθενται η ενέργεια της αντίδρασης, η μέση ενέργεια που λαμβάνει το νετρίνο και ο χρόνος ζωής, που σχετίζεται με την ενεργό διατομή της κάθε αντίδρασης. Στην εικόνα 2.1 βλέπουμε και το φάσμα των νετρίνων που προβλέπουν τα ηλιακά μοντέλα.

Αντίδραση	$Q$ (MeV)	$\langle \mathcal{Q}_{\nu_e} \rangle$	Lifetime (yr)
${}^1H(p, e^+ \nu_e) {}^2H$	1.442	0.265	$10^{10}$
${}^1H(pe^-, \nu_e) {}^2H$	1.442	1.442	$10^{12}$
${}^2H(p, \gamma) {}^3He$	5.494	-	$10^{-8}$
${}^3He(p, e^+ \nu_e) {}^4He$	19.795	9.625	$10^{12}$
${}^3He({}^3He, 2p) {}^4He$	12.860	-	$10^5$
${}^3He({}^4He, \gamma) {}^7Be$	1.586	-	$10^6$
${}^7Be(e^-, \nu_e) {}^7Li$	0.862	0.862	$10^{-1}$
${}^7Li(p, \alpha) {}^4He$	17.347	-	$10^{-5}$

${}^7\text{Be}(p, \gamma){}^8\text{B}$	0.137	-	$10^2$
$({}^8\text{B}, e^+\nu_e){}^8\text{Be}^* ({}^8\text{Be}^*, \alpha){}^4\text{He}$	17.98	6.71	$10^{-8}$

Πίνακας 2.1: Αντιδράσεις παραγωγής ηλιακών νετρίνων



Εικόνα 2.1: Φάσμα ηλιακών νετρίνων

Επειδή η εμπιστοσύνη που υπάρχει στα ηλιακά μοντέλα είναι πολύ μεγάλη, καθώς αυτά ερμηνεύουν πλήθος άλλων φαινομένων, η επιστημονική κοινότητα άρχισε να ερευνά το ενδεχόμενο τα νετρίνα να ταλαντώνονται, φαινόμενο που πλέον είναι εξακριβωμένο ότι συμβαίνει, όπως έχουμε ήδη δει στο πρώτο κεφάλαιο.

Τρεις είναι οι κύριες αντιδράσεις των νετρίνων με το βαρύ ύδωρ:

**i:** Η CC αντίδραση  $\nu_e + d \rightarrow p + p + e^-$  (quasi-elastic σκέδαση)

Το νεutrino ανταλλάζει ένα W μποζόνιο με το νεutrόνιο του δευτερίου και το μετατρέπει σε πρωτόνιο, ενώ το ίδιο το νεutrino δίνει τη θέση του σε ηλεκτρόνιο. Το ηλεκτρόνιο, ως ελαφρότερο, λαμβάνει σχεδόν όλη την ενέργεια που αρχικά είχε το νεutrino. Λόγω της υψηλής ενέργειας που αρχικά έχει το νεutrino, το ηλεκτρόνιο αρχικά κινείται με ταχύτητα σχεδόν ίση με c, οπότε εκπέμπει Cherenkov ακτινοβολία, εφόσον η ταχύτητα του φωτός στο D<sub>2</sub>O είναι μικρότερη από c. Σχηματική αναπαράσταση της διαδικασίας φαίνεται στην εικόνα 2.2.

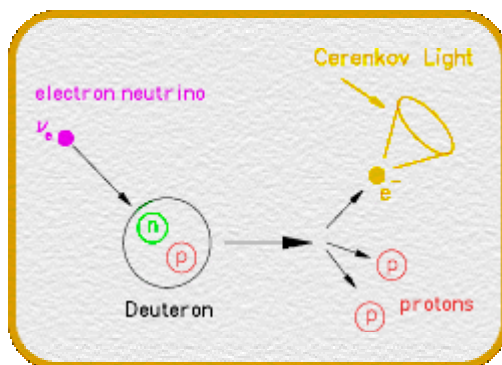
**ii:** Η NC αντίδραση  $\nu + d \rightarrow p + n + \nu$  (διάσπαση του δευτερίου)

Με την ανταλλαγή ενός Z μποζονίου το δευτέριο διασπάται και το νεutrόνιο σκεδάζεται από πυρήνα σε πυρήνα. Όταν απορροφηθεί από κάποιον πυρήνα, κατά την αποδιέγερση του παραγόμενου πυρήνα εκπέμπεται ακτινοβολία  $\gamma$  που στη συνέχεια σκεδάζει ηλεκτρόνια, τα οποία με τη σειρά τους εκπέμπουν ακτινοβολία Cherenkov. Το πόσο αποτελεσματική είναι αυτή η διαδικασία ανίχνευσης του νετρίνου εξαρτάται από το πόσο πιθανή είναι η απορρό-

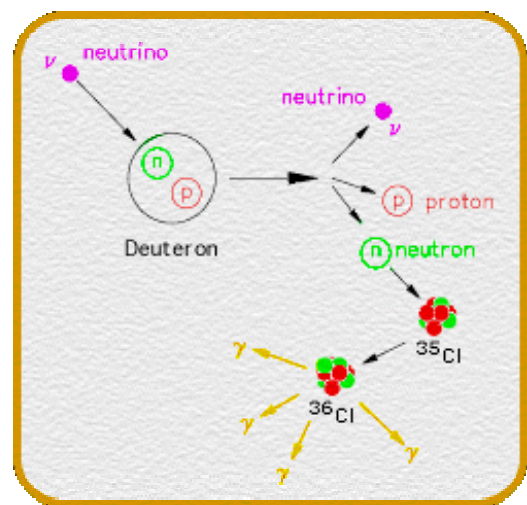
φηση του νετρονίου από τους γύρω πυρήνες. Στο περιβάλλον του βαρέως ύδατος αυτή η απορρόφηση είναι μεν δυνατή, αλλά όχι πολύ πιθανή. Γι' αυτό έγινε αναβάθμιση του ανιχνευτή διαλύοντας στο βαρύ ύδωρ 2 τόνους αλάτι (NaCl). Έτσι, αυξάνεται η πιθανότητα απορρόφησης του νετρονίου από τους πυρήνες  $^{35}\text{Cl}$ . Σχηματική αναπαράσταση της διαδικασίας φαίνεται στην εικόνα 2.3. Στην εικόνα 2.4 βλέπουμε τη μεγάλη βελτίωση της αποτελεσματικότητας (efficiency) μετά την προσθήκη του αλάτος. Για να γίνει η μέτρηση της efficiency χρησιμοποιήθηκε η ραδιενεργός πηγή νετρίνων  $^{252}\text{Cf}$ .

iii: Ελαστική σκέδαση με ηλεκτρόνιο:  $\nu + e^- \rightarrow \nu + e^-$

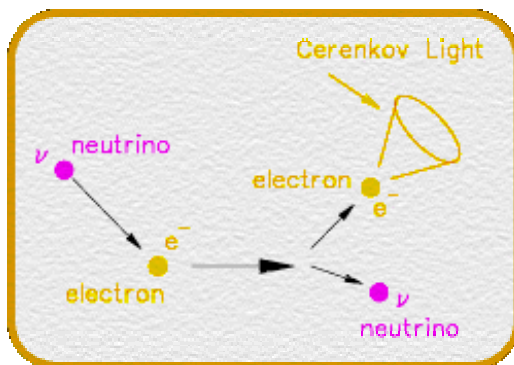
Αυτή είναι η πιο απλή από τις αλληλεπιδράσεις που γίνονται στο βαρύ ύδωρ και το αποτέλεσμα της είναι απλώς ένα ταχέως κινούμενο ηλεκτρόνιο, που εκπέμπει Cherenkov ακτινοβολία. Το Standard Model προβλέπει τρία τέτοια γεγονότα κάθε μέρα στο SNO. Η αλληλεπίδραση αυτή φαίνεται σχηματικά στην εικόνα 2.5.



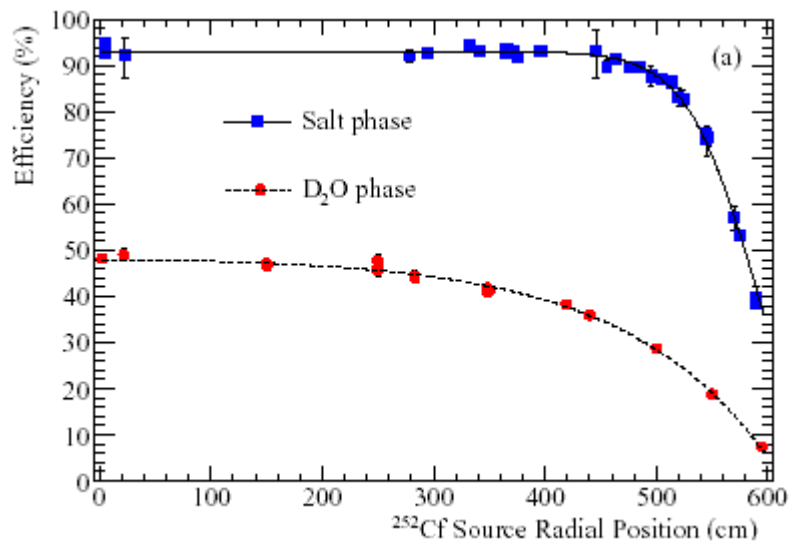
Εικόνα 2.2: CC ανίχνευση  $\nu_e$  στο βαρύ ύδωρ.



Εικόνα 2.3: NC ανίχνευση  $\nu$  στο βαρύ ύδωρ.



Εικόνα 2.5: σκέδαση  $\nu$  στο βαρύ ύδωρ.

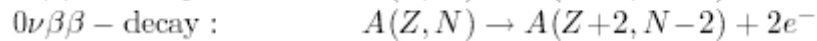
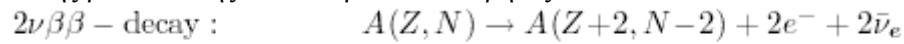


**Εικόνα 2.4:** Αύξηση της efficiency στην ανίχνευση νετρίνων μετά την προσθήκη του άλατος.

Το SNO καταγράφει περίπου 10 γεγονότα κάθε μέρα. Μετρήσεις από τα έτη 2001 και 2002 έδειξαν καθαρά ότι περίπου τα 2/3 των  $\nu_e$  που παράχθηκαν στον Ήλιο μετατράπηκαν σε  $\nu_\mu$  ή  $\nu_\tau$  κατά τη διαδρομή τους προς της Γη. Αυτό εξηγεί γιατί το πείραμα του Ray Davis παρατήρησε μόνο το 1/3 της ροής που ανέμενε.

### Το πείραμα HEIDELBERG-MOSCOW

Το πείραμα HEIDELBERG-MOSCOW (HM) είναι ένα από τα πειράματα που αναζητούν γεγονότα διπλής β-διάσπασης άνευ νετρίνων σε πυρήνες  $^{76}\text{Ge}$ .



Η διπλή β-διάσπαση αντιστοιχεί σε δύο διαδοχικές β-διασπάσεις. Είναι ένα φαινόμενο εξαιρετικά σπάνιο, με  $t_{1/2} \sim 10^{21}$  yr, αλλά έχει παρατηρηθεί και είναι απόλυτα σύμφωνη με το Standard Model. Αυτό που έχει μεγαλύτερο ενδιαφέρον είναι η άνευ νετρίνου διπλή β-διάσπαση (0νββ), η οποία είναι πέραν του Standard Model καθώς παραβιάζει τη διατήρηση του λεπτονικού αριθμού. Από τα όρια που τίθενται στο χρόνο ζωής αυτής της διάσπασης καθορίζονται τόσο η ενεργός μάζα του νετρίνου, όσο και άλλες παράμετροι που αφορούν στην υπερσυμμετρία και άλλες θεωρίες.

Το πείραμα HM βρίσκεται στο υπόγειο εργαστήριο του Gran Sasso, στην Ιταλία και χρησιμοποιεί πέντε ανιχνευτές 10.9Kg  $^{76}\text{Ge}$ , εμπλουτισμένου σε ποσοστό 86%. Χάρη σ' αυτόν τον εμπλουτισμό, η ευαισθησία του πειράματος αντιστοιχεί σε αυτήν που θα είχε ένα πείραμα που θα χρησιμοποιούσε 1.2 τόνους φυσικού Ge. Το γεγονός ότι το εργαστήριο είναι υπόγειο μειώνει το θόρυβο που προέρχεται από κοσμικά μόνια κατά 6 τάξεις μεγέθους. Επίσης, προστασία από το θόρυβο παρέχει η μολύβδινη προάσπιση του ανιχνευτή και η διαβροχή του με άζωτο.

Το πείραμα HM είναι εν εξελίξει και έχει ήδη δώσει αποτελέσματα για την ενεργό μάζα του νετρίνου.

$$T = (0.8 - 18.3) \times 10^{25} \text{ years (95\% C.L.)}$$

$$\text{Best Value: } T = 1.5 \times 10^{25} \text{ years}$$

Από τους οποίους χρόνους συνεπάγεται:

$$m_{\nu} = (0.05 - 0.84) \text{ eV (95\% C.L.)}$$

$$\text{Best value: } m_{\nu} = 0.39 \text{ eV (95\% C.L.)}$$

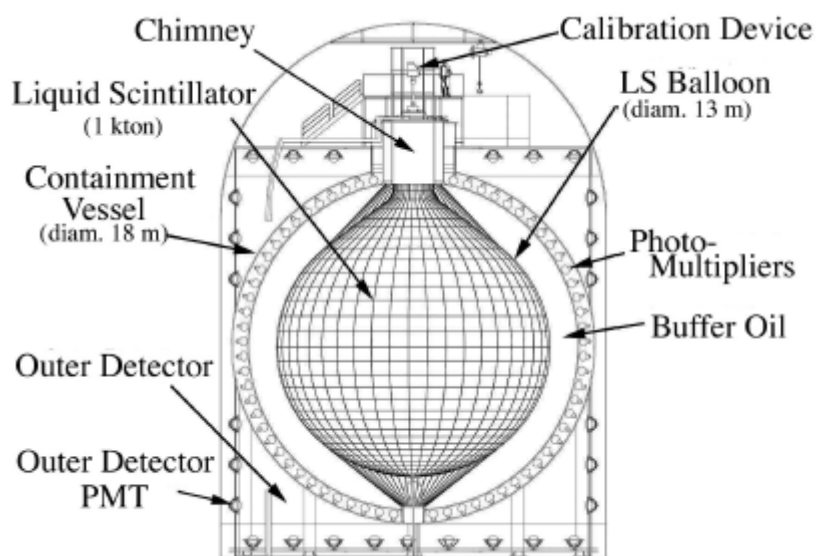


Το KamLAND (Kamioka Liquid scintillator Anti-Neutrino Detector) είναι ένα υπόγειο πείραμα που συγκαταλέγεται στην κατηγορία των πειραμάτων με πειράματα νετρίνων από πυρηνικούς αντιδραστήρες. Βρίσκεται στην περιοχή της Kamioka, στην Ιαπωνία. Αποτελεί τον μεγαλύτερο ανιχνευτή αντινετρίνων χαμηλής ενέργειας που έχει κατασκευασθεί. Η λειτουργία του ελπίζεται να δώσει πληροφορίες όχι μόνο σωματιδιακής φυσικής αλλά και γεωλογίας και αστροφυσικής.

Η θέση του ανιχνευτή είναι περιτριγυρισμένη από πυρηνικούς αντιδραστήρες που απέχουν 150Km με 200Km. Ο βασικός στόχος του πειράματος είναι να παρατηρήσει ταλαντώσεις ηλεκτρονικών αντινετρίνων που παράγονται στους αντιδραστήρες αυτούς. Τα αντινετρίνα αυτά είναι χαμηλής ενέργειας, μέχρι 3.5MeV. Η ροή νετρίνων είναι αρκετά μεγάλη και η ευαισθησία του ανιχνευτή αρκετά βελτιωμένη ώστε να αναμένονται περίπου 700 ανιχνεύσεις (μη ταλαντωμένων) αντινετρίνων κάθε χρόνο.

Η ευαισθησία του πειράματος σε χαμηλής ενέργειας νετρίνα επιτρέπει πιθανή επίλυση του προβλήματος των ηλιακών νετρίνων. Τα ηλιακά νετρίνα υψηλότερης ενέργειας παρατηρούνται από το SNO, ενώ θα τα παρατηρεί και το Super Kamiokande όταν ολοκληρωθεί. Ενώ οι ανιχνευτές Cherenkov με νερό είναι κατάλληλοι για να ανιχνεύουν σχετικά μεγαλύτερης ενέργειας νετρίνα, το KamLAND έχει τη δυνατότητα παρατήρησης χαμηλοενεργειακών νετρίνων χάρη στους 1000 τόνους καθαρού υγρού σπινθηριστή που διαθέτει.

Οι 1000 τόνοι υγρού σπινθηριστή περιέχονται σε ένα λεπτό πλαστικό σφαιρικό δοχείο, διαμέτρου 13m. Το μπαλόνι αυτό περιβάλλεται από μια ατσάλινη σφαίρα διαμέτρου 18m. Η ατσάλινη σφαίρα φέρει 1325 φωτοπολλαπλασιαστές (PMTs) των 17 ιντσών και 554 PMTs των 20 ιντσών, προσφέροντας φωτο-κάλυψη 34%. Μεταξύ της πλαστικής και της ατσάλινης σφαίρας υπάρχει ένα μίγμα δωδεκανίου και άλλων πολυμερών που λειτουργεί ως ασπίδα που αποκόπτει το υπόβαθρο που προέρχεται από το εξωτερικό.



Εικόνα 2.5: Ανατομία του ανιχνευτή του KamLAND.

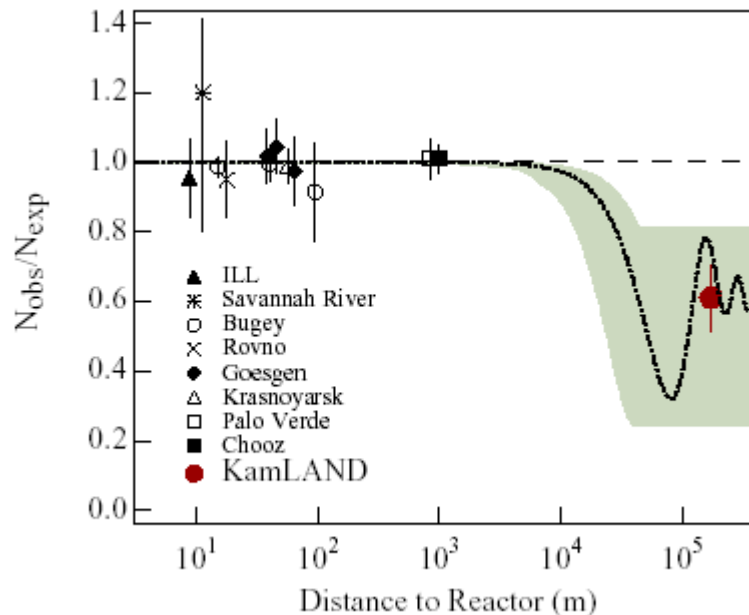
Η ατσάλινη σφαίρα μαζί με την πλαστική συναποτελούν τον λεγόμενο εσωτερικό ανιχνευτή (inner detector (ID)). Ο ID περιέχεται σε έναν κυλινδρικό ανιχνευτή Cherenkov νερού,



που φέρει 225 PMTs των 20 ιντσών και ονομάζεται *εξωτερικός ανιχνευτής* (outer detector(OD)). Ο OD χρησιμοποιείται για να εντοπίζει γεγονότα που προέρχονται από την κοσμική ακτινοβολία. Η ροή μιονίων από κοσμικές ακτίνες έχει μειωθεί κατά έναν παράγοντα  $10^5$ , χάρη στα 1000m βράχου που σκεπάζουν τον ανιχνευτή.

Όπως έχουμε δει στο πρώτο κεφάλαιο, τα νετρίνα χαμηλότερης ενέργειας ταλαντώνονται με μικρότερο μήκος ταλάντωσης. Όσο πιο μικρές ενέργειες μπορεί να ανιχνεύσει ένας ανιχνευτής, τόσο μικρότερη είναι η απαιτούμενη απόσταση από την πηγή, στην οποία θα είναι ικανός να παρατηρήσει ταλάντωση νετρίνων.

Στην εικόνα 2.6 βλέπουμε τη μέτρηση του KamLAND, και άλλων πειραμάτων πυρηνικών αντιδραστήρων.



**Εικόνα 2.6:** Ο λόγος της μετρούμενης ροής  $\bar{\nu}_e$  προς την αναμενόμενη, για διάφορα πειράματα πυρηνικών αντιδραστήρων. Το μέγεθος της κουκίδας που αντιστοιχεί στη μέτρηση του KamLAND είναι αντίστοιχο του εύρους των αποστάσεων που έχουν οι διάφοροι αντιδραστήρες από τον ανιχνευτή. Η τετμημένη του σημείου αντιστοιχεί στη μέση απόσταση των αντιδραστήρων, υπολογισμένη με βάρος τη ροή που δέχεται ο ανιχνευτής από τον καθένα. Η γραμμοσκιασμένη περιοχή αντιστοιχεί στο κομμάτι του φασικού χώρου που ονομάζεται LMA (βλ. εικόνα 2.13β). Η στικτή γραμμή αντιστοιχεί σε παραμέτρους  $\sin^2 2\theta=0.833$  και  $\Delta m^2=5.5 \cdot 10^{-5} \text{ eV}^2$ , που είναι οι επικρατέστερες τιμές της περιοχής LMA.

## Το πείραμα IMB

Το πλήρες όνομα του πειράματος αυτού είναι Irvine Michigan Brookhaven Experiment. Ξεκίνησε στην αρχή της δεκαετίας του 1980 με σκοπό την παρατήρηση πιθανής διάσπασης του πρωτονίου. Σύμφωνα με το Standard Model, το πρωτόνιο είναι σταθερό σωματίο, εφόσον είναι το ελαφρύτερο βαρυόνιο και απαιτείται διατήρηση του βαρυονικού αριθμού. Όμως, σε θεωρίες ενοποίησης το πρωτόνιο δεν είναι απαραίτητως σταθερό σωματίο, αλλά διαθέτει πεπερασμένο χρόνο ζωής. Με διάφορα πειράματα που επιχειρούν να παρατηρήσουν τέτοιες διασπάσεις σε τεράστιες συλλογές πρωτονίων έχει τεθεί ένα κάτω όριο στο χρόνο ζωής του πρωτονίου που είναι της τάξης των  $10^{33}$  years, δηλαδή πολύ μεγαλύτερο από την ηλικία του σύμπαντος ( $\sim 10^9$  years).

Το IMB αναζητά διασπάσεις πρωτονίων σε έναν όγκο νερού διαστάσεων  $18 \times 17 \times 23 \text{ m}^3$ . Ο ανιχνευτής είναι ένας ανιχνευτής Cerenkov νερού, δηλαδή, όπως και στο SNO και στο KamLAND και αλλού, η δεξαμενή με το νερό έχει στα τοιχώματά της φωτοπολλαπλασιαστές (PMTs) που ανιχνεύουν την Cerenkov ακτινοβολία που εκπέμπουν ταχέα σωματία στο νερό. Ο ανιχνευτής, όπως συμβαίνει στα περισσότερα πειράματα, είναι σε βάθος 600m, στο ορυχείο Morton, στο Ohio των ΗΠΑ. Ο πετρώδης όγκος που καλύπτει τον ανιχνευτή μειώνει δραστικά τη ροή φορτισμένων σωμάτων από την κοσμική ακτινοβολία που θα δημιουργούσαν θόρυβο για τον σκοπό του πειράματος.

Το IMB μέσα στα 10 χρόνια λειτουργίας του, μέχρι το 1991, δεν παρατήρησε ούτε μία διάσπαση πρωτονίου. Παρ' όλα αυτά, έθεσε νέα όρια στο χρόνο ζωής του πρωτονίου και, επιπλέον, έκανε ενδιαφέρουσες παρατηρήσεις νετρίνων που προέρχονταν από την ατμόσφαιρα. Το IMB και το Kamiokande παρατήρησαν για πρώτη φορά νετρίνα που προέρχονταν από έκρηξη υπερκαινοφανούς. Επρόκειτο για το SN1987A.

Ατμοσφαιρικά ονομάζουμε τα νετρίνα που δημιουργούνται στην ατμόσφαιρα λόγω της αλληλεπίδρασης της κοσμικής ακτινοβολίας με τα μόριά της. Καθώς τα νετρίνα διασχίζουν τη Γη χωρίς να αλληλεπιδρούν ιδιαίτερα, στον ανιχνευτή του IMB καταγράφονταν νετρίνα από όλες τις κατευθύνσεις, δηλαδή από όλες τις ζενίθιες γωνίες.

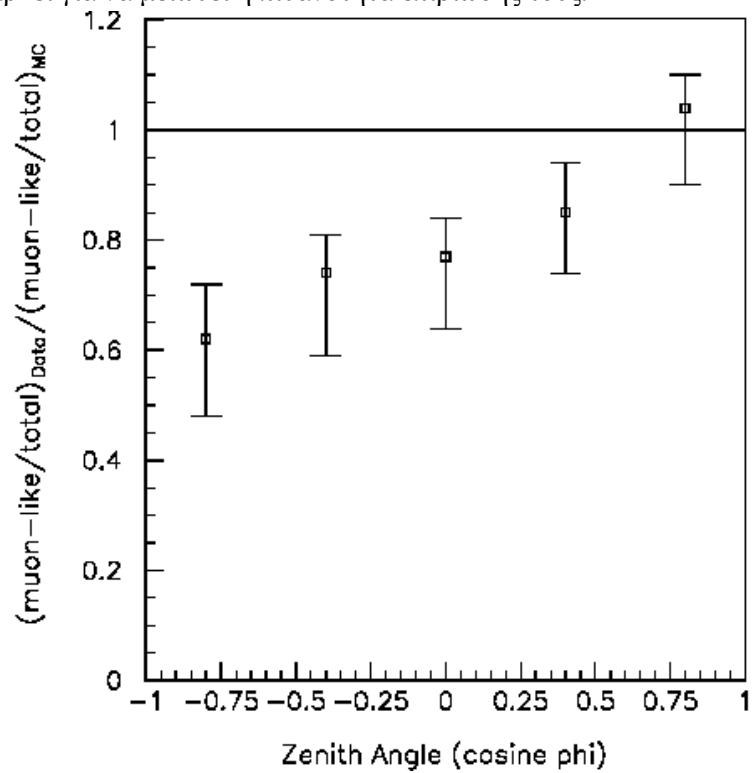
Συνήθως αυτό που συμβαίνει στην ανώτερη ατμόσφαιρα λόγω της αλληλεπίδρασης με την κοσμική ακτινοβολία είναι να παράγονται κατά κύριο λόγο πόνια. Τα πόνια διασπώνται σε  $\mu + \nu_\mu$ , και αργότερα το  $\mu$  διασπάται σε  $e + \nu_\mu + \nu_e$  (εδώ για απλότητα δε διακρίνουμε σωματία από αντισωματία). Άρα, είναι λογικό να περιμένει κανείς στη γη να καταγράψει διπλάσιο αριθμό  $\nu_\mu$  από  $\nu_e$ .

Όμως, το IMB μέτρησε τον λόγο  $\nu_e/\nu_\mu$  ίσο με  $0.54 \pm 0.13$ , ενώ το Kamiokande τον μέτρησε ίσο με  $0.57 \pm 0.10$ , αντί για 0.5 που προέβλεπε το SM. Εξακριβώθηκε με διάφορους ελέγχους ότι δεν υπήρχε λάθος στις μετρήσεις ή στην ερμηνεία τους, οπότε επιστρατεύθηκε η ιδέα της ταλάντωσης των νετρίνων για να ερμηνεύσει το φαινόμενο. Πράγματι, οι ταλαντώσεις ερμηνεύουν την απόκλιση του λόγου  $\nu_e/\nu_\mu$  από το 0.5.

Επιπλέον, όπως έχουμε λεπτομερώς εξετάσει στο πρώτο κεφάλαιο, οι πιθανότητες επιβίωσης και ταλάντωσης εξαρτώνται από την ενέργεια του νετρίνου και από την απόσταση που διανύει. Όταν η ενέργεια του νετρίνου είναι μικρή, οι ταλαντώσεις γίνονται με τόσο μικρό μήκος ταλάντωσης που πρακτικά αυτό που παρατηρείται είναι ο μέσος όρος της πιθανότητας επιβίωσης, ανεξάρτητα από το πόση απόσταση διανύει το νετρίνο. Αντίθετα, σε νετρίνα μεγαλύτερης ενέργειας, η απόσταση στην οποία γίνεται η μέτρηση παίζει μεγάλο ρόλο για την πιθανότητα ταλάντωσης. Τα νετρίνα που έχουν μικρή ζενιθία γωνία διανύουν μικρή απόσταση, ίση με το πάχος της ατμόσφαιρας ( $\sim 15 \text{ Km}$ ) ενώ αυτά που έχουν μεγάλη ζενιθία γωνία διανύουν απόσταση μέχρι και ίση με τη διάμετρο της Γης. Επομένως, η πιθανότητα ταλάντωσης των νετρίνων με σχετικά υψηλή ενέργεια αναμένεται να είναι εξαρτώμενη από τη ζενιθία γωνία απ' την οποία έρχονται. Πράγματι, αυτό παρατηρήθηκε στο IMB και στο Kamiokande.

Στην εικόνα 2.7 βλέπουμε μια σύγκριση ανάμεσα στα γεγονότα  $\nu_\mu$  και στις Monte Carlo προβλέψεις που παραβλέπουν την ταλάντωση. Για μικρή ζενιθία γωνία ( $\cos\theta \approx 1$ ) έχουμε συμφωνία, που οφείλεται στο ότι η διανυόμενη απόσταση είναι μικρή και δεν έχουμε εξαφάνιση μιονικών νετρίνων. Αντίθετα, τα νετρίνα που έρχονται από το ναδίρ προς τα πάνω είναι

περίπου τα μισά από αυτά που θα είχαμε αν δεν υπήρχαν ταλαντώσεις, εφόσον η διαδρομή που διανύουν αρκεί για να μειωθεί η πιθανότητα επιβίωσής τους.



**Εικόνα 2.7:** Λόγος του ποσοστού των  $\nu_\mu$  προς ποσοστό των  $\nu_\mu$  που προβλέπει το MC χωρίς ταλαντώσεις νετρίνων, σαν συνάρτηση του συνημιτόνου της ζενιθίας γωνίας.



## Το τηλεσκόπιο νετρίνων AMANDA

Το όνομα του πειράματος AMANDA προέρχεται από τα αρχικά των λέξεων *Antarctic Muon And Neutrino Detector Array*. Το πείραμα αυτό είναι το πρώτο μιας νέας γενεάς τηλεσκοπίων που επιχειρούν να εξάγουν πολύτιμες πληροφορίες που μεταφέρουν κοσμικά νετρίνα πολύ υψηλής ενέργειας από τις εσχατιές του σύμπαντος. Το γεγονός ότι τα νετρίνα αλληλεπιδρούν μόνο ασθενώς τα καθιστά ιδανικούς φορείς πληροφορίας από απομακρυσμένα σημεία, διότι η μέση ελεύθερη διαδρομή τους είναι πολύ μεγαλύτερη από αυτήν των φωτονίων, τα οποία αλληλεπιδρούν ηλεκτρομαγνητικά.

Εν γένει, τα τηλεσκόπια νετρίνων πρέπει να είναι όσο το δυνατόν *μεγαλύτερα*, ώστε να αυξάνεται η πιθανότητα ανίχνευσης νετρίνων εντός του χώρου τους, να είναι όσο γίνεται πιο *διαφανή*, ώστε η ακτινοβολία Cerenkov να μην απορροφάται από το ίδιο το υλικό τους, και όσο το δυνατόν πιο *μονωμένα* από την κοσμική ακτινοβολία και τη γήινη ραδιενέργεια. Μια τοποθεσία που πληρεί όλες αυτές τις συνθήκες είναι η Ανταρκτική, όπου λειτουργεί το πείραμα AMANDA. Το παχύ στρώμα πάγου που την καλύπτει (~3Km) αποτελεί το υλικό στο οποίο παράγεται ακτινοβολία Cerenkov από υπερ-ενεργειακά νετρίνα, ενώ ταυτοχρόνως είναι σχεδόν *απαλλαγμένο* από φυσική γήινη ραδιενέργεια. Το τηλεσκόπιο αυτό παρατηρεί νετρίνα που κατευθύνονται από το έδαφος προς την επιφάνεια, δηλαδή που έχουν διασχίσει τη Γη. Μόνο τα νετρίνα είναι σε θέση να κάνουν κάτι τέτοιο. Παρόλο που οι κλιματολογικές συνθήκες στην Ανταρκτική είναι αντιξοότατες, η εγκατάσταση του πειράματος εκεί ήταν στα σημεία πιο εύκολη από την εγκατάσταση θαλάσσιων τηλεσκοπίων, όπως του NESTOR, διότι το έδαφος είναι σταθερό και δε χρειάζεται να κατασκευασθούν υποθαλάσσιοι σταθμοί ή ιδιαίτερος ευπαθείς κατασκευές.

Το project AMANDA ξεκίνησε με το πείραμα AMANDA-B10, το οποίο στη συνέχεια αναβαθμίστηκε σε AMANDA-II. Χρησιμοποιεί 677 οπτικές μονάδες (optical modules) που βρίσκονται σε βάθος από 1150 m μέχρι 2350 m κάτω από την επιφάνεια του πάγου. Σε αυτό το βάθος, η ροή ατμοσφαιρικών μιονίων είναι  $10^6$  φορές μεγαλύτερη από τη ροή μιονίων που προέρχονται από  $\nu_\mu$ . Παρ' όλα αυτά, είναι δυνατόν να ξεκαθαριστεί το σήμα από το υπόβαθρο, ξεχωρίζοντας όπως είπαμε τα μίονια που κινούνται από τη γη προς την επιφάνεια.

Η καρδιά κάθε οπτικής μονάδας είναι ένας φωτοπολλαπλασιαστής, ο οποίος ανιχνεύει και ενισχύει το σήμα από το φως Cerenkov που δημιουργείται μέσα στον πάγο. Ολόκληρη η οπτική μονάδα είναι μέσα σε μια γυάλινη σφαίρα. Ολόκληρο το σύστημα επικοινωνεί με τον επίγειο σταθμό μέσω 19 καλωδίων. Για να γίνει η βύθιση των οπτικών μονάδων στον πάγο χρησιμοποιείται δέσμη ζεστού νερού η οποία διανοίγει ένα φρέαρ διαμέτρου περίπου 50 cm και βάθους ~1500 m.

Οι οπτικές μονάδες είναι διατεταγμένες σε παράλληλες, κατακόρυφες αλυσίδες, δημιουργώντας έναν κατακόρυφο κύλινδρο, ύψους περίπου 1500 m και διαμέτρου 120 m. Κάθε οπτική μονάδα μεταφέρει στην επιφάνεια το οπτικό προφίλ του φωτεινού σήματος που καταγράφει. Κατόπιν, αξιοποιώντας την πληροφορία από όλες τις μονάδες, γίνεται προσδιορισμός της κατεύθυνσης του κώνου Cerenkov και της αφετηρίας του (vertex). Ο προσδιορισμός της ενέργειας του μιονίου που προκύπτει από CC αλληλεπίδραση ενός  $\nu_\mu$  γίνεται με χρήση νευρωνικών δικτύων, που είναι εκπαιδευμένα βάσει Monte Carlo γεγονότων. Κατόπιν, από την ενέργεια του μιονίου υπολογίζεται η ενέργεια που είχε το νετρίνου που το δημιούργησε, λαμβάνοντας υπόψη την κατανομή μεταφερόμενης ενέργειας (energy transfer distribution) που υπολογίζεται θεωρητικά. Βεβαίως, σε όλη αυτή τη διαδικασία υπεισέρχονται συστηματικά σφάλματα, ένα από τα οποία είναι και το πώς σκεδάζεται το φως Cerenkov από τον πάγο. Οι σκεδάσεις αυτές επηρεάζουν το χρόνο που απαιτείται για να φτάσει το φως στις οπτικές μονάδες, οπότε επηρεάζει σημαντικά την όλη ανάλυση.



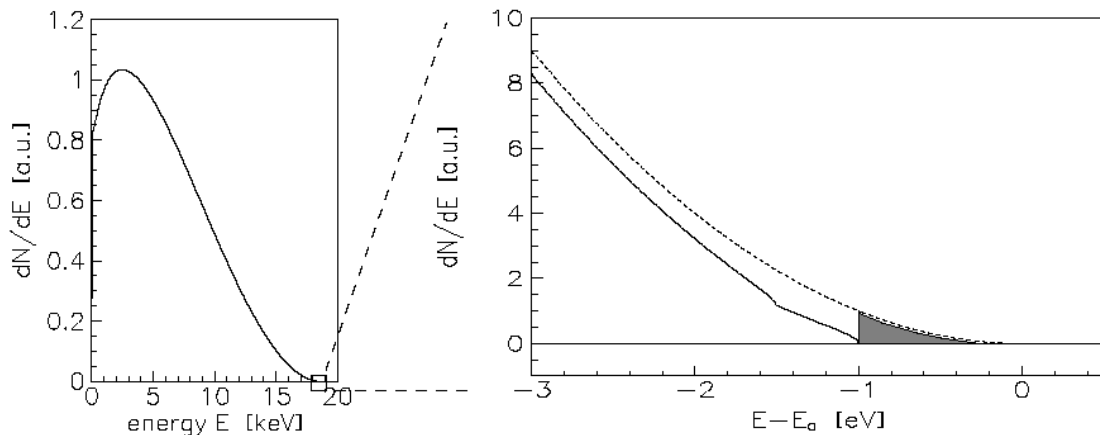
### Το πείραμα Mainz

Το πείραμα Mainz πρόκειται για ένα γερμανικό πείραμα άμεσης μέτρησης την μάζας του νετρίνου.

Τα πειράματα αυτής της κατηγορίας είναι ίσως τα πλέον απλά ως προς τις αρχές της φυσικής στις οποίες βασίζονται. Αν θέλουμε να μετρήσουμε τη μάζα του νετρίνου χωρίς να κάνουμε οποιαδήποτε υπόθεση για τις υπόλοιπες ιδιότητές του, ο καλύτερος τρόπος είναι η μελέτη της κινηματικής σε μια αντίδραση που περιλαμβάνει ένα νεutrino. Η β-διάσπαση πυρήνων είναι η πιο προσιτή αντίδραση που περιλαμβάνει ένα νεutrino. Συγκεκριμένα, η β-διάσπαση που χρησιμοποιείται στο πείραμα Mainz ως πιο πρόσφορη είναι η μετάβαση του τριτίου  ${}^3\text{H}$  σε ήλιο  ${}^3\text{He}^+$ :



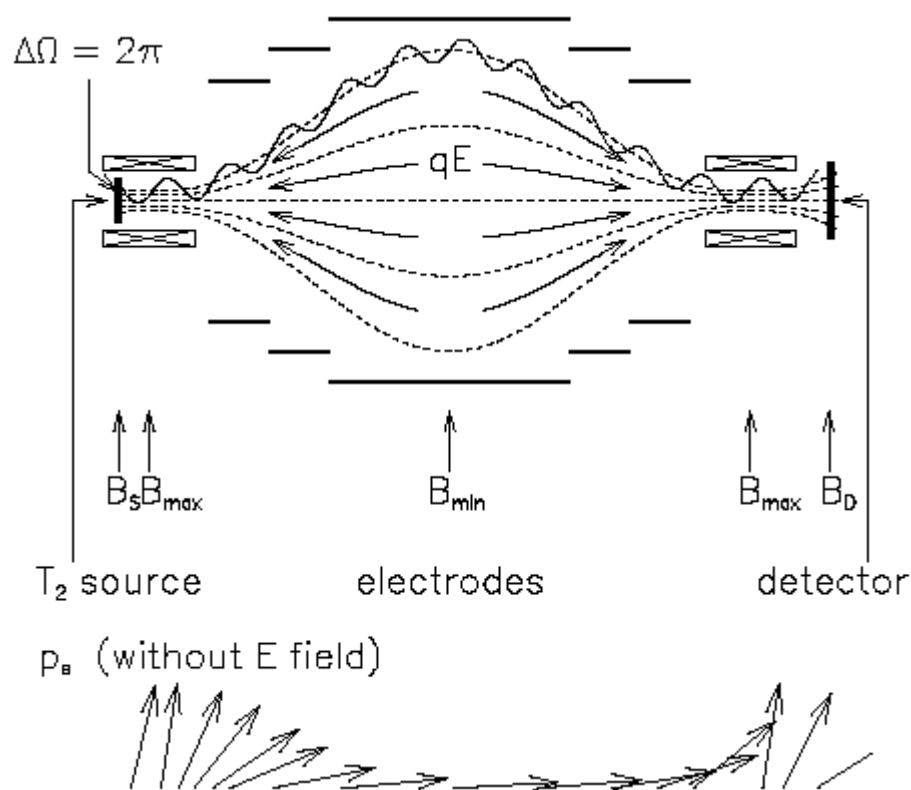
Το ηλεκτρόνιο, λόγω του ότι η  $Q=18.6\text{keV}$  μοιράζεται σε 3 σώματα, μπορεί και λαμβάνει συνεχές φάσμα ενέργειας, μέχρι μια μέγιστη τιμή. Η μέγιστη αυτή τιμή εξαρτάται από τη μάζα του νετρίνου. Στην εικόνα 2.8 βλέπει κανείς το πώς επηρεάζεται το άνω άκρο του ενεργειακού φάσματος του ηλεκτρονίου από τη μάζα του νετρίνου.



**Εικόνα 2.8:** Το ενεργειακό φάσμα του ηλεκτρονίου στη διάσπαση του τριτίου. Δεξιά φαίνεται με την στικτή γραμμή η μορφή του φάσματος αν  $m_\nu=0$ , ενώ με συνεχή γραμμή φαίνεται η μορφή του φάσματος θεωρώντας (υποθετικά) ότι  $m(\nu_1) = 1.0 \text{ eV}$ ,  $|U_{e1}|^2=0.7$  και  $m(\nu_2)=1.5\text{eV}$ ,  $|U_{e2}|^2=0.3$ . Η γραμμοσκιασμένη περιοχή αντιστοιχεί σε κλάσμα  $2 \cdot 10^{-13}$  του όλου ενεργειακού φάσματος.

Ο ανιχνευτής του πειράματος είναι γνωστός ως MAC-E-Filter (Magnetic Adiabatic Collimation followed by an Electrostatic Filter). Τέτοιοι ανιχνευτές χρησιμοποιούνται και σε άλλα πειράματα, όπως το Troitsk. Στην εικόνα 2.9 βλέπουμε τη σχηματική αναπαράσταση του φίλτρου αυτού. Δύο υπεραγωγίμα πηνία παράγουν ένα κατευθυντικό μαγνητικό πεδίο. Η πηγή βρίσκεται στο αριστερό μέρος και τα ηλεκτρόνια που εκπέμπονται με κατεύθυνση προς το «μπροστινό» ημισφαίριο οδηγούνται από το πεδίο, εκτελώντας μια κίνηση κυκλότρον, μέχρι τον φασματογράφο που βρίσκεται στο δεξιό μέρος. Έτσι, ο φασματογράφος καταγράφει ηλεκτρόνια με αρχική κατεύθυνση εντός ενός ολόκληρου ημισφαιρίου σχεδόν (κάλυψη  $2\pi$ ), εφόσον το μαγνητικό πεδίο φροντίζει να καθοδηγεί όλα αυτά τα ηλεκτρόνια προς το μέρος του φασματογράφου. Στο μέσον της απόστασης το μαγνητικό πεδίο  $B$  μειώνεται κατά αρκετές τάξεις μεγέθους, με αποτέλεσμα να δρα στα ηλεκτρόνια δύναμη προερχόμενη από το ρυθμό μεταβολής του  $B$ . Αυτή η δύναμη έχει ως αποτέλεσμα το μεγαλύτερο μέρος της ενέργειας κυκλότρον να μετατρέπεται σε διαμήκη κίνηση. Αυτή η μεταβολή της ορμής των ηλεκτρονίων

ων φαίνεται σχηματικά στην εικόνα 2.9, στο κάτω μέρος, όπου φαίνεται η εξέλιξη του άνυσματος ορμής ενός ηλεκτρονίου. Λόγω του ότι το μαγνητικό πεδίο μεταβάλλεται αρκετά αργά, η μεταβολή στην ορμή των ηλεκτρονίων γίνεται κατά αδιαβατικό τρόπο, διατηρώντας τη μαγνητική τους ροπή σταθερή. Πρακτικά, αυτό που επιτυγχάνει το φίλτρο με λίγα λόγια είναι να συγκεντρώνει σχεδόν όλα τα ηλεκτρόνια που εκπέμπονται (ισοτροπικά) εντός ενός ημισφαιρίου και να τα κατευθύνει ώστε να σχηματίζουν μια ευρεία ζώνη, παράλληλα κινούμενων σωματιδίων. Επιπλέον, για να γίνει επιλογή των ενεργότερων ηλεκτρονίων, προκειμένου μόνο αυτά να φτάνουν στον ανιχνευτή, χρησιμοποιούνται ηλεκτροστατικά πεδία μεταξύ κυλινδρικών ηλεκτροδίων. Μόνο τα αρκετά ενεργά ηλεκτρόνια ξεπερνούν το φραγμό δυναμικού που δημιουργείται, ενώ τα ασθενέστερα οπισθοδρομούν. Κατόπιν, τα ηλεκτρόνια που έχουν περάσει αυτόν τον φραγμό επανεπιταχύνονται και καταλήγουν στον ανιχνευτή.



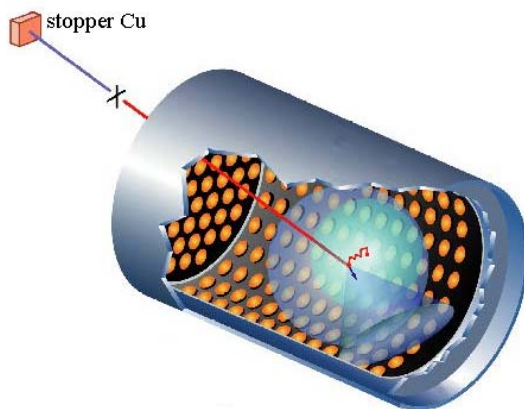
**Εικόνα 2.9:** Αρχή λειτουργίας του MAC-E-Filter. Επάνω βλέπουμε τα μέρη του μηχανισμού, ενώ κάτω βλέπουμε το μετασχηματισμό που παθαίνει το άνυσμα της ορμής ενός ηλεκτρονίου.

## Το πείραμα LSND

Το όνομα του πειράματος αυτού προέρχεται από τα αρχικά των λέξεων Liquid Scintillator Neutrino Detector. Πρόκειται για πείραμα ταλαντώσεων νετρίνων, το οποίο χρησιμοποιεί έναν μόνο ανιχνευτή, οπότε δεν αφήνει νετρίνα να διανύσουν μεγάλες αποστάσεις και, ως εκ τούτου, ανήκει στην κατηγορία των πειραμάτων ταλαντώσεων νετρίνων βραχείας εμβέλειας. Βρίσκεται στο Los Alamos και έδωσε τα πρώτα του αποτελέσματα το 1995, ενώ έχει πάψει να λαμβάνει δεδομένα από το 1998. Το πείραμα δημοσιοποίησε γεγονότα υποψήφια για  $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$  και  $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ .

Ο σχεδιασμός του πειράματος έγινε με σκοπό να επιτυγχάνει υψηλή ευαισθησία στην ανίχνευση ταλαντώσεων  $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ , νετρίνων που παράγονται από τη διάσπαση  $\pi^+$  σε ηρεμία.

Ο επιταχυντής LANSCE που χρησιμοποιεί το LSND αποτελεί μια πολύ ισχυρή πηγή νετρίνων χαμηλής ενέργειας. Επιταχύνει πρωτόνια σε ενέργεια 800MeV, επιτυγχάνοντας ηλεκτρικό ρεύμα έντασης 1mA. Τα πρωτόνια αυτά κατευθύνονται σε στόχο νερού, όπου παράγονται σχεδόν αποκλειστικά πόνια, ενώ η παραγωγή καονίων σε αυτήν την ενέργεια είναι πολύ σπάνια.

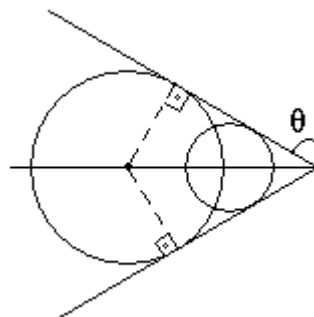


**Εικόνα 2.10:** Το stopper όπου σταματούν και διασπώνται τα  $\mu^+$  και ο ανιχνευτής

ντική εξασθένιση, με μήκος εξασθένησης πάνω από 20 m για μήκος κύματος μεγαλύτερο από 400 nm. Έτσι, διαδίδεται η ακτινοβολία Cerenkov και το φως του σπινθηρισμού και ανιχνεύονται από τους φωτοπολλαπλασιαστές που περιβάλλουν το υγρό. Η πληροφορία του χρόνου στον οποίον καταγράφεται ένας παλμός σε κάθε PMT σε συνδυασμό με το ύψος του παλμού, οδηγεί στον εντοπισμό της τροχιάς του σωματιδίου που παράγει το φως. Η τροχιά ανακατασκευάζεται με σφάλμα περίπου 30 cm, ενώ η κατεύθυνσή της προσδιορίζεται με αβεβαιότητα  $\sim 12^\circ$ . Η ενέργεια του σωματιδίου προσδιορίζεται με σχετικό σφάλμα  $\sim 7\%$ . Η αναγνώριση των σωματιδίων γίνεται χάρη στο γεγονός ότι ο κώνος Cerenkov είναι ευρύτερος για λιγότερο ταχεία σώματα και οξύτερος για περισσότερο σχετικιστικά σώματα. Να θυμίσουμε ότι ο κώνος Cerenkov έχει άνοιγμα που χαρακτηρίζεται από τη γωνία  $\theta$  (βλ. εικόνα 2.11), όπου

$$\cos\theta = 1/(\eta\beta) \quad (2.2)$$

όπου  $\eta$ : ο συντελεστής διάθλασης του μέσου και  $\beta$ : η ταχύτητα του σωματιδίου διαιρεμένη με την εν κενώ ταχύτητα του φωτός.



**Εικόνα 2.11:** Κώνος Cerenkov

Τα περισσότερα  $\pi^+$  που παράγονται στο στόχο της δέσμης έρχονται σε ηρεμία και διασπώνται δίνοντας:

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu \text{ και } \mu^+ \rightarrow e^+ + \bar{\nu}_\mu + \nu_e$$

δίνοντας  $\bar{\nu}_\mu$  μέγιστης ενέργειας 52.8 MeV. Η απόσταση από το σημείο παραγωγής των πονίων μέχρι το stopper είναι αρκετά μικρή, ώστε μόνο το 3.4% των πονίων να προλαβαίνει να διασπασθεί εν πτήση.

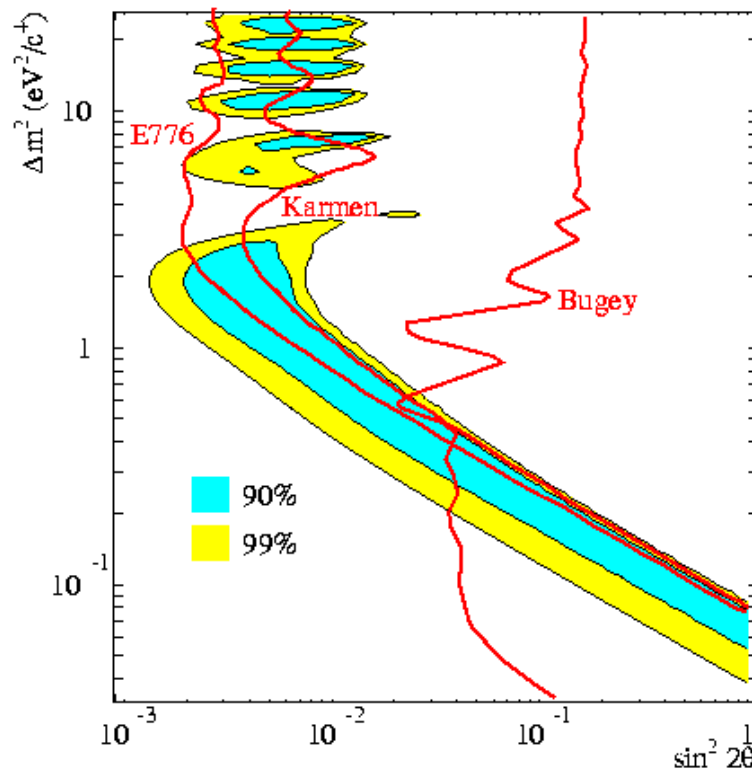
Τα  $\bar{\nu}_e$  που παράγονται με αφειρησία τα παραγόμενα  $\pi^-$  είναι λίγα σε σύγκριση με τα  $\bar{\nu}_\mu$ . Τρεις είναι οι αιτίες: (1) Όταν η δέσμη πρωτονίων προσπίπτει σε στόχο νερού παράγονται  $\pi^+$  και  $\pi^-$  σε αναλογία 8:1. (2) Τα  $\pi^-$  που φτάνουν σε ηρεμία στο stopper απορροφώνται πριν προλάβουν να διασπασθούν, οπότε τα  $\bar{\nu}_e$  που φθάνουν κατευθείαν στον ανιχνευτή (αγνοώντας τις ταλαντώσεις φυσικά) παράγονται μόνο από  $\pi^-$  που διασπώνται εν πτήση. (3) Τα  $\mu^-$  που παράγονται από τη διάσπαση των εν πτήση  $\pi^-$  σταματούν στο stopper και τα περισσότερα παγιδεύονται σε ατομικές τροχιές δίνοντας  $\nu_\mu$ . Μόνο 12% δεν παγιδεύονται και διασπώνται δίνοντας  $\bar{\nu}_e$ . Επομένως, αναμένουμε  $\bar{\nu}_e: \bar{\nu}_\mu \sim (1/8)(0.034)(0.12) \approx 5 \cdot 10^{-4}$ . Παρατήρηση μεγαλύτερου ποσοστού  $\bar{\nu}_e$  πιθανά μαρτυρά ταλάντωση  $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ .

Η αντίδραση που σηματοδοτεί την αλληλεπίδραση ενός  $\bar{\nu}_e$  στον ανιχνευτή είναι η αντίστροφη  $\beta$ -διάσπαση:  $\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$ . Η αντίδραση αυτή ακολουθείται από την  $n + p \rightarrow d + \gamma(2.2\text{MeV})$ , ενώ και το ποζιτρόνιο εξαυλώνεται δίνοντας φωτόνια. Για να καθορισθεί ποσοτικά αν ένα παρατηρούμενο φωτόνιο είναι φωτόνιο 2.2 MeV σχετιζόμενο με την εξαύλωση του ποζιτρονίου χρησιμοποιείται ο παράγων R, ο οποίος είναι η πιθανότητα το φωτόνιο να σχετίζεται (δηλ. να προέρχεται από το ίδιο  $\bar{\nu}_e$ ) προς την πιθανότητα να μη σχετίζεται, δηλαδή να καταγράφεται τυχαία την ίδια στιγμή ενώ προέρχεται από αλλού. Κατόπιν αφαιρέσεως του υποβάθρου, παρατηρήθηκε πλεόνασμα  $\bar{\nu}_e$  σε σχέση με τα αναμενόμενα, που σημαίνει ότι, εάν το πλεόνασμα αυτό προέρχεται από ταλαντώσεις  $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ , τότε η πιθανότητα αυτής της ταλάντωσης προσδιορίστηκε ίση με  $(0.31 \pm 0.12 \pm 0.05)\%$ .

Όσο για τα την ταλάντωση  $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ , η χαρακτηριστική αντίδραση που μας επιτρέπει την αναγνώριση ενός  $\nu_e$  είναι η  $\nu_e C \rightarrow e^- X$  με ενέργεια ηλεκτρονίου  $60 < E_e < 200 \text{ MeV}$ . Βασικές πηγές υποβάθρου, δηλαδή πηγές που δίνουν κατ' ευθείαν  $\nu_e$  είναι οι (α)  $\mu^+ \rightarrow \bar{\nu}_\mu + e^+ + \nu_e$  και (β)  $\pi^+ \rightarrow e^+ + \nu_e$ . Η πιθανότητα που μέτρησε το LSND για τη συγκεκριμένη ταλάντωση είναι  $(0.26 \pm 0.10 \pm 0.05)\%$ .

Τα συστηματικά σφάλματα και οι πηγές υποβάθρου για τη μελέτη των δύο καναλιών  $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$  και  $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$  είναι εντελώς διαφορετικά, οπότε το LSND προσδιόρισε με δύο ανεξάρτητους τρόπους τις παραμέτρους ταλάντωσης που δίνουν καλύτερη συμφωνία με τις μετρούμενες πιθανότητες ταλάντωσης. Στην εικόνα 2.12 φαίνεται ο παραμετρικός χώρος  $(\Delta m_{12}^2, \sin^2 2\theta_{12})$  και έχει σχεδιασθεί η περιοχή των παραμέτρων που προσδιόρισε το LSND με επίπεδο εμπιστοσύνης 90% και 99%, σε παράθεση με τις περιοχές που είχαν αποκλειστεί από τα πειράματα Bugey, Karmen και E776.

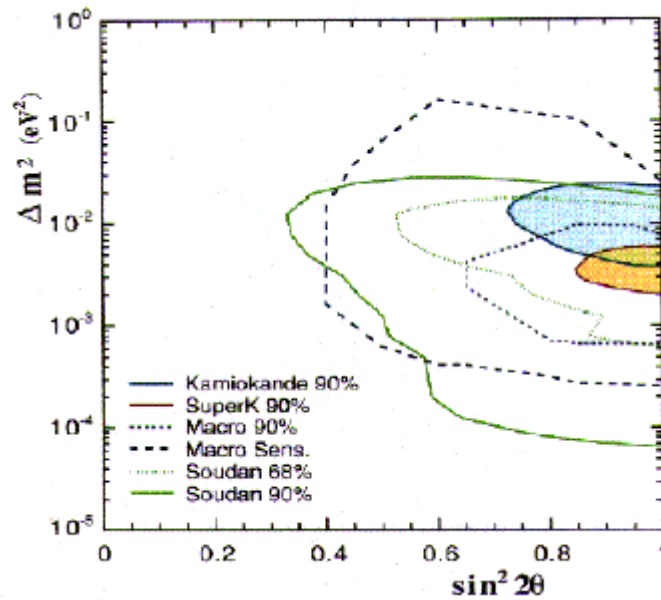




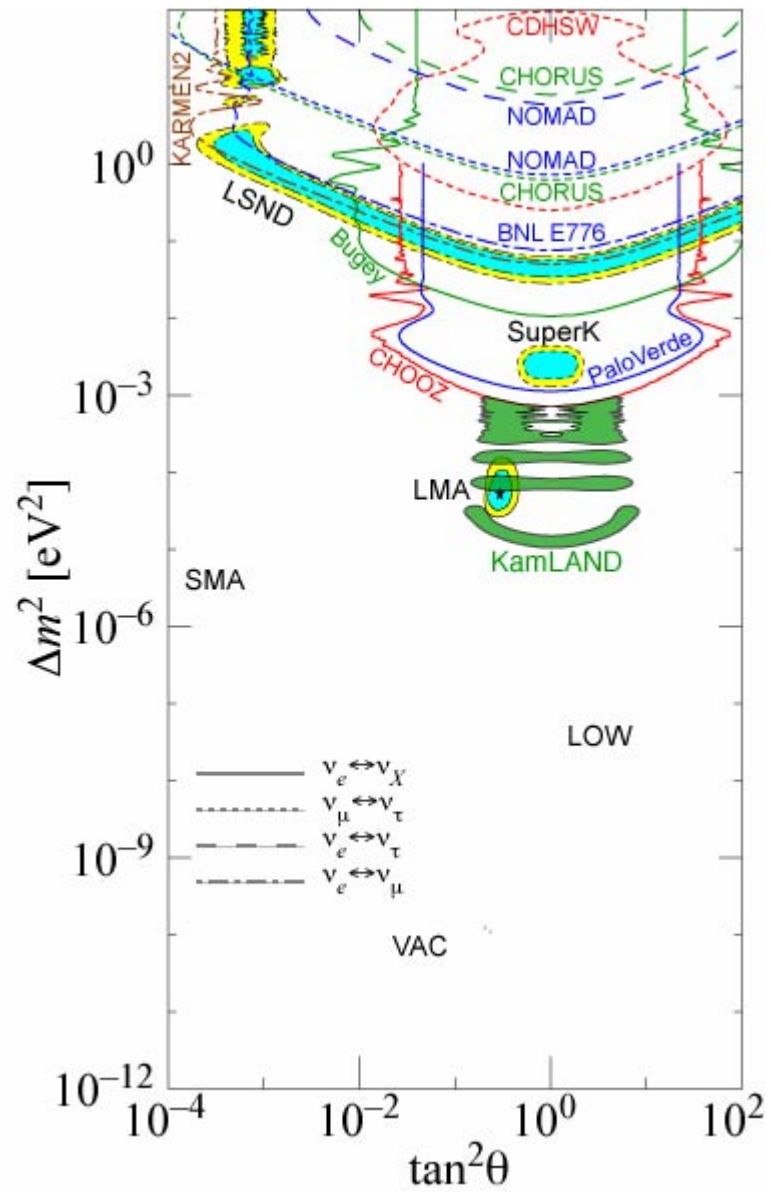
**Εικόνα 2.12:** Παράμετροι που προσδιόρισε το LSND και που απέκλεισαν τα E776, Karmen και Bugey

Η πιο σημαντική παρατήρηση του LSND είναι ότι υπάρχουν τρεις διαφορές μάζας  $\Delta m^2$  που ικανοποιούν τις παρατηρούμενες ταλαντώσεις. Για να υπάρχουν τρεις  $\Delta m^2$  πρέπει είτε να υπάρχουν νετρίνα που δεν αλληλεπιδρούν ούτε με ασθενείς αλληλεπιδράσεις, τα λεγόμενα sterile νετρίνα ( $\nu_s$ ), ή υπάρχει διαφορά στις παραμέτρους των ταλαντώσεων μεταξύ νετρίνων και μεταξύ αντινετρίνων. Το πείραμα MiniBooNE θα ελέγξει το αποτέλεσμα του LSND και εάν αυτό επιβεβαιωθεί θα δώσει τη θέση του στο πείραμα BooNE.

Πριν προχωρήσουμε στην περιγραφή του πειράματος MINOS, που αποτελεί ένα πείραμα μακράς εμβέλειας, είναι σκόπιμο να συνοψίσουμε τα αποτελέσματα όλων των πειραμάτων, δείχνοντας σε δύο διαγράμματα τον παραμετρικό χώρο των ταλαντώσεων και σχεδιάζοντας τις περιοχές που έχουν αποκλεισθεί ή ανιχνευθεί. Αυτά τα διαγράμματα φαίνονται στις εικόνες 2.13α και 2.13β.



Εικόνα 2.13α: Οι παράμετροι  $\Delta m_{23}^2$  και  $\sin^2 2\theta_{23}$ .



Εικόνα 2.13β: Οι παράμετροι  $\Delta m_{12}^2$  και  $\tan^2\theta_{12}$ .

## Το πείραμα MINOS

### Γενικά στοιχεία

Τα πειράματα ταλαντώσεων νετρίνων είναι δύσκολα πειράματα λόγω της δυσχέρειας που υπάρχει στην ανίχνευση των νετρίνων. Αν και έχουν προηγηθεί αρκετά τέτοια πειράματα, όπως περιγράψαμε, εξακολουθεί να υπάρχει σκεπτικισμός, καθώς νετρίνα με μάζα είναι συμβατά μόνο με θεωρίες πέραν του Standard Model. Ειδικά μετά το πείραμα LSND, που αν αποδειχθεί σωστό αποκαλύπτει νέα φυσική και νέα ερωτήματα, η ανάγκη για ένα πείραμα που να κάνει λεπτομερή και ακριβή μέτρηση των ταλαντώσεων καθίσταται αδήριτη. Το MINOS είναι ένα τέτοιο πείραμα, το οποίο θα επιχειρήσει να παρατηρήσει ταλαντώσεις νετρίνων με διάφορες ανεξάρτητες, παράλληλες μετρήσεις, κάθε μια από τις οποίες θα απαντά σε μια συγκεκριμένη ερώτηση που αφορά τις ταλαντώσεις νετρίνων. Οι **στόχοι** του MINOS συνοψίζονται στις εξής προτάσεις:

1. Εάν οι παράμετροι ταλάντωσης βρίσκονται εκτός της περιοχής που μπορεί να παρατηρήσει το MINOS, τότε πρέπει να επιτύχει τον προσδιορισμό μιας όσο το δυνατόν ευρύτερης αποκλειόμενης περιοχής στον παραμετρικό χώρο.
2. Εάν το MINOS έχει ευαισθησία στην περιοχή όπου πραγματικά βρίσκονται οι παράμετροι της ταλάντωσης, τότε πρέπει να επιδείξει τις ταλαντώσεις και να προσδιορίσει τις παραμέτρους ταλάντωσης με μεγάλη ακρίβεια, προσδιορίζοντας και τα κανάλια των παρατηρούμενων ταλαντώσεων.

Το πείραμα θα ξεκινήσει, άνευ απροόπτου, το **2005**. Για να δύναται να επιτύχει τους στόχους του, διαθέτει ορισμένα χαρακτηριστικά στη σχεδίαση:

Είναι πείραμα *δύο ανιχνευτών* που χρησιμοποιεί δέσμη νετρίνων που παράγονται με χρήση επιταχυντή, γι' αυτό και χαρακτηρίζεται «*πείραμα νετρίνων μακράς εμβέλειας με επιταχυντή*». Ο ένας ανιχνευτής βρίσκεται κοντά στην πηγή των νετρίνων, στο Fermilab, και γι' αυτό αποκαλείται *κοντινός ανιχνευτής (near detector)*. Ο άλλος είναι μεγαλύτερος και βρίσκεται στο ορυχείο του Soudan. Η απόσταση μεταξύ των ανιχνευτών είναι τέτοια ώστε να επιτρέπει την παρατήρηση ταλαντώσεων εφόσον οι παράμετροι είναι στην περιοχή που υπέδειξε το προηγούμενο πείραμα Super-Kamiokande. Όσο για την αρχιτεκτονική των δύο ανιχνευτών, έγινε προσπάθεια να είναι όσο το δυνατόν όμοια, ώστε να ελαχιστοποιηθούν τα συστηματικά σφάλματα στη σύγκριση των ενεργειακών φασμάτων των νετρίνων που θα καταγράψουν. Δηλαδή, οι δύο ανιχνευτές έχουν παρόμοια ενεργά μέρη, ίδιο πάχος επιπέδων σιδήρου και παρόμοια μαγνητικά πεδία.

Τέλος, το πείραμα έχει σχεδιασθεί ώστε να είναι προσαρμόσιμο στις συνθήκες που θα αντιμετωπίσει στην αρχή της λειτουργίας του. Αν δηλαδή με τις πρώτες μετρήσεις διαπιστωθεί ότι οι παράμετροι ταλάντωσης βρίσκονται σε μια κάπως διαφορετική περιοχή του παραμετρικού χώρου, θα υπάρχει δυνατότητα να μεταβληθεί το ενεργειακό φάσμα των νετρίνων ώστε να είναι πιο ευαίσθητο στη νέα περιοχή του παραμετρικού χώρου.

### Σύνοψη στόχων και παραμέτρων πειράματος

Εάν το πείραμα MINOS εντοπίσει ταλαντώσεις νετρίνων, τότε θα είναι σε θέση να μετρήσει τις παραμέτρους ταλάντωσης και να προσδιορίσει τα κανάλια ταλάντωσης, δηλαδή μεταξύ ποιων γεύσεων παρατηρείται ταλάντωση. Οι ρυθμίσεις του πειράματος είναι τέτοιες ώστε να παρέχουν μέγιστη ευαισθησία σε ταλαντώσεις  $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$  και  $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ , εφόσον οι παράμετροι ταλάντωσης είναι αυτές που προσδιόρισε το πείραμα ατμοσφαιρικών νετρίνων Super-Kamiokande (βλ. εικόνα 2.13α). Στον πίνακα 2.2 συνοψίζονται ποσοτικά οι στόχοι ως προς την ευαισθησία του πειράματος σε διάφορες μετρήσεις.

Μέτρηση	Ευαισθησία (90% C.L.)
όριο $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ , μεγάλο $\Delta m^2$	$\sin^2(2\theta) > 1.5 \times 10^{-2}$ (NC/CC test)
όριο $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ , $\sin^2(2\theta) = 1$ , δέσμη ευρέος φάσματος	$\Delta m^2 > 2 \cdot 10^{-3} \text{ eV}^2$ (NC/CC test)
όριο $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ , $\sin^2(2\theta) = 1$ , δέσμη χαμηλής ενέργειας	$\Delta m^2 > 5 \cdot 10^{-4} \text{ eV}^2$ (εξαφάνιση $\nu_\mu$ )
όριο $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ , $\sin^2(2\theta) = 1$ , αναγνώριση λεπτονίου $\tau$	$\Delta m^2 > 1.5 \cdot 10^{-3} \text{ eV}^2$ (γεγονότα CC $\nu_\tau$ )
όριο $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ , μεγάλο $\Delta m^2$	$\sin^2(2\theta) > 2 \cdot 10^{-3}$ (test εμφάνισης $\nu_e$ )
όριο $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ , $\sin^2(2\theta) = 1$	$\Delta m^2 > 3 \cdot 10^{-4} \text{ eV}^2$ (test εμφάνισης $\nu_e$ )
ακρίβεια στη μέτρηση του $\Delta m^2$	$1 \cdot 10^{-3} \text{ eV}^2$ για $\Delta m^2 = 10^{-2} \text{ eV}^2$
ακρίβεια στη μέτρηση του $\sin^2(2\theta)$	$1 \cdot 10^{-1}$ για $\Delta m^2 = 10^{-2} \text{ eV}^2$
όριο στη μίξη των $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ , $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$	$\sin^2(2\theta) < 0.05$ για $\Delta m^2 = 10^{-2} \text{ eV}^2$

**Πίνακας 2.2:** Οι στόχοι φυσικής του πειράματος MINOS. Όπου δεν αναφέρεται διαφορετικά υποτίθεται ότι χρησιμοποιείται η δέσμη ευρέος φάσματος. Εάν δεν παρατηρηθούν ταλαντώσεις, τότε τα παραπάνω όρια θα έχουν τεθεί με επίπεδο εμπιστοσύνης 90%.

Οι στόχοι του πειράματος καθορίζουν και τα χαρακτηριστικά του. Συγκεκριμένα, όταν χρησιμοποιείται η δέσμη ευρέος φάσματος (δηλαδή μικρών και μεγάλων ενεργειών), θα υπάρχουν στο μακρινό ανιχνευτή  $\nu_\tau$  με ενέργεια αρκούντως μεγάλη για να σημειωθούν γεγονότα φορτισμένου ρεύματος (CC). Στον πίνακα 2.4 φαίνονται ορισμένες ενέργειες κατωφλίου σε αλληλεπιδράσεις νετρίνων και βλέπουμε ότι η ενέργεια που χρειάζεται για να γίνει CC αλληλεπίδραση ενός  $\nu_\tau$  με ένα νετρόνιο είναι περίπου 3.45 GeV.

Επίσης, η απόσταση κοντινού – μακρινού ανιχνευτή (735 Km) σε συνδυασμό με τη μάζα του μακρινού ανιχνευτή, θα μας παρέχουν δυνατότητα προσδιορισμού των παραμέτρων ταλάντωσης σε ένα μεγάλο κομμάτι της περιοχής του παραμετρικού χώρου, όπου δείχνουν τα προηγούμενα πειράματα ατμοσφαιρικών νετρίνων. Το κάτω άκρο της περιοχής που εντοπίζει το πείραμα Super-Kamiokande μπορεί να διερευνηθεί από το MINOS, χάρη στη δυνατότητα που έχει να χρησιμοποιήσει δέσμη χαμηλότερης ενέργειας, όπως θα δούμε σε επόμενη παράγραφο.

Τα πιο ευαίσθητα όρια στην παρατήρηση της ταλάντωσης  $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$  μπορούν να τεθούν κάνοντας σύγκριση του λόγου των αλληλεπιδράσεων NC (ουδετέρου ρεύματος) προς τις CC στους δύο ανιχνευτές. Αυτό είναι κατανοητό αν παρατηρήσουμε τις ενέργειες κατωφλίου του πίνακα 2.4. Εκεί βλέπουμε ότι τα  $\nu_\mu$  με ενέργεια  $E > 110.15 \text{ MeV}$  δίνουν CC αλληλεπιδράσεις, οπότε σχεδόν όλα τα  $\nu_\mu$  και στο μακρινό και στον κοντινό ανιχνευτή θα δίνουν CC και NC αλληλεπιδράσεις. Αυτό που θα αλλάξει εάν γίνεται ταλάντωση  $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$  είναι ότι μόνο ένα μικρό ποσοστό των  $\nu_\tau$  θα δίνει CC αλληλεπιδράσεις, το ποσοστό των  $\nu_\tau$  που θα έχει  $E > 3.45 \text{ GeV}$ . Επομένως, αν γίνεται αυτή η ταλάντωση περιμένουμε ότι τα NC προς τα CC γεγονότα θα αυξηθούν στο μακρινό ανιχνευτή, όπου κάποια  $\nu_\mu$  θα έχουν ταλαντωθεί σε  $\nu_\tau$ .

Για να είναι το πείραμα σε θέση να προσδιορίσει τα κανάλια ταλάντωσης που πιθανά θα παρατηρήσει, είναι αναγκαίο να μπορεί να διακρίνει τις διαφορές ανάμεσα στις ενέργειες και στις γεωμετρικές ιδιότητες των showers και των tracks των προϊόντων των αλληλεπιδράσεων των τριών νετρίνων. Για να έχουν οι δύο ανιχνευτές την αναγκαία τοπολογική διακριτική ικανότητα πρέπει να υπάρχουν αρκετές μικρές ενεργές κυψελίδες (θα περιγράψουμε τους ανιχνευτές σε επόμενη παράγραφο) και το κατάλληλο μαγνητικό πεδίο.

Όμως, ο προσδιορισμός του  $\Delta m^2$  που, όπως είδαμε και στο πρώτο κεφάλαιο, θα γίνει από τον προσδιορισμό της θέσης του ελαχίστου του ενεργειακού φάσματος στο μακρινό ανιχνευτή, απαιτεί πολύ καλή ενεργειακή διακριτική ικανότητα, όπως επίσης είδαμε στο πρώτο κεφάλαιο. Η παράμετρος της καλοριμετρικής διακριτικής ικανότητας έχει μεγαλύτερη σημασία κι από την τοπολογική διακριτική ικανότητα. Αδρονική καλοριμετρική διακριτική ικανότητα

χρειάζεται στη μέτρηση της ενέργειας των αδρονικών καταγισμών (showers) που ακολουθούν τις CC αλληλεπιδράσεις με νετρόνια. Ηλεκτρομαγνητική calorimetrickή διακριτική ικανότητα χρειάζεται στη μέτρηση των ηλεκτρομαγνητικών καταγισμών που ακολουθούν τις CC αλληλεπιδράσεις του  $\nu_e$ , ώστε να είμαστε σε θέση να εντοπίσουμε άμεσα το κανάλι  $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ .

Εφόσον η calorimetrickή διακριτική ικανότητα είναι τόσο σημαντική, ιδιαίτερη βαρύτητα έχει δοθεί στη σωστή βαθμονόμηση των ηλεκτρονικών των δύο ανιχνευτών. Για να γίνει η βαθμονόμηση (calibration) των ηλεκτρονικών, έχει κατασκευασθεί ένας ανιχνευτής-μινιατούρα, χονδρική απομίμηση των δύο ανιχνευτών του MINOS, ο οποίος βρίσκεται στο CERN, ήδη λειτουργεί και ονομάζεται **CALDET** (Calibration Detector).

Στον πίνακα 2.3 συνοψίζονται τα βασικά τεχνικά χαρακτηριστικά του πειράματος MINOS.

Χαρακτηριστικό	Τιμή
Μάζα κοντινού ανιχνευτή	0.98 kt συνολικά, 100 t ωφέλιμοι
Μάζα μακρινού ανιχνευτή (2 supermodules)	5.4 kt συνολικά, 3.3 kt ωφέλιμοι
Επίπεδα σιδήρου (στο μακρινό ανιχνευτή)	8 m εύρος, οκτάγωνα πάχους 2.54 cm
Μαγνητικό πεδίο (στο μακρινό ανιχνευτή)	Τορροειδές, 1.5 T σε ακτίνα 2 m
Ενεργά επίπεδα (planes)	Πολυστυρένιο
Ενεργές λωρίδες (strips)	4.1 cm εύρος, 1 cm εύρος, ~8 m μήκος
Απόσταση κοντινού ανιχνευτή από το σωλήνα διάσπασης	290 m
Απόσταση μακρινού ανιχνευτή από το σωλήνα διάσπασης	730 km
ρυθμός πρόσπτωσης κοσμικών ακτινών	270 Hz στον κοντινό, 1 Hz στο μακρινό ανιχνευτή
Ενέργεια νετρίνων στη δέσμη (ευρέος φάσματος)	8 με 25 GeV
ενεργειακή βαθμονόμηση	5% απολύτως, 2% μεταξύ μακρινού-κοντινού
Ηλεκτρομαγνητική calorimetrickή διακριτική ικανότητα	$0.23/\sqrt{E} + (\text{const} < 0.05)$
Αδρονική calorimetrickή διακριτική ικανότητα	$0.60/\sqrt{E} + (\text{const} < 0.07)$
Calorimetrickή διακριτική ικανότητα στην ενέργεια μιονίων	<12% (χρησιμοποιώντας πληροφορία της καμπύλωσης της τροχιάς και της καλυπτόμενης απόστασης)
Διάκριση NC – CC	Αποδοτικότητα (efficiency) > 90%
Ρυθμός γεγονότων νετρίνων στον κοντινό ανιχνευτή	20 γεγονότα / βολή (spill) στην περιοχή του στόχου
Ρυθμός γεγονότων νετρίνων στο μακρινό ανιχνευτή	άνευ ταλαντώσεων: 3000 γεγονότα CC $\nu_\mu$ ανά (kt·yr)
Σχετική αβεβαιότητα στο σχετικό ρυθμό γεγονότων μεταξύ μακρινού – κοντινού ανιχνευτή	2%

**Πίνακας 2.3:** Πειραματικά χαρακτηριστικά του MINOS

$\nu_\tau$	3.09 TeV	3.08 TeV	0	3.45 GeV
$\nu_\mu$	10.92 GeV	0		110.15 MeV
$\nu_e$	0			

Πίνακας 2.4: Ενέργειες κατωφλίου σε CC αλληλεπιδράσεις νετρίνων.

### Δέσμη νετρίνων και τοποθέτηση του πειράματος



Το MINOS χρησιμοποιεί τον Main Injector του Fermilab για να παράγει τη δέσμη νετρίνων, με τρόπο που θα δούμε στη συνέχεια. Η δέσμη νετρίνων περνά από τον κοντινό ανιχνευτή, που βρίσκεται ~290 m από το σωλήνα διάσπασης όπου παράγονται τα νετρίνα, κατευθυνόμενη προς το ορυχείο του Soudan, στη βόρεια Minnessota, όπου σε απόσταση 730 km βρίσκεται ο μακρινός ανιχνευτής. Λόγω της καμπυλότητας της Γης, η δέσμη στο Fermilab φαίνεται πως βυθίζεται με κλίση 57 mrad (3.3°) ως προς τον ορίζοντα. Έξι λόγοι συνέβαλαν στην επιλογή του Soudan mine για την τοποθέτηση του μακρινού ανιχνευτή:

1) Η απόσταση των  $L=730$  km είναι μια καλή επιλογή ώστε να συνδυάζεται η ακρίβεια στη μέτρηση του  $\sin^2(2\theta)$  (που απαιτεί μικρότερο  $L$ ) και η ακρίβεια στη μέτρηση του  $\Delta m^2$  (που απαιτεί μεγαλύτερο  $L$ , εφόσον όσο μικραίνει το  $\Delta m^2$  τόσο μεγαλύτερη απόσταση απαιτούν οι ταλαντώσεις). Στην επιλεγμένη απόσταση μπορούμε να πετύχουμε ευαισθησία κάτω από  $10^{-3} \text{ eV}^2$  στο  $\Delta m^2$  και 0.01 στο  $\sin^2(2\theta)$ .

2) Στο Soudan mine είχαν προϋπάρξει τα πειράματα Soudan 1 και Soudan 2, οπότε στο συγκεκριμένο ορυχείο ήδη υπήρχε πολύτιμη υποδομή για ένα ακόμα πείραμα νετρίνων.

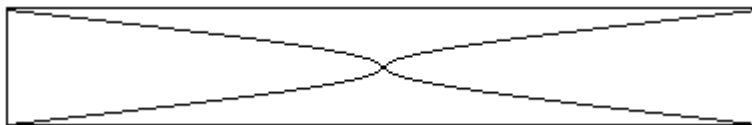
3) Ο ανιχνευτής του πειράματος Soudan 2, ο οποίος είναι πολύ λεπτής κοκκίασης (μεγάλης τοπολογικής διακριτικής ικανότητας) θα προσφέρει επιπλέον 1 kt ανιχνευτή, με συστηματικά σφάλματα πολύ διαφορετικά από αυτά του μακρινού ανιχνευτή.

4) Το να κατασκευαζόταν σε απόσταση μεγαλύτερη από αυτήν των 730 km θα απαιτούσε η δέσμη να ξεκινά βυθιζόμενη πιο απότομα κάτω απ' τον ορίζοντα στο Fermilab. Κάτι τέτοιο θα κόστιζε περισσότερο.

- 5) Η δέσμη NuMI μπορούσε εύκολα να κατευθυνθεί προς το Soudan. Οι συνθήκες στο Fermilab ευνοούσαν την κατεύθυνση της δέσμης προς το Soudan.
- 6) Χτίζοντας το μακρινό ανιχνευτή σε μεγάλο βάθος υπογείως επιτυγχάνεται δραστική μείωση του υποβάθρου από κοσμική ακτινοβολία χαμηλής ενέργειας. Από την άλλη, ο μακρινός ανιχνευτής θα μπορεί να παρατηρεί ατμοσφαιρικά νετρίνα υψηλής ενέργειας, εφόσον αυτά φτάνουν ανεμπόδιστα σ' εκείνο το βάθος.

Η δέσμη του MINOS ονομάζεται NuMI (Neutrino Main Injector) και παράγεται ως εξής: Πρώτα, πρωτόνια ενέργειας 120 GeV από τον Main Injector προσπίπτουν σε έναν στόχο, με την απαραίτητη κλίση των  $3.3^\circ$  ως προς τον ορίζοντα. Ο στόχος είναι από γραφίτη, μήκους 1.6 m και βάσης 6.4 mm επί 18 mm. Ο κύλινδρος αυτός δεν είναι ενιαίος, ώστε από τα κενά να μπορούν να περνούν ανεμπόδιστα τα πόνια και τα καόνια που παράγονται. Ο βομβαρδισμός του στόχου γίνεται κάθε 1.9 s και κάθε βολή περιέχει περίπου  $4 \cdot 10^{13}$  πρωτόνια, διαρκώντας  $\sim 8.1$   $\mu$ s.

Τα φορτισμένα μεσόνια που παράγονται από το βομβαρδισμό του στόχου κατευθύνονται προς το σωλήνα διάσπασης με τη χρήση δύο μαγνητικών χοανών (horns). Οι χοάνες είναι φτιαγμένες από αλουμίνιο και χωρίζονται σε δύο αγωγούς, τον εσωτερικό και τον εξωτερικό. Ο εξωτερικός είναι απλώς κύλινδρος (χωρίς τις βάσεις του), ενώ ο εσωτερικός έχει το σχήμα δύο κατοπτρικών παραβολοειδών εκ περιστροφής (βλ. εικόνα 2.14). Ρεύμα έντασης μέχρι 200 kA διαρρέει προς αντίθετες κατευθύνσεις τους δύο αγωγούς δημιουργώντας το τορροειδές μαγνητικό πεδίο μεταξύ των δύο αγωγών.

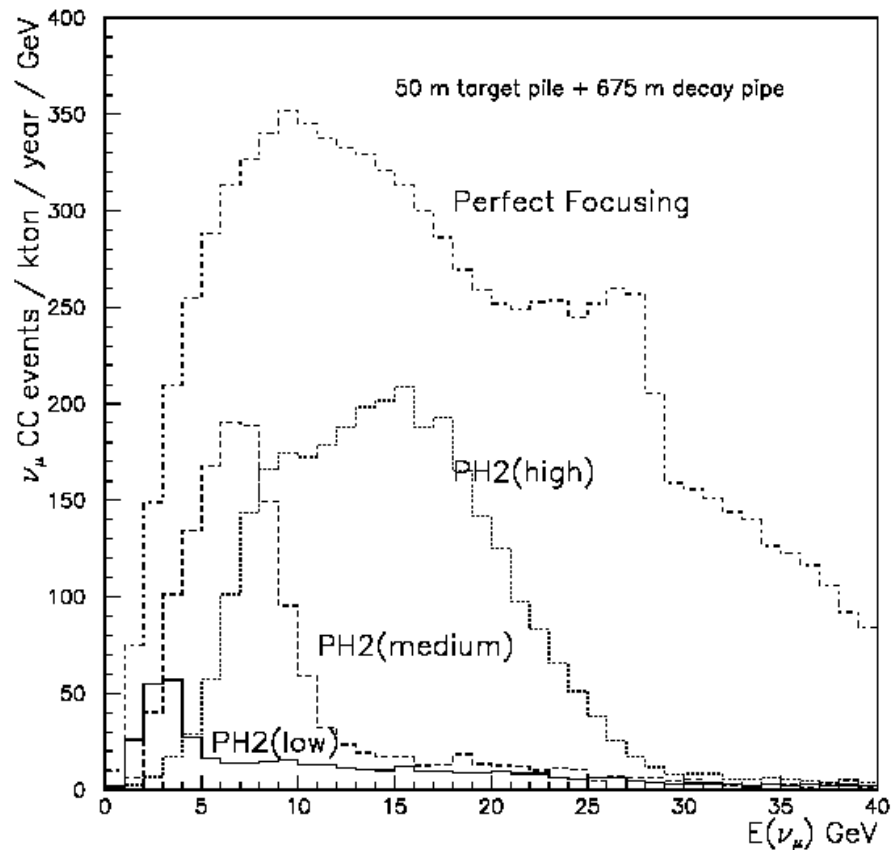


Εικόνα 2.14: Απλοποιημένη αναπαράσταση μιας μαγνητικής χοάνης

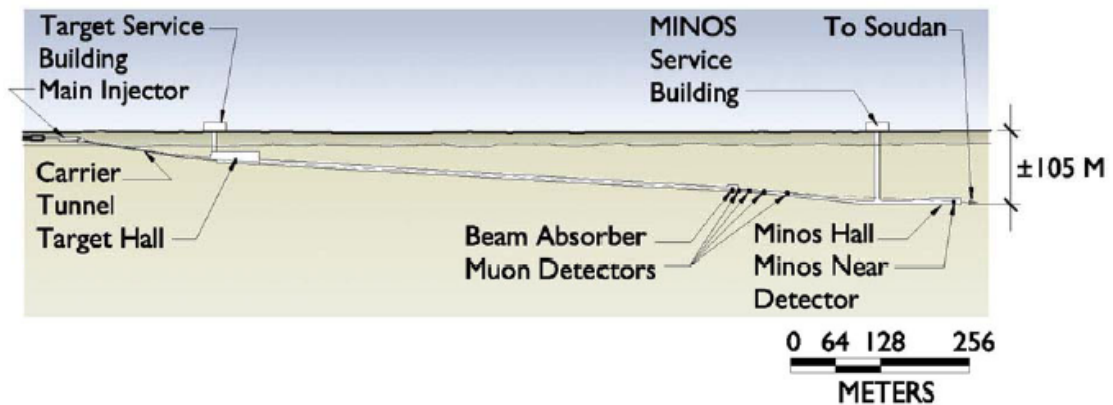
Ανάλογα με την τοποθέτηση των δύο μαγνητικών χοανών, διαφορετικής ορμής φορτισμένα μεσόνια κατευθύνονται προς το σωλήνα διάσπασης, οπότε διαμορφώνεται διαφορετικά το ενεργειακό φάσμα της δέσμης. Όσο πιο κοντά είναι η δεύτερη χοάνη στην πρώτη (που είναι πακτωμένη) τόσο χαμηλότερης ενέργειας αδρόνια εστιάζονται προς το σωλήνα διάσπασης. Έτσι, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε, όπως ήδη έχουμε αναφέρει, διάφορες δέσμες, οι οποίες χαρακτηρίζονται ως *υψηλής, μεσαίας και χαμηλής ενέργειας*. Στην εικόνα 2.15 βλέπουμε τα ενεργειακά φάσματα που προβλέπονται για αυτές τις τρεις διαφορετικές εστιάσεις.

Τα αδρόνια που εστιάζονται από το σύστημα των χοανών είναι πόνια και καόνια. Ο σωλήνας διάσπασης έχει μήκος 677.1 m και διάμετρο 1.98 m. Από το στόχο μέχρι την αρχή του σωλήνα μεσολαμβάνουν 50 m, οπότε συνολικά τα μεσόνια έχουν 727.1 m για να διασπασθούν δίνοντας  $\nu_\mu$  (βλ. εικόνα 2.16). Ο λόγος που απαιτείται τόσο μεγάλη απόσταση, τη στιγμή που τα πόνια έχουν χρόνο ζωής  $c\tau = 7.8$  m, είναι η σχετικιστική επιμήκυνση του χρόνου ζωής των μεσονίων. Στον σωλήνα συντηρείται κενό ( $< 1$  Torr), ώστε να μη χάνονται τα μεσόνια σε αλληλεπιδράσεις με πυρήνες. Στο τέρμα του σωλήνα υπάρχει ένας απορροφητής αδρονίων, ο οποίος εξυπηρετεί στο να απορροφά όσα μεσόνια δεν πρόλαβαν να διασπασθούν. Μεταξύ του απορροφητή και του κοντινού ανιχνευτή μεσολαμβάνουν  $\sim 300$  m εδάφους όπου απορροφώνται όσα μόνια προέκυψαν από τη διάσπαση των μεσονίων και δεν πρόλαβαν να διασπασθούν στο σωλήνα διάσπασης. Ο απορροφητής αδρονίων αποτελείται από 10 φύλλα σιδήρου πάχους 23.12 cm έκαστο, ενώ ψύχεται με νερό διότι αλλιώς θα λιώσει. Επίσης, ο σωλήνας διάσπασης είναι θωρακισμένος με τσιμέντο πάχους 2 m διότι τα τοιχώματά του απορροφούν μέρος των σωματιδίων που ταξιδεύουν μέσα του και καθίσταται ραδιενεργός, οπότε πρέπει να προστατευθούν τα υπόγεια ύδατα από αυτήν την ραδιενέργεια.





**Εικόνα 2.15:** Τα ενεργειακά φάσματα των CC αλληλεπιδράσεων  $\nu_\mu$ , όπως αυτά προβλέπονται για διαφορετικές συνθήκες εστίασης με τις μαγνητικές χοάνες. Η καμπύλη “perfect focusing” αναφέρεται στην περίπτωση όπου όλα τα προϊόντα του στόχου με κατάλληλο φορτίο θα εστιάζονταν σε μια δέσμη διαμέτρου όσο ένα μολύβι.



**Εικόνα 2.16:** Το προφίλ των εγκαταστάσεων του πειράματος MINOS στο Fermilab.

### Ο κοντινός ανιχνευτής

Βασική χρησιμότητα του κοντινού ανιχνευτή είναι να μετρά το τι ξεκινά να οδεύει προς το μακρινό ανιχνευτή, ώστε κατόπιν να μπορεί να γίνει σύγκριση του περιεχομένου της δέσμης νετρίνων πριν και μετά. Αν δεν υπήρχε ο κοντινός ανιχνευτής θα έπρεπε να γίνει σύ-

γκριση του φάσματος που θα καταγραφόταν στο μακρινό ανιχνευτή με ένα αρχικό φάσμα παραγόμενο με μεθόδους Monte Carlo, κάτι που θα ήταν πολύ αμφίβολης ακρίβειας. Επειδή ακριβώς ο κοντινός ανιχνευτής θα λειτουργήσει ως βάση αναφοράς για σύγκριση με το μακρινό ανιχνευτή, πρέπει να του μοιάζει όσο γίνεται περισσότερο ή, έστω, οι διαφορές του να επιφέρουν καλά γνωστές συνέπειες. Συγκεκριμένα, τρεις διαφορές είναι αναπόφευκτες:

- 1) Ακόμα κι αν δεν υπήρχαν ταλαντώσεις νετρίνων, το ενεργειακό φάσμα των δύο ανιχνευτών θα ήταν λίγο διαφορετικό, λόγω του ότι ο κοντινός ανιχνευτής βρίσκεται κοντά στην πηγή των νετρίνων η οποία δε μπορεί να θεωρηθεί σημειακή, γιατί εκτείνεται σχεδόν σε όλο το μήκος του σωλήνα διάσπασης. Αντίθετα, από το Sudan, ο σωλήνας διάσπασης φαίνεται σαν σημειακή πηγή νετρίνων.
- 2) Η ροή νετρίνων στον κοντινό ανιχνευτή είναι πολύ μεγαλύτερη απ' ό,τι στο μακρινό.
- 3) Ο κοντινός ανιχνευτής βρίσκεται σε μικρότερο βάθος απ' ό,τι ο μακρινός, οπότε δέχεται μεγαλύτερη ~270 φορές μεγαλύτερη ροή ατμοσφαιρικών νετρίνων.

Όσον αφορά στην πρώτη διαφορά, αυτή έχει να κάνει με το ότι κατά τη διάσπαση των μεσονίων, τα νετρίνα χαμηλότερης ενέργειας τείνουν να κατευθύνονται προς μεγαλύτερες γωνίες ως προς τη διεύθυνση κίνησης του μεσονίου, ενώ τα υψηλής ενέργειας νετρίνα εκπέμπονται σχεδόν στην ίδια διεύθυνση με το μεσόνιο από το οποίο προέρχονται. Η διάσπαση των μεσονίων και η γωνιακή κατανομή των νετρίνων είναι πράγματα που τα γνωρίζουμε καλά και μπορούμε να τα λάβουμε υπόψη στην ανάλυση. Άλλωστε, από τον κοντινό ανιχνευτή πρόκειται να χρησιμοποιήσουμε μόνο γεγονότα από την κεντρική περιοχή ( $r < 25$  cm), όπου αυτό το φαινόμενο είναι λιγότερο έντονο, γιατί σ' αυτήν την περιοχή φτάνουν κυρίως νετρίνα κινούμενα περίπου στη διεύθυνση του σωλήνα διάσπασης.

Σχετικά με τη δεύτερη διαφορά, αυτή μπορεί να περιοριστεί αν στην ανάλυση λάβουμε υπόψη μας μόνο γεγονότα του κοντινού ανιχνευτή που δεν παρουσίαζαν επικάλυψη και σύρρευση (overlap και pileup), δηλαδή γεγονότα όπου δεν τύχαινε να συμπέσουν δύο νετρίνα μαζί στον ανιχνευτή, ούτε να έρθει νέο νετρίνο πριν τελειώσει η καταγραφή του προηγούμενου. Στο «ξεκαθάρισμα» των καθαρών γεγονότων παίζει ρόλο το σύστημα λήψης δεδομένων του ανιχνευτή (Data Acquisition System).

Η τρίτη διαφορά που οφείλεται στη διαφορά ροών κοσμικής ακτινοβολίας, αυτή δεν αναμένεται να δημιουργήσει ιδιαίτερο πρόβλημα, διότι, παρόλο που συγκριτικά οι δύο ανιχνευτές έχουν μεγάλη διαφορά στη ροή, κατ' απόλυτη τιμή και οι δύο ροές είναι αρκετά μικρές. Μάλιστα στον κοντινό ανιχνευτή, όπου έχουμε πολλαπλάσια ροή κοσμικών ακτινών, συμβαίνει να έχουμε και υπερ-πολλαπλάσια ροή νετρίνων από τη δέσμη.

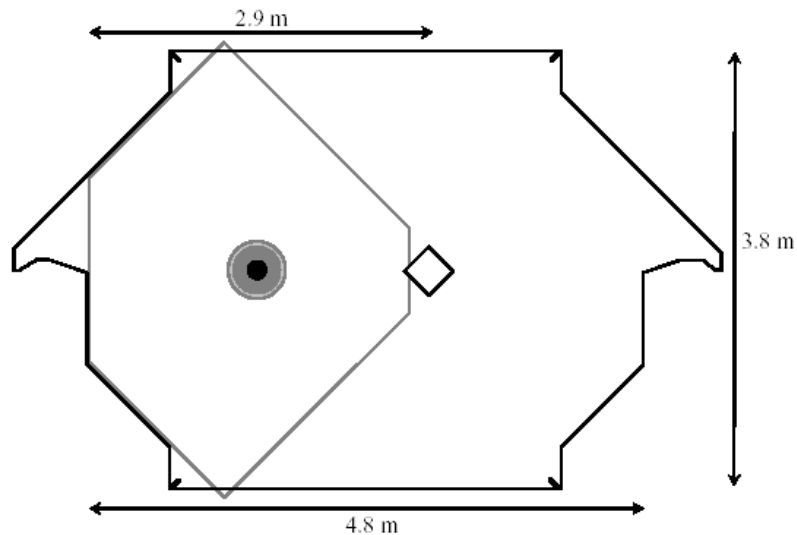
Η ροή στον κοντινό ανιχνευτή θα είναι τόσο υψηλή που θα επιτρέπει συνεχή παρακολούθηση της δέσμης. Παρ' όλα αυτά, για να έχουμε πλήρη παρακολούθηση της δέσμης, έχουν τοποθετηθεί τρεις κεραμικοί θάλαμοι ιονισμού πριν τον κοντινό ανιχνευτή, σε τρεις κοιλοότητες μετά το τέλος του σωλήνα διάσπασης.

Ο κοντινός ανιχνευτής έχει εγκάρσια διατομή σχήματος πεπλατυσμένου οκταγώνου, διαστάσεων 4.8x3.8 m (βλ. εικόνα 2.17). Το πηνίο που θα παράγει το μαγνητικό πεδίο του ανιχνευτή θα περάσει από μια τρύπα που βρίσκεται, όχι στο κέντρο του ανιχνευτή, αλλά 2.9 m από την αριστερή πλευρά, όπως φαίνεται στην εικόνα 2.17. Ο λόγος είναι ότι επιθυμούσαμε να μεγαλώσουμε την ωφέλιμη περιοχή του ανιχνευτή, δηλαδή την κεντρική περιοχή. Η δέσμη θα διέρχεται παράλληλα προς το πηνίο, σε απόσταση 1 m από αυτό. Λόγοι οικονομίας κυρίως επέβαλαν αυτό το πεπλατυσμένο σχήμα, ώστε να εξοικονομηθεί σίδηρος από σημεία πολύ μακριά από τη δέσμη, που ούτως ή άλλως δε θα λαμβάνονταν υπόψη.

Η διαμήκης ανατομία του κοντινού ανιχνευτή είναι αυτή που φαίνεται στην εικόνα 2.18 και περιλαμβάνει τα εξής τέσσερα μέρη:

- 1) Το  *veto*, που είναι το πρώτο τμήμα του ανιχνευτή που βρίσκεται η δέσμη, χρησιμεύει στο να αποκλείουμε τα γεγονότα νετρίνων που αλληλεπιδρούν σ' αυτήν την περιοχή. Ο λόγος είναι ότι επιθυμούμε μόνο γεγονότα «καθαρά», απαλλαγμένα από φαινόμενα που παρατηρούνται στην άκρη του ανιχνευτή και απαλλαγμένα από πιθανό υπόβαθρο λόγω αλληλεπιδράσεων νετρονίων. Τα γεγονότα που δεν αναπτύσσονται στην περιοχή του veto είναι απαλλαγμένα από τέτοιες ανωμαλίες. Το πάχος του σιδήρου αυτού του τμήματος είναι 0.5 m.

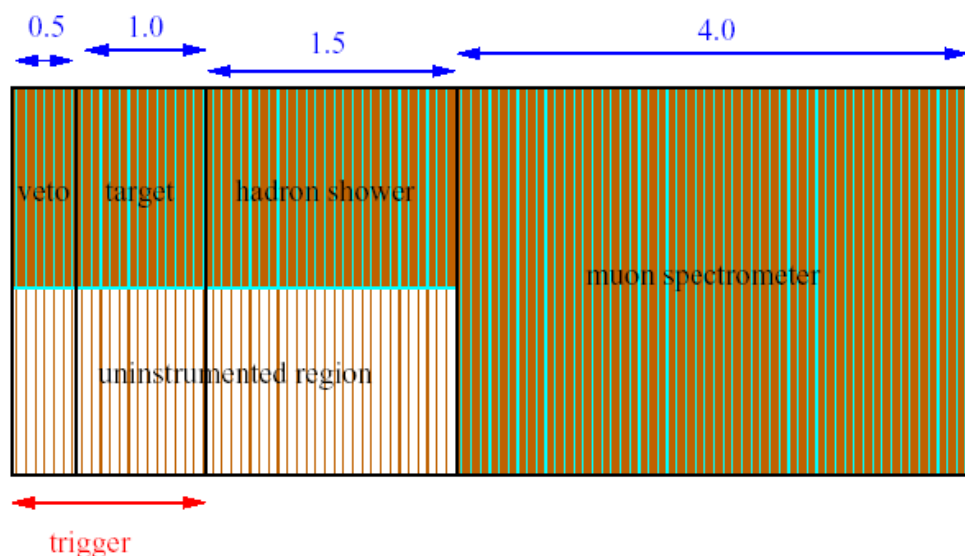
- 2) Ο στόχος, που είναι το κομμάτι όπου εκδηλώνονται οι αλληλεπιδράσεις νετρίνων, τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε στη σύγκριση μακρινού – κοντινού ανιχνευτή. Το πάχος σιδήρου αυτού του τμήματος είναι 1.0 m.
- 3) Το τμήμα αδρονικών καταγισμών, όπου αναπτύσσονται οι αδρονικοί καταγισμοί (showers) που επιτρέπουν την αναγνώριση του νετρίνου που αλληλεπιδρά και της ενέργειάς του. Έχει πάχος σιδήρου 1.5 m.
- 4) Ο φασματογράφος μιονίων, όπου παρατηρούμε την καμπυλότητα και το μήκος της τροχιάς των μιονίων που παράγονται στις CC αλληλεπιδράσεις νετρίνων  $\nu_{\mu}$ .



**Εικόνα 2.17:** Εγκάρσια διατομή κοντινού ανιχνευτή. Το τετράγωνο συμβολίζει την τρύπα από την οποία θα περάσει το πηνίο, ενώ ο σκοτεινός κύκλος είναι η κεντρική ωφέλιμη περιοχή με ακτίνα  $r < 25$  cm.

Όπως θα δούμε και στην περιγραφή του μακρινού ανιχνευτή, οι δύο ανιχνευτές αποτελούνται από διαδοχικά στρώματα σπινθηριστή και σιδήρου. Όμως, για λόγους οικονομίας, ο κοντινός ανιχνευτής δεν έχει σπινθηριστή σε όλη την εγκάρσια επιφάνειά του, ούτε σε όλα του τα επίπεδα. Τα πλακίδια σπινθηριστή τόσο του κοντινού όσο και του μακρινού ανιχνευτή είναι της ίδιας σχεδίασης και θα τα περιγράψουμε σε επόμενη παράγραφο. Κάθε επίπεδο σιδήρου έχει πάχος 2.54 cm. Στο μέρος του στόχου, κάθε τέταρτο κενό είναι πλήρως καλυμμένο με σπινθηριστή. Στο φασματογράφο μιονίων αυτό συμβαίνει σε κάθε πέμπτο επίπεδο. Αυτό γίνεται ώστε να μπορούμε να παρακολουθήσουμε με σχετικά οικονομικό τρόπο τα showers και τις μιονικές τροχιές που εκτείνονται πέραν του κεντρικού τμήματος του ανιχνευτή.

Στο μακρινό ανιχνευτή θα δούμε ότι γίνεται πολυπλεξία και κάθε λωρίδα σπινθηριστή διαβάζεται κι απ' τις δύο πλευρές της. Αντίθετα, στον κοντινό ανιχνευτή γίνεται λήψη σήματος μόνο από τη μία πλευρά (θα δούμε σε επόμενη παράγραφο τον τρόπο) ενώ δε χρησιμοποιείται πολυπλεξία, παρά μόνο στο κομμάτι του μιονικού φασματογράφου, όπου γίνεται τετραπλή πολυπλεξία, δηλαδή σε κάθε pixel των PMT φτάνουν 4 WLS οπτικές ίνες. Συνολικά, ο κοντινός ανιχνευτής αποτελείται από 282 επίπεδα σιδήρου, 153 επίπεδα σπινθηριστή και χρησιμοποιεί 194 M64 PMTs.



**Εικόνα 2.18:** Διαμήκης ανατομία του κοντινού ανιχνευτή. Η δέσμη εισέρχεται από αριστερά. Οι σημειωμένες διαστάσεις αντιπροσωπεύουν πάχος σιδήρου σε μέτρα. Η ανοιχτόχρωμη κάτω – αριστερή περιοχή είναι άνευ σπινθηριστού.

### Ο μακρινός ανιχνευτής

Ο μακρινός ανιχνευτής του MINOS έχει μάζα 5.4 kt, θα διαθέτει μαγνητικό πεδίο και, όπως και ο κοντινός, θα αποτελεί διαδοχή επιπέδων σιδήρου και σπινθηριστή. Σε αντίθεση με τον κοντινό, όλα τα κενά του μακρινού είναι πλήρως γεμισμένα με σπινθηριστή.

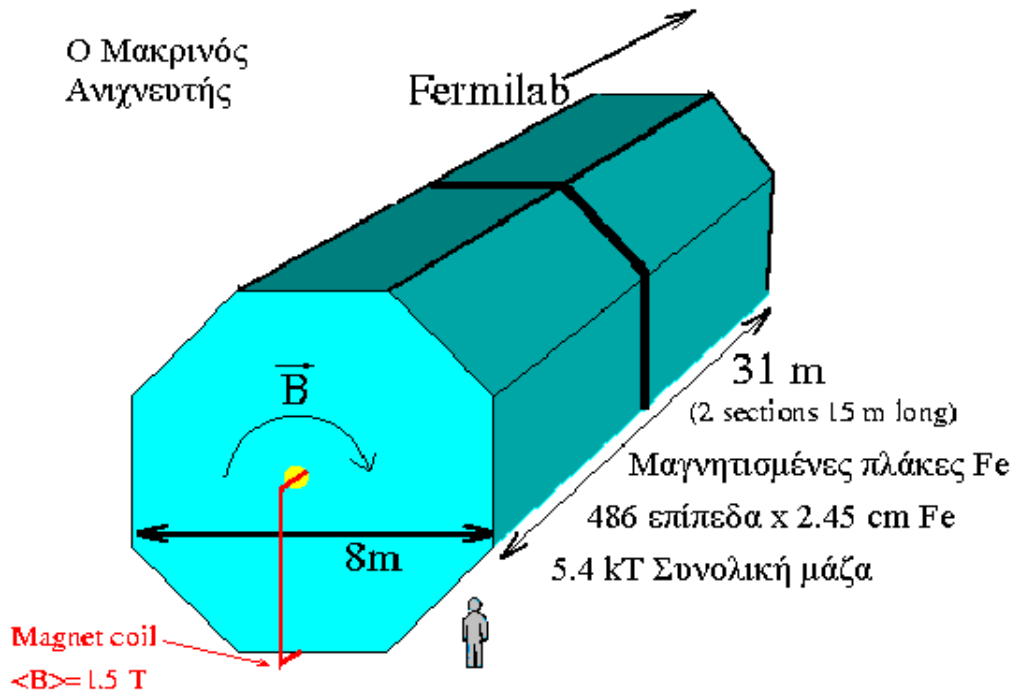
Βασική δομική μονάδα (module) του ανιχνευτή είναι ένα επίπεδο σιδήρου πάχους 2.54 cm, οκταγωνικού σχήματος, διαμέτρου 8 m, όπως φαίνεται στην εικόνα 2.19, ακολουθούμενο από ένα στρώμα πλακιδίων σπινθηριστή, που θα περιγράψουμε στη συνέχεια. Ολόκληρος ο ανιχνευτής αποτελείται από δύο μεγάλα τμήματα, που το καθένα περιέχει 242 τέτοια modules. Για την ακρίβεια, επειδή το «sandwich» αρχίζει και τελειώνει με στρώμα σιδήρου, το καθένα από τα δύο μισά του ανιχνευτή περιέχει 242 επίπεδα σπινθηριστή και 243 επίπεδα σιδήρου. Το καθένα από τα δύο μισά τροφοδοτείται ανεξάρτητα με ρεύμα μέσω ενός πηνίου που διέρχεται από το κέντρο του και δημιουργεί μαγνητικό πεδίο μέσης έντασης  $\langle B \rangle = 1.5$  T.

Ο χάρτης του μαγνητικού πεδίου απεικονίζεται στην εικόνα 2.20.

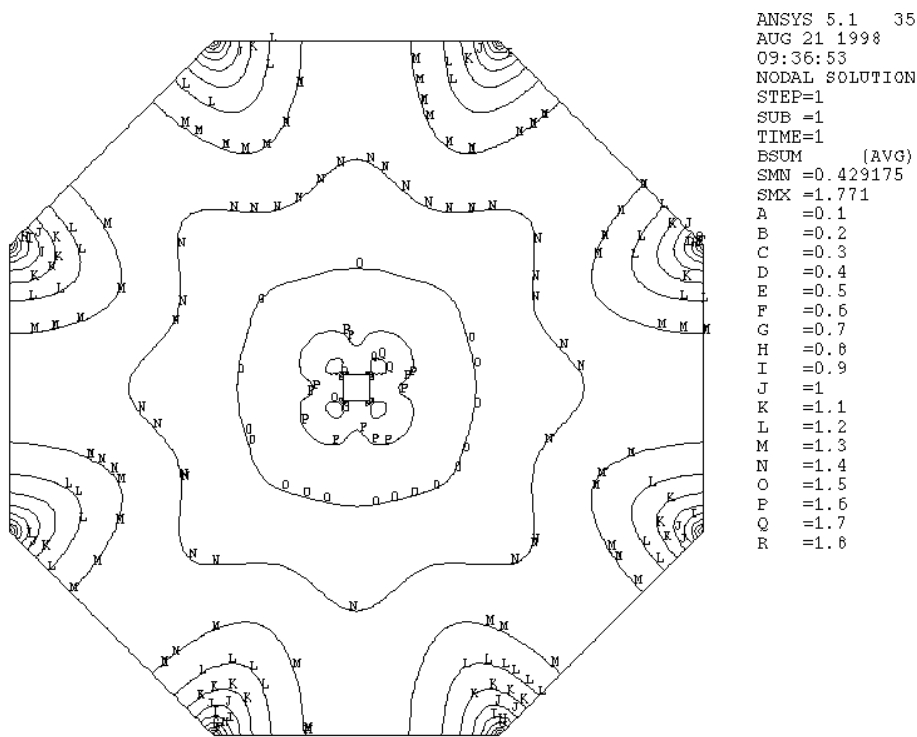
Η ιδανική κατασκευή που θα επέτρεπε την καλύτερη τοπολογική διακριτική ικανότητα θα ήταν ο σπινθηριστής σε όλα τα επίπεδα να είναι χωρισμένος σε μικρές τετράγωνα κυψελίδες και η λήψη σήματος από μια κυψελίδα να σηματοδοτούσε την απόθεση ενέργειας στις συγκεκριμένες συντεταγμένες x, y, z κάθε κυψελίδας. Μια τέτοια κατασκευή, όμως, θα κόστιζε πάρα πολύ και θα έκανε τον ανιχνευτή αρκετά πιο πολύπλοκο, οπότε προτιμήθηκε η εξής δομή: Κάθε επίπεδο σπινθηριστή είναι αποτελούμενο από 192 λωρίδες (strips) σπινθηριστή, που η κάθε strip έχει εύρος 4 cm και μήκος μέχρι 8 m, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.21. Ο προσανατολισμός των λωρίδων κάθε επιπέδου εναλλάσσεται, ώστε να σχηματίζει κάθε φορά γωνία 90° με τις strips του προηγούμενου και του επόμενου επιπέδου. Έτσι, τα μονά επίπεδα μας δίνουν μια συντεταγμένη στη διεύθυνση U, ενώ τα ζυγά επίπεδα μας δίνουν μια συντεταγμένη στη διεύθυνση V, που U και V είναι κάθετες μεταξύ τους.

Στην εικόνα 2.21 βλέπουμε ένα άρτιο κι ένα περιττό module του ανιχνευτή χωρισμένα σε 8 φαρδιές λωρίδες. Προφανώς, κάθε τέτοια φαρδιά λωρίδα περιέχει μια ομάδα από strips, 20 ή 28, και ονομάζεται scintillator module. Κάθε επίπεδο σπινθηριστή χωρίζεται σε 4 scintillator modules των 28 strips και σε 4 scintillator modules των 20 strips. Στην επόμενη παράγρα-

φο θα αναφερθούμε με λεπτομέρειες στη λειτουργία του scintillator και στην πολυπλεξία που εφαρμόζεται στο μακρινό ανιχνευτή.

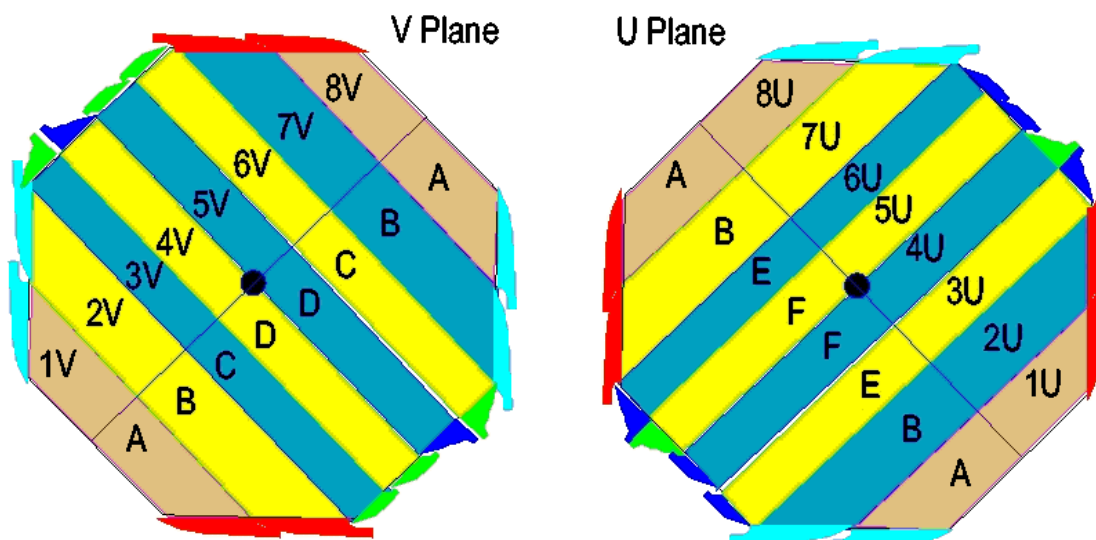


Εικόνα 2.19: Το σχήμα και οι διαστάσεις του μακρινού ανιχνευτή.



far detector -- contours of constant B-modulus

Εικόνα 2.20: Εγκάρσια τομή του μαγνητικού πεδίου, επιφάνειες σταθερής έντασης πεδίου.



Εικόνα 2.21: Τα επίπεδα U και V και οι ομάδες των strips.

### Λειτουργία του σπινθηριστή – συλλογή σήματος

Το σύστημα σπινθηρισμού του πειράματος MINOS χρησιμοποιεί ως σπινθηριστή πολυστυρενίου (πλαστικό) διότι έτσι εξασφαλίζει ορισμένα οφέλη. Τα βασικότερα οφέλη είναι:

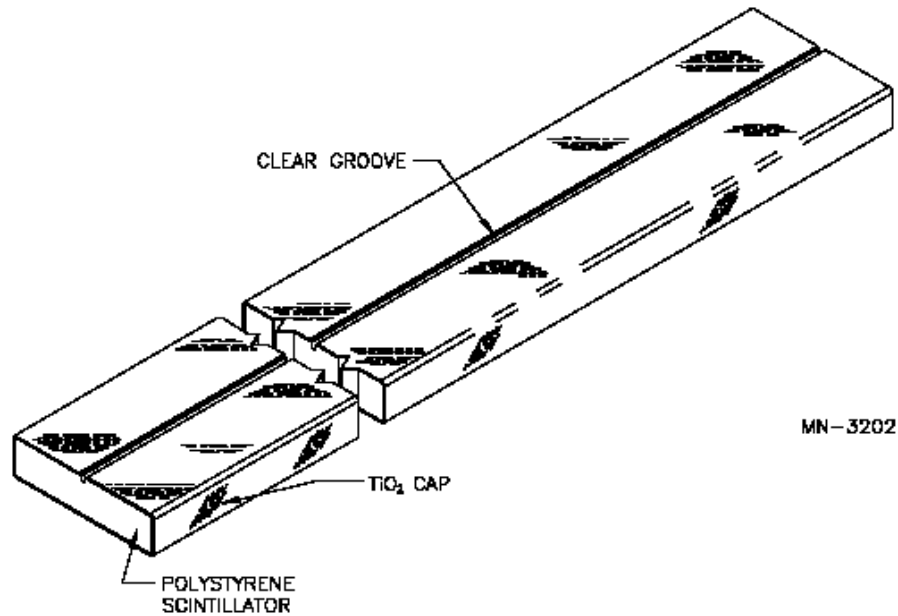
- 1) Καλή ενεργειακή διακριτική ικανότητα. Αναμένεται ότι για ηλεκτρομαγνητικά showers θα έχουμε  $\Delta E/E = 0.23/\sqrt{E}$ , ενώ για αδρονικά θα έχουμε  $\Delta E/E = 0.53/\sqrt{E}$ , όπου το E είναι σε GeV.
- 2) Δυνατότητα ψιλής κατάτμησης. Προσομοιώσεις έχουν δείξει ότι οι strips είναι πιο αποτελεσματικές όταν έχουν πάχος κάτω από 4 cm. Για την ακρίβεια, οι strips του πειράματος είναι εύρους 4.1 cm. Το πλαστικό επιτρέπει εύκολα να του δώσουμε αυτό το σχήμα.
- 3) Εύκολη εξαγωγή της πληροφορίας. Χρησιμοποιώντας στερεό scintillator είναι εύκολο να περάσουμε από μέσα οπτικές ίνες (όπως θα δούμε) και να διαβάσουμε το σήμα κι απ' τις δύο άκρες.
- 4) Πρακτικά πλεονεκτήματα: Είναι ανθεκτικό και εύκολο στη χρήση υλικό, οπότε οι strips μπορούν να συναρμολογηθούν και να δοκιμαστούν σε διάφορα μέρη στον κόσμο, χωρίς να χρειάζεται εξαιρετική τεχνογνωσία. Επίσης η τοποθέτησή τους είναι εύκολη, είναι αξιόπιστες και με μικρή ανάγκη συντήρησης.

Η παρακάτω λίστα συνοψίζει τα μέρη του συστήματος σπινθηρισμού του ανιχνευτή, καθώς και τα χαρακτηριστικά του:

- **Λωρίδες σπινθηριστή (strips):** Όπως αναφέραμε, ανάμεσα στα επίπεδα σιδήρου βρίσκεται το «ενεργό» τμήμα του ανιχνευτή, που είναι οι λωρίδες πολυστυρενίου (πλαστικού) εμπλουτισμένου με 1% POP και 0.03% POPOP. Το πολυστυρένιο λειτουργεί ως σπινθηριστής αλλά δεν είναι υψηλής ποιότητας και επιλέχθηκε για τους λόγους που προαναφέραμε και για το σχετικά χαμηλό του κόστος. Κάθε λωρίδα περιβάλλεται από ένα κάλυμμα  $TiO_2$ , το οποίο λειτουργεί ως ανακλαστήρας και δεν επιτρέπει στο φως να διαχέεται μεταξύ γειτονικών strips. Κάθε επίπεδο περιέχει 192 παράλληλες strips, όπως έχουμε ήδη αναφέρει. Κάθε strip φέρει κεντρικά κατά μήκος της μια αύλακα, από την οποία διέρχεται μια WLS οπτική ίνα (βλ. εικόνα 2.22).

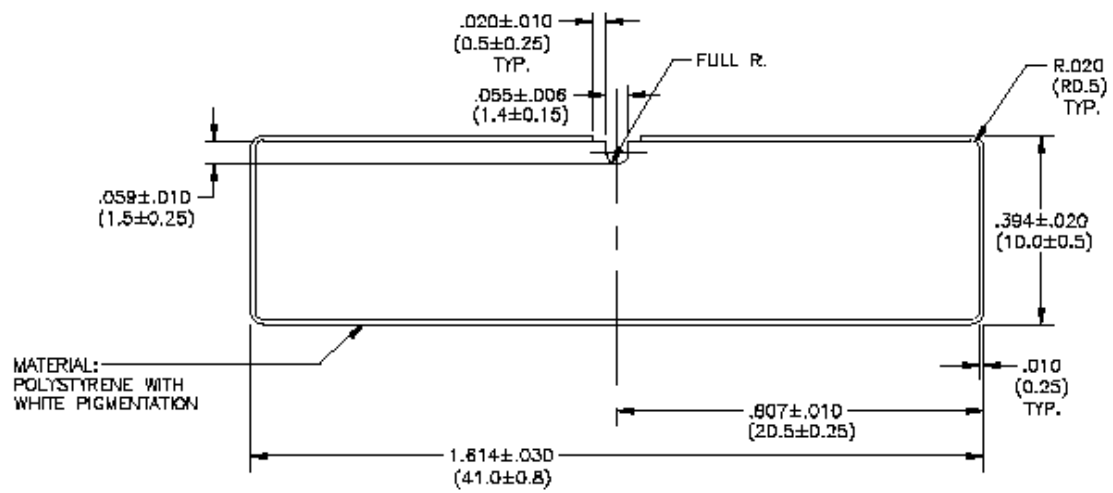
- **Οπτικές ίνες WLS:** Οι WaveLength Shifting ίνες, διαμέτρου 1.2 mm, παίρνουν το μπλε φως (420 nm) που παράγεται στο πολυστυρένιο και, λόγω αυτού, φωτοβολούν δευτερογενώς σε μήκος κύματος μεγαλύτερο (του πράσινου χρώματος, 470 nm). Το πράσινο φως διαδίδεται και προς τις δύο κατευθύνσεις της ίνας. Η συλλογή του γίνεται και από τα δύο άκρα. Ο λόγος που χρησιμοποιείται WLS ίνα και όχι μια απλή διάφανη ίνα είναι ότι χρειάζεται να στείλουμε στις PMTs φως με μήκος κύματος στην περιοχή όπου παρουσιάζουν μέγιστη αποδοτικότητα (quantum efficiency). Όμως, το τίμημα που πληρώνουμε με το να χρησιμοποιούμε δευτερογενώς ακτινοβόλουσα οπτική ίνα είναι ότι το φως αποσβένεται μέσα σε λίγα μέτρα τέτοιας ίνας. Γι' αυτό, όπως θα δούμε, όταν φτάσουμε στα όρια του ανιχνευτή, το πράσινο φωτεινό σήμα μεταβιβάζεται σε διαφανείς οπτικές ίνες, όπου μπορεί και ταξιδεύει άσβεστο για μεγαλύτερη απόσταση.
- **Scintillator modules (μονάδες σπινθηριστή):** Όπως έχουμε αναφέρει, οι 192 strips κάθε επιπέδου ομαδοποιούνται σε 20άδες ή 28άδες γειτονικών strips. Πρώτα οι strips ομαδοποιήθηκαν σε scintillator modules και μετά τα scintillator modules μεταφέρθηκαν και τοποθετήθηκαν στον ανιχνευτή. Το σχήμα τους είναι τέτοιο που να καλύπτεται πλήρως το οκταγωνικό σχήμα του module του ανιχνευτή (βλ. εικόνα 2.21). Κάθε scintillator module περιβάλλεται από ένα αλουμινένιο πλαίσιο, το οποίο απαγορεύει στο φως να διαφύγει από το scintillator module ή φως από κάποιο γειτονικό scintillator module να εισέλθει. Στις δύο άκρες κάθε scintillator module υπάρχουν πλαστικές φωτοστεγανές συσκευές, οι οποίες κατευθύνουν τις ίνες WLS στους οπτικούς συνδέσμους (optical connectors).
- **Οδηγοί του φωτός προς τους φωτοανιχνευτές:** Το φως που φτάνει στην επιφάνεια κάθε module του ανιχνευτή μεταφέρεται μέσω καθαρών, διαφανών οπτικών ινών στα κιβώτια πολυπλεξίας (multiplexing boxes), στα οποία είναι τοποθετημένοι οι φωτοανιχνευτές. Σε κάθε σημείο όπου το φως περνά από τη μία ίνα στην άλλη (από την WLS στη διαφανή ίνα και μετά όταν φτάνει στο κιβώτιο πολυπλεξίας) χρησιμοποιούνται optical connectors, με σκοπό η μεταβίβαση να γίνεται χωρίς σημαντική απώλεια της ισχύος του φωτός (βλ. εικόνα 2.23).
- **Κιβώτια πολυπλεξίας:** Σε κάθε κιβώτιο πολυπλεξίας περιέχονται 3 PMTs και, όπως θα δούμε, κάθε PMT έχει 16 pixels, δηλαδή μπορεί να δεχθεί 16 σήματα. Προκειμένου να εξοικονομήσουμε PMTs και να μειώσουμε το κόστος του ανιχνευτή, σε κάθε pixel του κάθε PMT δε φτάνει ένα σήμα, αλλά 8, δηλαδή τα σήματα από τα 8 δεξιά ή τα 8 αριστερά άκρα 8 WLS ινών. Τα άκρα των ινών που επιλέγονται για να οδηγηθούν στο ίδιο pixel φροντίζεται να απέχουν περίπου 1 m, με την ελπίδα ότι πολύ σπάνια ένα γεγονός θα έχει εγκάρσια έκταση μεγαλύτερη από 1 m, οπότε πολύ σπάνια θα φτάνουν 2 σήματα στο ίδιο pixel ταυτόχρονα δημιουργώντας σύγχυση. Το τίμημα που πληρώνουμε είναι ότι λαμβάνοντας ένα σήμα σε ένα pixel, αυτό μπορεί να έχει έρθει από 8 διαφορετικές strips, οπότε πρέπει να κάνουμε αποπολυπλεξία (**de-multiplexing**) για να εντοπίσουμε τη strip απ' όπου πραγματικά προέρχεται το σήμα. Για να γίνει αυτό χρησιμοποιούμε και τα δύο άκρα των WLS ινών, τα οποία είναι πολυπεπλεγμένα με τέτοιον τρόπο ώστε να αίρεται η αμφιβολία αν συνδυάσουμε την εικόνα που παίρνουμε από τα δεξιά άκρα με την εικόνα που παίρνουμε από τα αριστερά άκρα. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι τα αριστερά άκρα των strips υπ' αριθμούς (1, 30, 60, 80, 100, 120, 150, 180) καταλήγουν στο pixel A, ενώ τα δεξιά άκρα των strips υπ' αριθμούς (2, 31, 60, 81, 101, 121, 151, 181) καταλήγουν στο pixel Δ. Τότε, αν λάβουμε σήμα και στο pixel A και στο pixel Δ, είμαστε σίγουροι ότι χτυπήθηκε το strip υπ' αριθμόν 60.
- **Φωτοανιχνευτές:** Οι φωτοανιχνευτές που χρησιμοποιούνται στο μακρινό ανιχνευτή είναι φωτοπολλαπλασιαστές (PhotoMultiplier Tubes) τύπου Hamamatsu R5900U-00-M16. Όπως αναφέραμε, είναι 16-κάναλοι, δηλαδή μπορούν ταυτόχρονα να λάβουν και να ενισχύσουν 16 σήματα που φτάνουν στις 16 εισόδους τους, που ονομάζονται

pixels<sup>1</sup>. Εφόσον κάθε πλευρά ενός module δίνει 192 σήματα εξόδου, για να διαβάσουμε μια πλευρά χρειαζόμαστε  $192/8 = 24$  pixels δηλαδή  $24/16 = 1.5$  PMTs. Άρα με 1 κιβώτιο πολυπλεξίας διαβάζουμε από την μία πλευρά 2 επίπεδα σπινθηριστή. Άρα, ολόκληρος ο μακρινός ανιχνευτής χρησιμοποιεί  $(2 \text{ πλευρές}) \times (484 \text{ επίπεδα}) \div (2) = 484$  κιβώτια πολυπλεξίας, δηλαδή  $484 \times 3 = 1452$  PMTs.

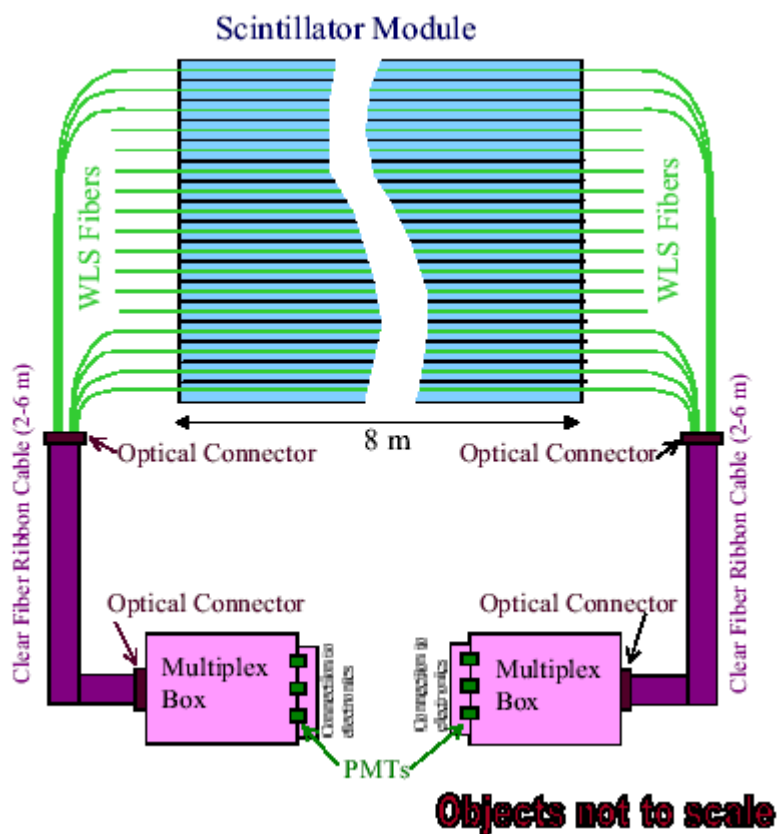


<sup>1</sup> Στη βαθμονόμηση του κάθε pixel των PMTs συνέβαλε καθοριστικά το ΕΦΥΕΕ του Πανεπ. Αθηνών.





Εικόνα 2.22: Άποψη και εγκάρσια τομή μιας scintillator strip.

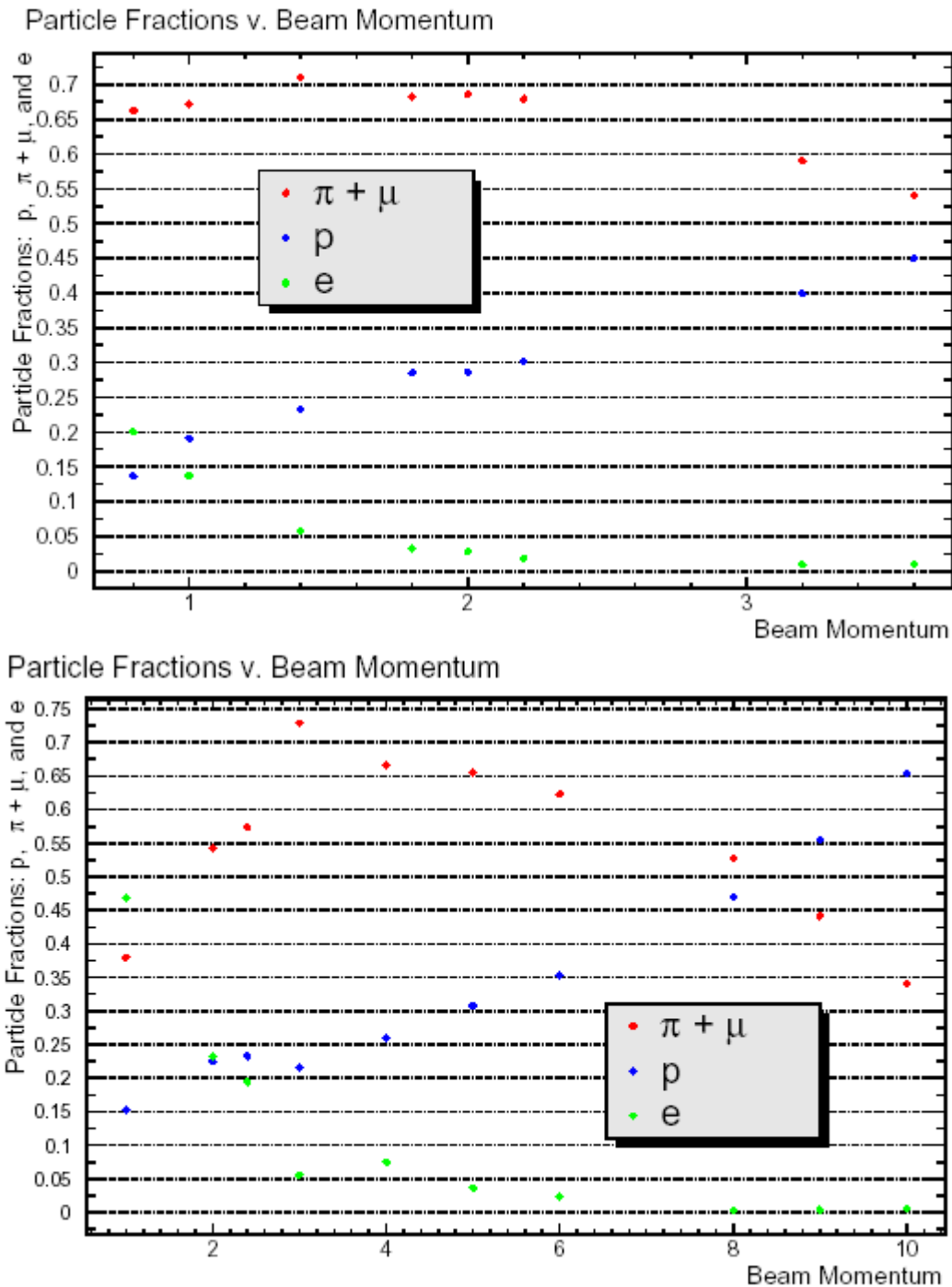


Εικόνα 2.23: Η διαδρομή του φωτός από τις strips μέχρι τις PMTs.

### Ο ανιχνευτής CalDet

Ο CalDet είναι ένας μικρός ανιχνευτής εγκατεστημένος στο CERN, ο οποίος χρησιμοποιείται για να γίνει βαθμονόμηση των μερών του κοντινού και του μακρινού ανιχνευτή. Το βάρος του είναι περίπου 5 τόνοι, περιλαμβάνει 60 επίπεδα σιδήρου και σπινθηριστή, τετράγωνης διατομής 1 x 1 m. Κάθε επίπεδο σπινθηριστή είναι χωρισμένο σε 24 λωρίδες (strips), οι οποίες από επίπεδο σε επίπεδο είναι οριζόντιες και κατακόρυφες εναλλάξ, εκτεινόμενες στις διευθύνσεις X και Y. Χρησιμοποιείται το ίδιο υλικό σπινθηρισμού και το ίδιο μήκος οπτικών ινών, όπως και στους δύο ανιχνευτές του MINOS. Σε αντίθεση με τους δύο ανιχνευτές, ο CalDet δε διαθέτει μαγνητικό πεδίο.

Ο CalDet εκτίθεται σε δέσμη που περιέχει ηλεκτρόνια, μόνια, πιόνια, πρωτόνια, καόνια και δευτέρια, ενώ δέχεται φυσικά και κοσμική ακτινοβολία. Η δέσμη εστιάζεται μέσω μαγνητικών πεδίων και μπορούμε να επιλέξουμε το φορτίο της (θετικό ή αρνητικό, ανάλογα με τη φορά του ρεύματος στους ηλεκτρομαγνήτες) και την ορμή της (ανάλογα με την ένταση του εστιάζοντος μαγνητικού πεδίου). Υπάρχουν δύο γενικές ρυθμίσεις της δέσμης, με τα ονόματα T7 και T11. Στην εικόνα 2.24 βλέπουμε τη σύσταση της δέσμης όπως μετρήθηκε για τις δύο αυτές ρυθμίσεις, σε διάφορες ορμές.



**Εικόνα 2.24:** Η ποσοστιαία σύσταση της δέσμης που προσπίπτει στον CalDet, συναρτήσει της ορμής. **Επάνω** φαίνονται οι μετρήσεις για δέσμη T11, ενώ **κάτω** για δέσμη T7.

Εκτός από τη βαθμονόμηση των ηλεκτρονικών μερών του MINOS, ο CalDet εξυπηρετεί και στην αναγνώριση σωματιδίων. Πριν ένα σωματίδιο φτάσει στον CalDet αφήνει δύο πληροφορίες που βοηθούν στην ταυτοποίησή του: τον χρόνο πτήσης μεταξύ δύο TDC paddles που απέχουν γνωστή απόσταση και το σήμα που αφήνει στον ανιχνευτή ακτινοβολίας Cerenkov. Από το χρόνο πτήσης (TOF) μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα του σωματιδίου και, γνωρίζοντας την ορμή του, να υπολογίσουμε τη μάζα του, οπότε να το αναγνωρίσουμε. Όταν οι ορμές μεγαλώνουν ( $p > \sim 0.6$  GeV) ο TOF γίνεται τόσο παρόμοιος για τα  $e$ ,  $\mu$  και  $\pi$ , που η διακριτική ικανότητα των TDC δεν αρκεί για να διαχωριστούν αυτά τα ελαφρύτερα σωματίδια της δέσμης. Γι' αυτό χρησιμοποιούμε και τον ανιχνευτή Cerenkov, που σαν βασικό μέρος του έχει μια ποσότητα αερίου σε ρυθμιζόμενη πίεση, ώστε μόνο τα γρηγορότερα σωματίδια (τα

ηλεκτρόνια) να ξεπερνούν την ταχύτητα του φωτός στο μέσο αυτό και να δίνουν ακτινοβολία Cerenkov. Συνδυάζοντας την πληροφορία του TOF και του Cerenkov δυνάμεθα να διαχωρίσουμε πολύ καλά τα ηλεκτρόνια και τα βαρύτερα σωματάρια (πρωτόνια, δευτέρια), ενώ η αναγνώριση γίνεται πιο δύσκολη στην περίπτωση των πιονίων και των μιονίων, που δε δίνουν Cerenkov, ενώ και οι μάζες τους είναι παραπλήσιες και οι TOF τους διαφέρουν λίγο.

Τέλος, η βοήθεια του CalDet είναι πολύ σημαντική διότι μας βοηθά να τελειοποιούμε τα προγράμματα που αναπαριστούν με μεθόδους Monte Carlo (MC) τα γεγονότα στον μακρινό και στον κοντινό ανιχνευτή. Αυτή τη στιγμή είναι ο μόνος ανιχνευτής με τα ηλεκτρονικά του MINOS που έχει λάβει πραγματικά data, οπότε παρατηρώντας το πώς καταγράφονται τα γεγονότα σε αυτόν, φροντίζουμε ώστε οι MC προσομοιώσεις να δίνουν όσο γίνεται πιο παρόμοια γεγονότα.

Στο επόμενο κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με την αναγνώριση σωματιδίων στο CalDet. Εκμεταλλευόμεθα την πληροφορία του TOF και του θαλάμου Cerenkov για να μάθουμε τη μορφολογία (τοπολογία και τρόπο εναπόθεσης ενέργειας) των γεγονότων που αποτυπώνουν τα διάφορα σωματάρια στον CalDet. Αν μάθουμε να ταυτοποιούμε τα ποικίλα σωματάρια βλέποντας τη μορφολογία των αποτυπωμάτων τους στον ανιχνευτή, τότε θα είμαστε σε θέση να κάνουμε το ίδιο και στον μακρινό και στον κοντινό ανιχνευτή, όπου δε θα έχουμε το TOF και τον θάλαμο Cerenkov. Εκεί, όπως έχουμε εξηγήσει μιλώντας για τη φυσική του MINOS, οι αλληλεπιδράσεις νετρίνων θα έχουν ως προϊόντα τέτοια σωματάρια, οπότε θα πρέπει να μπορούμε να τα αναγνωρίσουμε, ώστε κατ' επέκταση να αναγνωρίζουμε και τη γεύση του νετρίνου που αλληλεπεδράσε.



## Τρίτο Κεφάλαιο – Ανάλυση

Στο κεφάλαιο αυτό πρόκειται να περιγράψω την ανάλυση δεδομένων που έκανα, σε συνεργασία βεβαίως με ολόκληρη την ομάδα του ΕΦΥΕΕ.

### Προεπισκόπηση

Στην ανάλυση που διεξήγαγα χρησιμοποίησα κυρίως πραγματικά δεδομένα, προερχόμενα από τον CalDet, αλλά επεκτάθηκα και σε δεδομένα που παράχθηκαν με *Monte Carlo (MC)* όπου αυτό ήταν απαραίτητο για την εξαγωγή συμπερασμάτων.

Δύο είναι τα πλεονεκτήματα των δεδομένων MC, χάρη των οποίων χρησιμοποιούνται ευρύτατα:

- Παράγονται σε αφθονία, γεγονός που επιτρέπει ανάλυση με μεγαλύτερο δείγμα, επομένως οδηγούν σε στατιστικά ασφαλέστερα συμπεράσματα.
- Παράγονται κατά δική μας βούληση, δηλαδή είναι εξομοιωμένα γεγονότα (events) γνωστών προδιαγραφών. Συγκεκριμένα, γνωρίζουμε στα MC data τι σωματία έχουμε και σε τι ενέργεια. Αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό διότι ορισμένες φορές στα πραγματικά δεδομένα είναι αδύνατον να ξεχωρίσουμε μια ποικιλία σωματιδίων από μια άλλη, αδυνατώντας έτσι να κάνουμε ξεχωριστή μελέτη της συμπεριφοράς κάθε ποικιλίας.

Από την άλλη, το γεγονός ότι εργάστηκα με πραγματικά data μου προσέφερε τα εξής πλεονεκτήματα:

- Οι μέθοδοι ανάλυσης που εφάρμοσα βελτιστοποιήθηκαν προκειμένου να έχουν το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα όταν θα εφαρμόζονται σε πραγματικά γεγονότα, το οποίο είναι και το ζητούμενο. Γίνεται προσπάθεια συνεχώς ώστε τα MC γεγονότα να μοιάζουν όσο το δυνατόν περισσότερο στα πραγματικά, αλλά αυτό δεν έχει επιτευχθεί απολύτως, οπότε το να δουλέψει μια μέθοδος σε MC δεδομένα δεν είναι αυτοσκοπός.
- Απέκτησα εμπειρία του πώς μοιάζουν τα πραγματικά γεγονότα και πώς εφαρμόζουμε διάφορες μεθόδους ανάλυσης σε αυτά, όπου η ανάλυση είναι δυσκολότερη, εφόσον τα πραγματικά δεδομένα περιέχουν και αστάθμητους παράγοντες (θόρυβο, συστηματικά σφάλματα κλπ.).

Τα CalDet δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν βρίσκονται κωδικοποιημένα σε αρχεία root, κατάλληλα για χρήση από το πακέτο ανάλυσης ROOT. Κάθε κύκλος λειτουργίας του CalDet φέρει έναν αριθμό και βρίσκεται αποθηκευμένος σε ένα root-αρχείο.

Η βασική μέθοδος ανάλυσης που χρησιμοποίησα είναι η εφαρμογή Τεχνητών Νευρωνικών Δικτύων (*Artificial Neural Networks, ANNs*) για την αναγνώριση σωματιδίων στον CalDet, χρησιμοποιώντας μορφολογικά κριτήρια, δηλαδή την τοπολογία και την κατανομή της αποτιθέμενης ενέργειας των showers και των tracks που αφήνουν τα διάφορα σωματία στον CalDet. Ο λόγος που χρησιμοποίησα μόνο μορφολογικά κριτήρια είναι ότι τέτοια θα είναι διαθέσιμα στο μακρινό και στον κοντινό ανιχνευτή όταν θα λειτουργεί το MINOS.

Για να καταλήξω στην κατασκευή ANNs χρειάστηκε να ολοκληρώσω μια σειρά άλλων αναλύσεων, οι οποίες ανέδειξαν το πώς θα έπρεπε να χρησιμοποιήσω τα ANNs.

Πρώτα, έπρεπε να γίνει απεικόνιση γεγονότων στην οθόνη, ώστε να αποκτήσουμε πείρα του πώς μοιάζουν οι σχηματισμοί των διαφόρων σωματιδίων. Μόνο αν μάθουμε να ξεχωρίζουμε χονδρικά τα διάφορα σωματάρια δια οφθαλμού, μπορούμε να ελπίζουμε ότι θα κατασκευάσουμε ένα ANN που να κάνει το ίδιο. Το πρόγραμμα (project) που κάνει αυτήν την απεικόνιση με έναν τρόπο φιλικό προς το χρήστη ονομάζεται DISPLAY.

Στις παρυφές του προγράμματος DISPLAY κατασκευάσαμε ένα μικρό πρόγραμμα Monte Carlo, το οποίο αναπαράγει τους χρόνους πτήσης (TOFs) των διαφόρων σωματιδίων που υ-

πάρχουν στη δέσμη του CALDET. Αυτό το εργαλείο, που το ονομάζω *TOF*, χρησίμευσε αρκετές φορές στο να συγκρίνουμε τους αληθινούς χρόνους πτήσης με τους MC-υπολογιζόμενους σε διάφορες ορμές και να αξιοποιήσουμε έτσι καλύτερα την πληροφορία του χρόνου πτήσης στην ταυτοποίηση των σωματιδίων στον CalDet.

Εν συνεχεία, έγινε εκτεταμένη σύγκριση των χαρακτηριστικών των γεγονότων που παρήγαγε το MC με αυτά των πραγματικών δεδομένων. Ελέγξαμε με αυτόν τον τρόπο το πόσο συμβατό είναι το MC με τα αληθινά δεδομένα, ώστε να γνωρίζουμε εάν είναι σκόπιμο να τα χρησιμοποιήσω για εκπαίδευση νευρωνικών δικτύων. Εντοπίσαμε τις μεταβλητές που είναι περισσότερο συμβατές με την πραγματικότητα και αυτές που είναι λιγότερο. Η μελέτη αυτή γίνεται ταυτόχρονα και από άλλες ομάδες του MINOS Collaboration, με σκοπό τη συνεχή βελτίωση του MC κώδικα.

Επίσης, έγινε σύγκριση των πραγματικών μεταβλητών μεταξύ τους, ώστε να διαπιστώσουμε ποιες είναι περισσότερο διαχωριστικές, δηλαδή ποιες ακολουθούν περισσότερο διαφορετικές κατανομές σε ηλεκτρονικά, λόγου χάρι, και μη ηλεκτρονικά γεγονότα. Οι μεταβλητές που ακολουθούν αρκετά διαφορετικές κατανομές ονομάζονται *διαχωριστικές μεταβλητές* (*discriminating variables*) και ενδείκνυνται για την εκπαίδευση νευρωνικών δικτύων, διότι αποτελούν τα διαφοροποιά στοιχεία των διαφόρων ειδών γεγονότων.

Μέσα από πολλούς πειραματισμούς με διάφορες μεταβλητές και αρχιτεκτονικές νευρωνικών δικτύων, έφτασα στην κατασκευή ANNs με ικανοποιητική απόδοση. Κατανόησα ποιος είναι ο πλέον ενδεδειγμένος τρόπος για να εκπαιδεύονται τα νευρωνικά αυτά δίκτυα. Βρήκα μια μέθοδο με την οποία μπορώ να υπολογίζω τις παραμέτρους ενός ANN όταν αυτό χρησιμοποιηθεί για την αναγνώριση ενός πληθυσμού με διαφορετική σύσταση (διαφορετικά πλήθη signal και background). Κατάφερα να εκπαιδεύσω και να εφαρμόσω ANNs σε γεγονότα όπου επιβάλλω κατώφλι στο ύψος παλμού (*pulse height cut*) ώστε να απομακρύνω τα hits που εμφανίζονται χτυπημένα λόγω cross-talk<sup>1</sup>.

Παράλληλα, έλεγξα την απόκριση του ανιχνευτή σε ηλεκτρόνια, καταλήγοντας σε μια ευθεία βαθμονόμησης. Εκτός του ότι είχε ενδιαφέρον να διαπιστώσουμε εάν η απόκριση του ανιχνευτή σαν συνάρτηση της ενέργειας είναι η αναμενόμενη, η ευθεία βαθμονόμησης βοήθησε και στον ποιοτικό έλεγχο ορισμένων κύκλων λειτουργίας (runs). Ο έλεγχος έγκειται στο εάν η απόκριση στη συγκεκριμένη run είναι αυτή που ορίζει η ευθεία βαθμονόμησης για την συγκεκριμένη ορμή που υποτίθεται ότι έχει η δέσμη.

Η σειρά με την οποία θα παρουσιαστούν τα διάφορα μέρη της εργασίας δεν είναι ίδια με τη χρονολογική σειρά ολοκλήρωσής τους. Επίσης, όσα στοιχεία κριθεί ότι αποτελούν κουραστικές λεπτομέρειες θα παραληφθούν και θα προσαρτηθούν στα παραρτήματα για λόγους πληρότητας.

---

<sup>1</sup> Cross-talk ονομάζεται το φαινόμενο κατά το οποίο ένα strip εμφανίζεται σαν χτυπημένο, ενώ στην πραγματικότητα δεν είναι. Οφείλεται στο ότι οι οπτικές ίνες ορισμένων strips καταλήγουν σε γειτονικά pixels των PMTs, οπότε πλησιάζουν πολύ μεταξύ τους και είναι πιθανόν ένα μέρος του φωτός που μεταφέρει η μία να διαρρεύσει προς τις γειτονικές της. Υπάρχει μέριμνα στο σχεδιασμό, ώστε να μη συνορεύουν οπτικές ίνες γειτονικών strips. Έτσι, το cross-talk έχει συνήθως ως αποτέλεσμα την εμφάνιση δήθεν χτυπημένων strips στα άκρα του ανιχνευτή, ξεκομμένα από την κεντρική ανάπτυξη του event, που γίνεται στην κεντρική περιοχή του ανιχνευτή.

## Το πρόγραμμα TOF

Το πρόγραμμα TOF είναι το πιο απλό από όσα κατασκευάσα και έπαιξε επικουρικό ρόλο στην αναγνώριση σωματιδίων στον CalDet. Αυτό που κάνει το πρόγραμμα είναι να υπολογίζει τον χρόνο πτήσης (TOF) διαφόρων σωματιδίων με δεδομένη την απόσταση κατά την οποία χρονομετρούνται, την ορμή τους και τις μάζες τους. Επιπλέον, λαμβάνεται υπόψη η ανακρίβεια που αναπόφευκτα υφίσταται στις μετρήσεις. Δηλαδή, θεωρούμε ότι η μέτρηση του πρώτου χρόνου ( $t_1$ ), στον οποίον το σωματίο καταγράφεται στον πρώτο μετρητή, και του δεύτερου χρόνου ( $t_2$ ), οπότε καταγράφεται και στο δεύτερο μετρητή, έχει μια κατανομή γκαουσιανή γύρω από την πραγματική τιμή. Η τυπική απόκλιση της γκαουσιανής ορίζεται επίσης από τον χρήστη του προγράμματος.

Ο χρήστης επιλέγει το πλήθος των μετρήσεων που επιθυμεί να προσομοιωθούν, ενώ ορίζει και το ποσοστό των μετρήσεων που θα αφορούν στο κάθε είδος σωματιδίου. Κατόπιν κατασκευάζει την κατανομή των εξαγόμενων TOFs, κάνοντας χρήση του πακέτου ανάλυσης ROOT και δύο μικρών προγραμμάτων που έγραψα (macro.C και mac.C). Το macro.C διαβάζει το αρχείο όπου καταχωρούνται κατά σειρά οι χρόνοι πτήσης που υπολογίζει το MC και το μετατρέπει σε root-file, δηλαδή σε μια δομή δεδομένων αναγνώσιμη από το ROOT. Το mac.C απλώς περιέχει τις εντολές που εμφανίζουν την κατανομή των TOFs στην οθόνη και γράφτηκε για να μη χρειάζεται ο χρήστης να πληκτρολογεί τις ίδιες εντολές κάθε φορά.

Η βασική σχέση που χρησιμοποιεί το πρόγραμμα TOF είναι αυτή που συνδέει το χρόνο πτήσης (TOF) με την ορμή ( $p$ ), την απόσταση ( $d$ ) και τη μάζα ( $m$ ) του σωματιδίου.

$$E = \gamma m = \frac{p}{\beta} \Rightarrow \beta = \frac{p}{E} = \frac{p}{\sqrt{p^2 + m^2}}$$

$$\Rightarrow \text{TOF} = \frac{d}{c\beta} = \frac{d\sqrt{p^2 + m^2}}{cp} \quad (3.1)$$

Η χρήση του TOF είναι πολύπλευρη. Αφ' ενός, μπορούμε να συγκρίνουμε τους μετρούμενους TOFs με τους υπολογιζόμενους και να κάνουμε βαθμονόμηση των μονάδων που μας δίνουν οι πραγματικοί TDC (Time Digital Counters). Δηλαδή, όπως θα δούμε, ο χρόνος πτήσης όπως μετριέται στον CalDet δίνεται σε ορισμένες μη φυσικές μονάδες, σε παλμούς του TDC. Συγκρίνοντας τις μετρήσεις αυτές με τα αποτελέσματα του προγράμματος TOF, μαθαίνουμε πώς μεταφράζονται αυτοί οι αριθμοί σε πραγματικούς χρόνους. Αργότερα θα δείξουμε ένα τέτοιο παράδειγμα.

Αφ' εταίρου, μπορούμε με το πρόγραμμα TOF να κάνουμε αναγνώριση των κορυφών της μετρούμενης κατανομής των χρόνων πτήσης. Ορισμένες φορές παρατηρούμε μια κορυφή στην κατανομή των TOFs η οποία απέχει αρκετά από τις άλλες και δεν είμαστε σίγουροι για το πού οφείλεται. Αφότου έχουμε κάνει βαθμονόμηση του φάσματος με το πρόγραμμα TOF, μπορούμε να υπολογίσουμε τη μάζα που θα έδινε τέτοιο χρόνο πτήσης. Με αυτόν τον τρόπο, για παράδειγμα, διαπιστώσαμε ότι στις runs με θετικές δέσμες υπάρχουν σε μικρό ποσοστό και δευτέρια στη δέσμη.

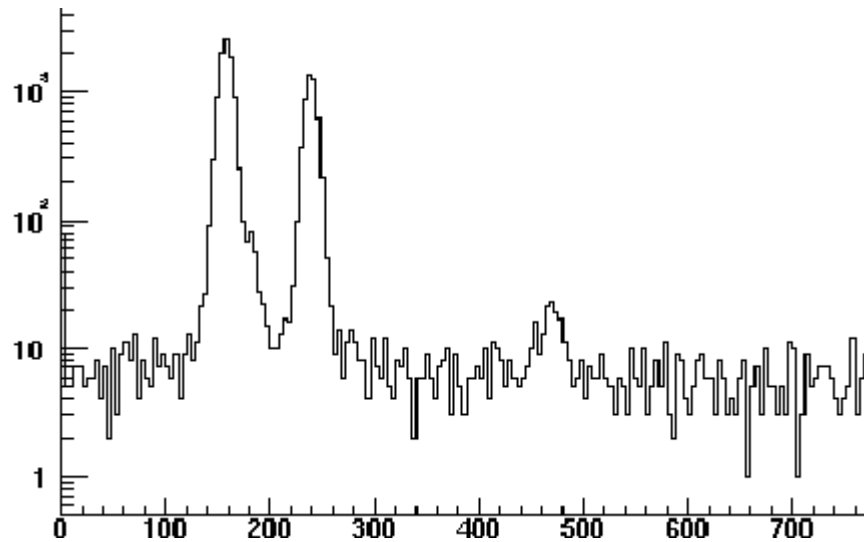
Για να γίνει κατανοητή η χρησιμότητα του προγράμματος TOF, ακολουθεί η περιγραφή μιας πραγματικής μελέτης που έγινε, στο φάσμα των χρόνων πτήσης της run υπ' αριθμόν 40912. Η run αυτή έγινε με δέσμη θετικού φορτίου, ορμής 2.4 GeV/c. Γνωρίζουμε επίσης, ότι οι χρόνοι πτήσης αναφέρονται σε απόσταση 11.8 m (ρύθμιση δέσμης T11). Γνωρίζουμε χονδρικά τη σύσταση της δέσμης στη συγκεκριμένη ορμή (βλ. εικόνα 2.24).

Στην εικόνα 3.1 βλέπουμε το φάσμα του TOF που μετρήθηκε, με τον κατακόρυφο άξονα σε λογαριθμική κλίμακα. Ξεχωρίζουν φυσικά δύο κορυφές πολύ έντονες, με κέντρα στο 160 και στο 240, αλλά και μια μικρότερη κορυφή, που δε μπορεί να παραβλεφθεί, με κέντρο το 470. Σε όλους τους υπόλοιπους TOFs έχουν καταγραφεί πολύ λίγα γεγονότα (<10) και πιθανό-

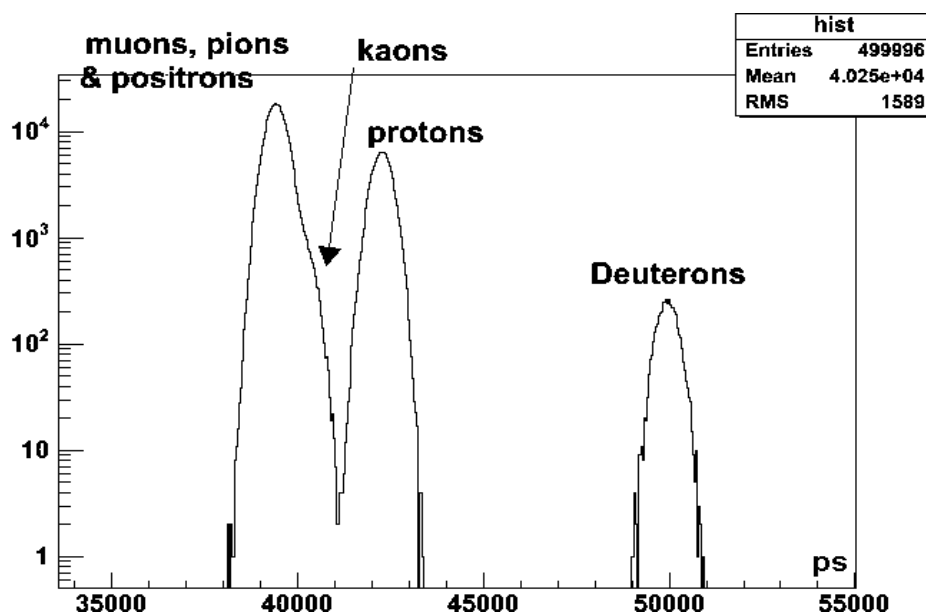


νότατα αυτός ο θόρυβος οφείλεται είτε σε κακή εστίαση της ορμής, είτε σε λανθασμένο σκανδαλισμό (mistriggering) των TDCs, είτε και στα δύο ταυτόχρονα.

Για να μάθουμε τι αντιπροσωπεύουν οι κορυφές του φάσματος της εικόνας 3.1 εκτελούμε το πρόγραμμα TOF, δίνοντάς του την ορμή 2.4 GeV/c, τη σύσταση της δέσμης περίπου όπως τη βλέπουμε στην εικόνα 2.24 και την απόσταση των 11.8 m. Επίσης, δίνουμε και μια τυπική απόκλιση στις γκαουσιανές των μετρήσεων των  $t_1$  και  $t_2$  ίση με 192 ps. Στην εικόνα 3.2 βλέπουμε την MC-υπολογιζόμενη κατανομή. Ο οριζόντιος άξονας είναι βαθμονομημένος σε ps.



Εικόνα 3.1: Το φάσμα του TOF για θετική δέσμη 2.4 GeV/c και απόσταση 11.8 m.



Εικόνα 3.2: MC κατανομή του TOF, για ορμή 2.4 GeV/c και απόσταση 11.8 m.

Παρατηρούμε ότι τόσο στο πραγματικό φάσμα όσο και στο MC-φάσμα, η τρίτη κορυφή απέχει από την πρώτη περίπου τρεις φορές όσο απέχει η δεύτερη από την πρώτη. Είναι εμφανές ότι πρόκειται για την MC-εξομοίωση του ίδιου φάσματος. Βλέπουμε στο MC-φάσμα ότι, σύμφωνα και με τη σχέση (3.1), τα ελαφρότερα σώματα (ηλεκτρόνια, μόνια, πόνια) έχουν μικρότερους TOFs, και συγκεντρώνονται στην αριστερότερη κορυφή. Ευδιάκριτη είναι η κορυφή που απαρτίζουν τα βαρύτερα πρωτόνια, ενώ τα καόνια, που είναι λίγα πληθυσμιακά,

κατανέμονται στο δεξί πλευρό της κατανομής των ε,μ,π. Τα δευτέρια απέχουν αρκετά και σχηματίζουν την τρίτη κορυφή. Έτσι, ξέρουμε σε τι αντιστοιχούν οι τρεις κορυφές που βλέπουμε στο πειραματικά μετρούμενο φάσμα.

Μπορούμε, όπως είπαμε, να βαθμονομήσουμε τον οριζόντια άξονα της κατανομής της εικόνας 3.1. Για να το κάνουμε αυτό κάνουμε παρεμβολή (fit) γκαουσιανών στις πειραματικές και στις MC-παραγόμενες κορυφές. Τα κέντρα τους βρίσκονται στις θέσεις που αναγράφονται στον πίνακα 3.1.

κορυφή	Μετρημένη κατανομή	MC κατανομή
αριστερή	157.87 ± 0.06 TDC units	39393 ps
μεσαία	239.12 ± 0.08 TDC units	42259.5 ps
δεξιά	468.9 ± 1.6 TDC units	49914 ps

**Πίνακας 3.1:** Τα κέντρα των κορυφών στην πειραματική και MC-παραγόμενη κατανομή του TOF για τη run 40912 του CalDet.

Από την απόσταση των δύο αριστερών κορυφών στα δύο φάσματα κάνουμε την αντιστοίχιση:

$$\frac{(42259.5 - 39393) \text{ ps}}{(239.122 - 157.871) \text{ TDC units}} = 35.28 \pm 0.04 \frac{\text{ps}}{\text{TDC unit}} \quad (3.2)$$

Το σφάλμα 0.04 προέκυψε από διάδοση των σφαλμάτων που φαίνονται στη δεύτερη στήλη του πίνακα 3.1.

Πράγματι, από πηγές στοιχείων για τον CalDet διασταυρώσαμε αυτήν την πληροφορία και διαπιστώσαμε ότι η μία TDC unit αντιστοιχεί σε 35 ps, δηλαδή προσδιορίσαμε αυτήν τη σχέση μετατροπής με πολύ καλή ακρίβεια. Ο λόγος που δε βρήκαμε ακριβώς την αναφερόμενη τιμή είναι μάλλον ότι τα fit που κάναμε επηρεάστηκαν από το σταθερό υπόβαθρο θορύβου, ή και από το ότι ελαφρώς διαφορετικά όρια εφαρμογής του fit δίνουν μικρές διαφορές στα υπολογιζόμενα κέντρα των κορυφών, οπότε με λίγο πιο προσεκτική επιλογή ορίων θα μπορούσαμε να πετύχουμε ακριβώς την τιμή των 35 ps/TDCunit.

Συγκρίνοντας τη θέση της αριστερής κορυφής στο πραγματικό και στο MC φάσμα, και έχοντας υπόψη τη σταθερά 35 ps/TDCunit, υπολογίζουμε τη σταθερή μετατόπιση (offset) των τιμών του TOF:

$$(157.87 + \text{offset}) \times 35 \frac{\text{ps}}{\text{TDC}} = 39393 \text{ ps}$$

$$\Rightarrow \text{offset} = 968 \text{ TDC units} \quad (3.3)$$

$$\text{με σφάλμα} \quad \delta \text{offset} = 0.06 \text{ TDC units}$$

Επομένως, αν θέλουμε να δούμε σε τι πραγματικό χρόνο πτήσης αντιστοιχεί η τιμή A TDC units που παίρνουμε από τον CalDet, εφαρμόζουμε τον τύπο:

$$(A + 968) \times 35 \text{ ps} \quad (3.4)$$

Γνωρίζοντας τώρα τον κανόνα μετατροπής (3.4) μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι η τρίτη κορυφή σχηματίζεται από δευτέρια. Αρκεί να δούμε αν το μετρούμενο TOF: 468.9 ± 1.6 TDC units αντιστοιχεί σε χρόνο 49914 ps. Όντως,

$$(468.9 + 968) \times 35 = 50291.5 \text{ ps}$$

$$\text{με σφάλμα} \quad \sqrt{(1.6 \times 35)^2 + (0.06 \times 35)^2} = 56.04 \text{ ps}$$

Βλέπουμε ότι το αποτέλεσμα, που με την απαραίτητη στρογγυλοποίηση γράφεται (50290 ± 60) ps, δεν απέχει πολύ από το θεωρητικά αναμενόμενο 49919 ps. Μπορεί κανείς να ισχυριστεί ότι η διαφορά είναι (50290 - 49919)/60 = 6.18 τυπικές αποκλίσεις, οπότε αρκετά μεγάλη. Όμως, δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι, όπως φαίνεται στην εικόνα 3.1, η τρίτη κορυφή αποτελείται από μικρό πληθυσμό μετρήσεων, ενώ βασίζεται σε ένα σταθερό υπόβαθρο θορύβου, οπότε ο προσδιορισμός του κέντρου της δε μπορεί να είναι πολύ ακριβής. Άλλωστε και η ορμή της δέσμης έχει μια αβεβαιότητα της τάξης του 1%.

## Το πρόγραμμα DISPLAY

Για να μάθουμε πώς να αναγνωρίζουμε τα διάφορα σωματίδια βλέποντας τα ίχνη που άφηναν στον CalDet ήταν ανάγκη να μπορούμε να δούμε πολλά τέτοια ίχνη, το ένα μετά το άλλο, με έναν τρόπο που να μην κουράζει το χρήστη αναγκάζοντάς τον να πληκτρολογεί πλειάδα εντολών. Αυτό κάνει το πρόγραμμα DISPLAY, εμφανίζοντας στην οθόνη ένα προς ένα τα events που επιθυμεί ο χρήστης. Η πληροφορία που εμφανίζεται για κάθε event είναι η εξής:

- Η Χ-προβολή των γεγονότων, όπου φαίνονται τα χτυπημένα strips και, με χρωματική κλίμακα, το άθροισμα των φωτοηλεκτρονίων που απέδωσε κάθε strip από το δεξί συν το αριστερό άκρο ( $n_{hp} + n_{hp}$ )
- Η Υ-προβολή, επίσης με χρωματική απόδοση του  $n_{hp} + n_{hp}$ .
- Το φάσμα του ADC (Analog to Digital Converter) του ανιχνευτή Cerenkov ( $ceradc[2]$ ) για όλα τα γεγονότα της run, ενώ μια πράσινη ακίδα δείχνει το σήμα που έδωσε ο Cerenkov ADC για το συγκεκριμένο event που εμφανίζεται στην οθόνη.
- Το φάσμα του TOF ( $toftdc[2]$ – $toftdc[0]$ ) όλων των γεγονότων της ενεργής run, ενώ μια πράσινη ακίδα δείχνει τον TOF του εμφανιζόμενου γεγονότος.

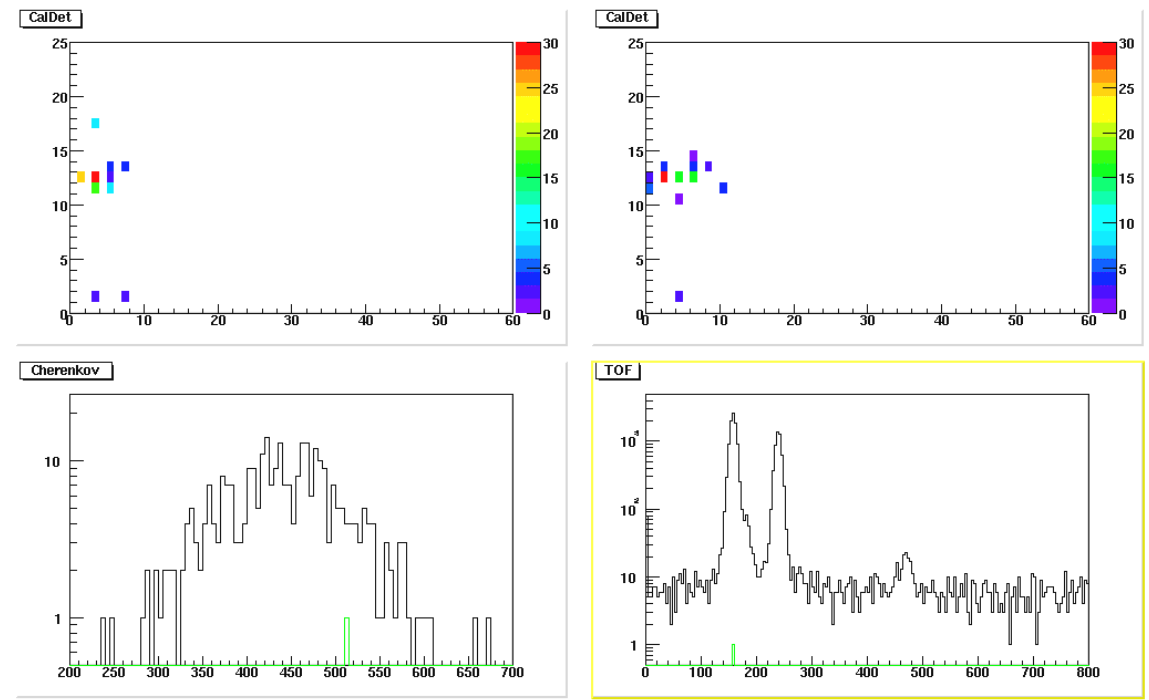
Ο χρήστης μπορεί να επιλέξει κριτήρια με τα οποία να επιλέγονται προς παρουσίαση μόνο ορισμένα events από την ενεργό run, δηλαδή από το χρησιμοποιούμενο root-αρχείο. Αυτό δίνει τη δυνατότητα παρατήρησης γεγονότων που εμφανίζουν ιδιαιτερότητες, ή που είναι τυπικά παραδείγματα ηλεκτρονίων, μιονίων και των υπολοίπων συστατικών της δέσμης. Μεταξύ των κριτηρίων μπορεί να ορισθεί και να εμφανίζονται μόνο οι χτυπημένες strips που έδωσαν ( $n_{hp} + n_{hp}$ ) μεγαλύτερο από ένα κατώφλι. Έτσι, θέτουμε κατώφλι στο pulse height, κάτι χρήσιμο όταν προσπαθούμε να απαλλαγούμε από το cross-talk.

Μια ακόμα μικρή πλην χρήσιμη δυνατότητα που δίνει το πρόγραμμα στο χρήστη, είναι το να αποθηκεύει την εικόνα του παρόντος event σε ένα αρχείο της αρεσκείας του, δίνοντας το γράμμα “s” στη γραμμή εντολής του προγράμματος.

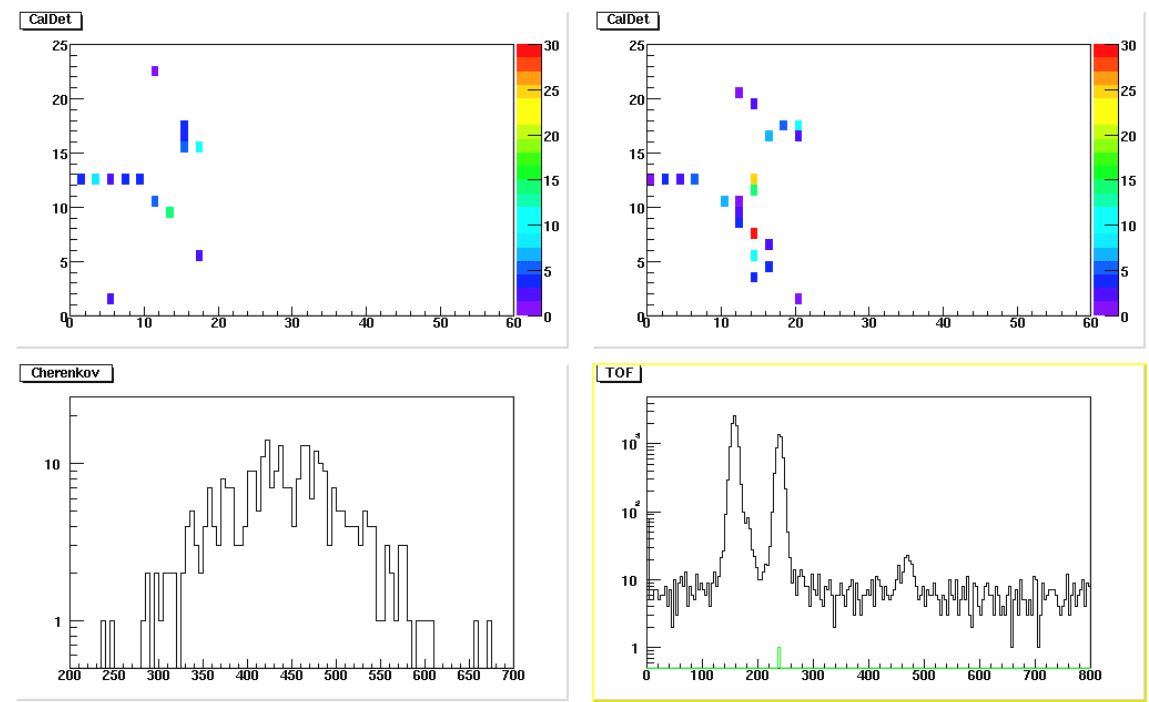
Χάριν επιδείξεως, ας παρουσιάσουμε ορισμένες παλέτες που παίρνουμε εφαρμόζοντας το πρόγραμμα DISPLAY πάνω στη run 40912, έχοντας θέσει κατώφλι  $n_{hp} + n_{hp} > 1$ . Οι εικόνες 3.3 έως και 3.6 αποτελούν τυπικά παραδείγματα  $e^+$ ,  $p$ ,  $\mu^+$  και  $\pi^+$ . Η εικόνα 3.7 πιθανότατα εμφανίζει ένα δευτέριο.

Υπάρχουν λίγα παράδοξα γεγονότα όπου, ενώ οι τροχιές τους μαρτυρούν πως είναι μόνια, δίνουν Cerenkov. Άλλοτε δίνουν TOF που δεν εντάσσεται σε καμία από τις κορυφές που αποτελούν σωματίδια γνωστής μάζας, ενώ η τοπολογία τους δείχνει ότι είναι μάλλον απλά μόνια ή ηλεκτρόνια κλπ. Τα περισσότερα από αυτά τα φαινόμενα οφείλονται στο ότι η δέσμη δεν είναι απόλυτα εστιασμένη σε μια ορμή, οπότε υπάρχουν και παράδοξοι χρόνοι πτήσης και μόνια που μπορεί να έχουν μεγαλύτερη ταχύτητα από την προβλεπόμενη και να δώσουν ακτινοβολία Cerenkov.

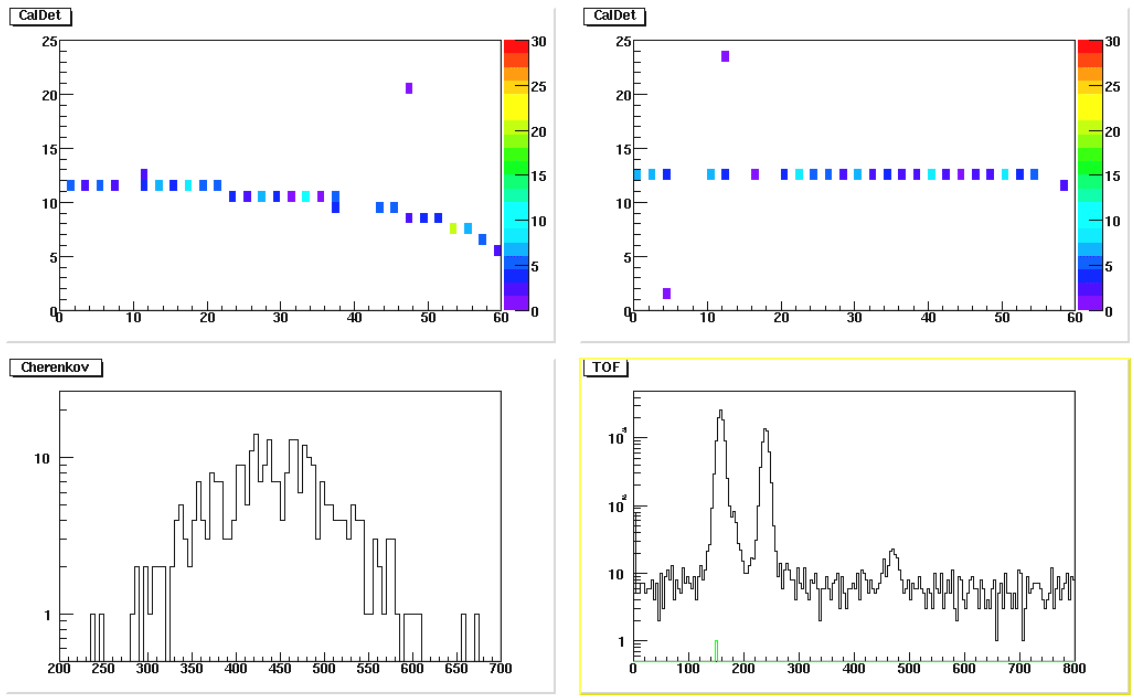
Είναι λογικό η σύσταση της δέσμης να μην είναι ίδια για θετικού και για αρνητικού φορτίου δέσμη, διότι τα πρωτόνια που είναι διαθέσιμα προς εστίαση είναι πολύ περισσότερα από τα αντιπρωτόνια, ενώ τα διαθέσιμα αντιδευτέρια ( $\bar{p}\bar{n}$ ) είναι σχεδόν ανύπαρκτα. Αυτό φαίνεται στο φάσμα του TOF που καταγράφεται κατά τη run υπ’ αριθμόν 40916, που χρησιμοποιεί θετική δέσμη. Όπως βλέπουμε στην εικόνα 3.8, υπάρχει ένας μικρός πληθυσμός αντιπρωτονίων, ενώ έχει εξαφανιστεί εντελώς η κορυφή των δευτερίων που είχαμε στη run 40912, που ήταν ίδιας ορμής (2.4 GeV/c). Παραμένει πάντως το σταθερό υπόβαθρο στο φάσμα, γεγονός το οποίο μαρτυρεί ότι οι παράγοντες που το προκαλούν είναι οι ίδιοι όταν χρησιμοποιείται θετική και όταν χρησιμοποιείται αρνητική δέσμη.



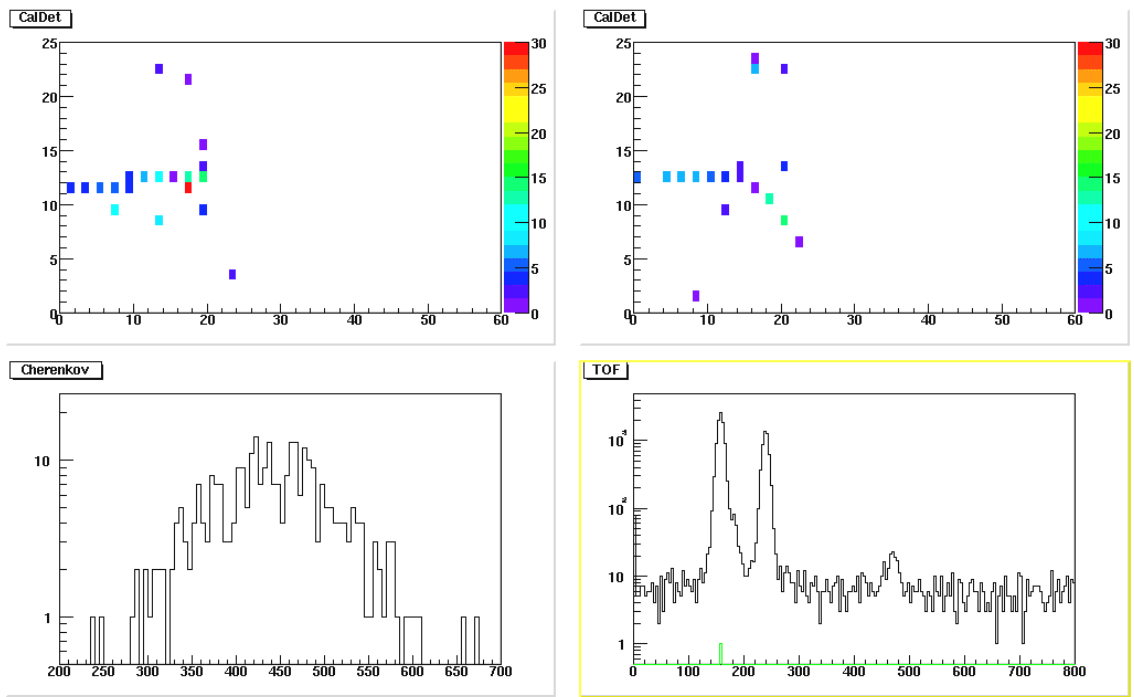
**Εικόνα 3.3:** Παράδειγμα  $e^+$  στα 2.4 GeV/c. Δίνει Cerenkov και TOF στην πρώτη κορυφή. Τα ακριανά strips έχουν χαμηλό ύψος παλμού και μάλλον οφείλονται στο cross-talk.



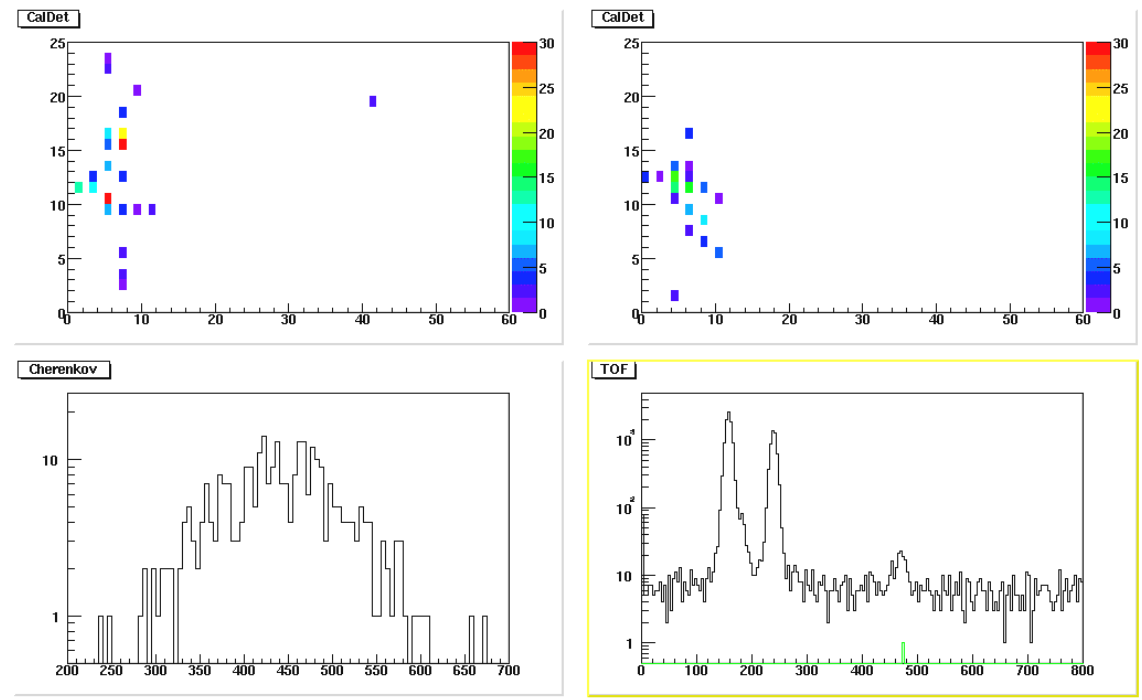
**Εικόνα 3.4:** Παράδειγμα p. Δε δίνει Cerenkov, έχει το κατάλληλο TOF και αναπτύσσει 2 showers με προβολή και στη X και στην Y διάσταση.



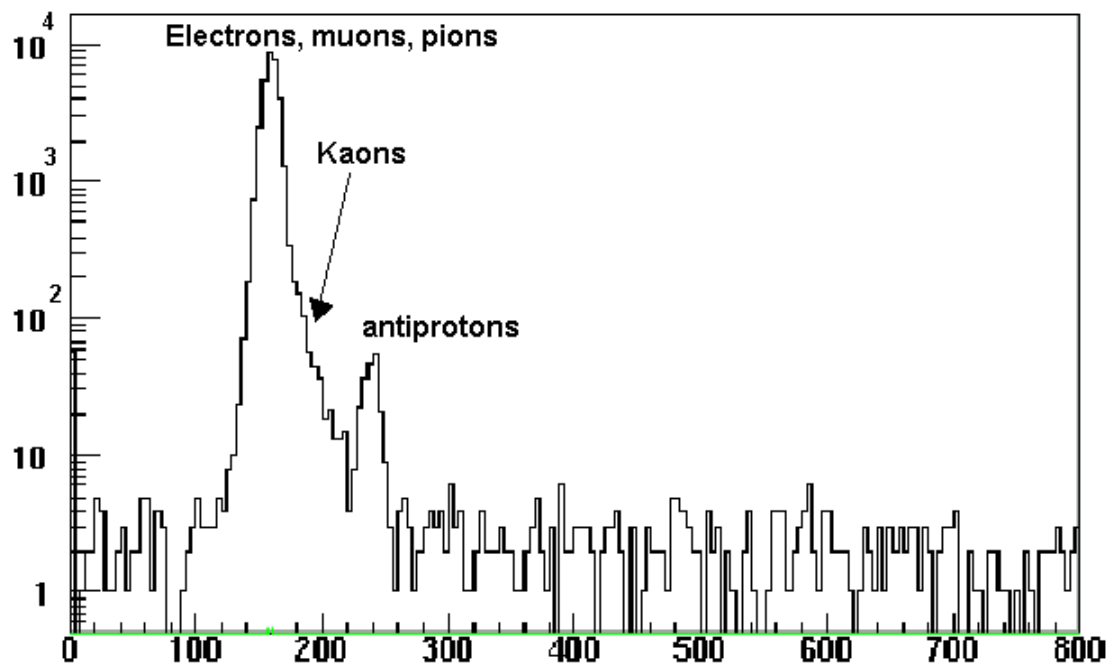
Εικόνα 3.5: Παράδειγμα  $\mu^+$ , το οποίο διαπερνά ολόκληρο τον CalDet.



Εικόνα 3.6: Παράδειγμα  $\pi^+$ .



Εικόνα 3.7: Παράδειγμα δευτερίου (d).

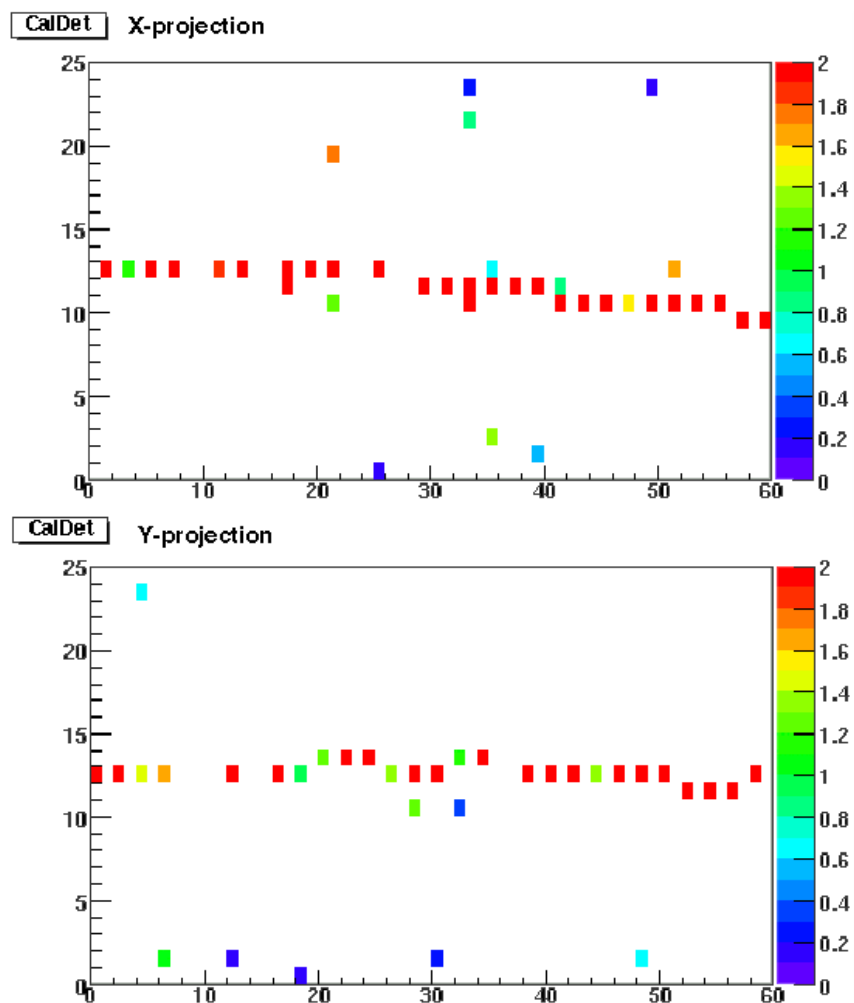


Εικόνα 3.8: Το φάσμα του TOF της run 40916, με αρνητική δέσμη και ορμή 2.4 GeV/c.

Βλέπουμε από τη σύγκριση των εικόνων 3.3 ως 3.7 ότι οι τοπολογίες των διαφόρων σωματιδίων διαθέτουν ορισμένα αναγνωριστικά χαρακτηριστικά, τουλάχιστον στην ορμή των 2.4 GeV/c. Τα μόνια είναι διαπεραστικά και δε δημιουργούν showers. Τα πιόνια και τα πρωτόνια διασπώνται αδρονικά μετά από λίγα επίπεδα δίνοντας showers. Τα ηλεκτρόνια δίνουν κατευθείαν ηλεκτρομαγνητική shower. Για παράδειγμα, η τοπολογική μεταβλητή του λόγου της διαμήκους προς την εγκάρσια διάσταση του γεγονότος θα μπορούσε να διαχωρίσει τα μόνια από τα υπόλοιπα σωματίδια. Αυτή η ποσότητα, βέβαια, δεν είναι εξίσου χαρακτηριστική αν συγκρίνουμε γεγονότα ορμής 0.2 GeV/c, διότι τότε η ενέργεια είναι τόσο μικρή που

σχεδόν όλα τα events περιορίζονται σε 1-5 χτυπημένες strips. Πάντως, ακόμα κι εκεί όπου οι τοπολογίες των events των διαφόρων σωματιδίων συμπίπτουν, ο τρόπος εναπόθεσης της ενέργειας στον ανιχνευτή μπορεί να αποτελεί διακριτικό χαρακτηριστικό.

Όταν προσπαθούμε να διακρίνουμε τα διάφορα σωματίδια από τις τοπολογίες των ιχνών τους, έχει μεγάλη σημασία να απαλασσόμαστε από το cross-talk, διότι ακόμα κι ένα δήθεν χτυπημένο strip επηρεάζει δραστικά τις τοπολογικές μεταβλητές. Για παράδειγμα, στην εικόνα 3.9 βλέπουμε ένα μιονικό γεγονός της run 40912, όπου έχουμε επιλέξει να μην αφαιρούμε τα cross-talk strips. Μια τοπολογική μεταβλητή που διακρίνει τα μιονικά events είναι η μικρή εγκάρσια έκταση. Τα περιφερειακά strips που φαίνονται σαν χτυπημένα καταστρέφουν αυτήν την εικόνα, δημιουργώντας την εντύπωση ότι ο μόνιο έδωσε ίχνος που εκτείνεται μέχρι τις πιο εξωτερικές strips του ανιχνευτή.



**Εικόνα 3.9:** Μιονικό event, ορμής 2.4 GeV/c, όπου δεν έχει αφαιρεθεί καθόλου το cross-talk. Η χρωματική κλίμακα είναι επιλεγμένη έτσι ώστε να επιτρέπει τα δούμε ποια cross-talk strips έχουν λάβει μεγαλύτερη ενέργεια.

## Έλεγχος της ηλεκτρομαγνητικής καλοριμετρικής απόκρισης

Σε αυτήν την παράγραφο θα γίνει περιγραφή της μελέτης της ηλεκτρομαγνητικής καλοριμετρικής απόκρισης του CalDet.

Δύο είναι τα κύρια μεγέθη που χαρακτηρίζουν τη λειτουργία ενός καλοριμέτρου: Η απόκριση (response) και η ενεργειακή διακριτική ικανότητα (energy resolution). Ο ανιχνευτής, λόγω της πεπερασμένης διακριτικής του ικανότητας, όταν ανιχνεύει σωματίδια ενέργειας  $E$ , δε μετράει πάντα ακριβώς την ίδια ενέργεια (totmip<sup>2</sup>), αλλά οι μετρήσεις ακολουθούν μια γκαουσιανή κατανομή με κέντρο  $m$  και τυπική απόκλιση  $\sigma_m = \Delta m$ . Εάν η απόκριση του καλοριμέτρου είναι γραμμική, το  $m$  είναι ευθέως ανάλογο του  $E$ , με ένα μικρό offset:

$$m = \gamma E + \delta \quad (3.5)$$

Η ενεργειακή διακριτική ικανότητα ορίζεται ως:  $\frac{\Delta E}{E}$ . Εάν  $\delta=0$ , τότε  $m=\gamma \cdot E$  και  $\Delta m=\gamma \cdot \Delta E$ ,

οπότε ισχύει  $\frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta m}{m}$ . Όμως, στην πραγματικότητα, αν και μικρό, το  $\delta$  είναι διάφορο του μηδενός, οπότε:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta m}{m} &= \frac{\gamma \Delta E}{\gamma E + \delta} = \frac{\Delta E}{E + \delta/\gamma} \\ \Rightarrow \frac{\Delta E}{E} &= \frac{\Delta m}{m} (E + \delta/\gamma) \frac{1}{E} = \frac{\Delta m}{m} \left( 1 + \frac{\delta}{\gamma E} \right) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Από την άλλη, ισχύει για τη resolution ότι:

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\alpha}{\sqrt{E}} + \beta \quad (3.7)$$

Για να προσδιορίσουμε το συντελεστή  $\alpha$  της σχέσεως (3.7), χρησιμοποιώντας τα  $m$  και  $\Delta m$ , αρκεί να παρεμβάλουμε μια ευθεία ελαχίστων τετραγώνων στο διάγραμμα της ποσότητας

ως συνάρτηση του  $1/\sqrt{E}$ .

Η μέθοδος που ακολουθούμε είναι η εξής: Παίρνουμε το root-αρχείο μιας run συγκεκριμένης ορμής  $p$ . Απομονώνουμε μόνο τα ηλεκτρονιακά γεγονότα, απαιτώντας να υπάρχει ακτινοβολία Cerenkov. Τα ηλεκτρόνια έχουν μάζα 0.511 MeV, οπότε ακόμα και σε ορμή 0.2 GeV/c, η ενέργειά τους είναι ουσιαστικά ίση με την ορμή τους, σύμφωνα με τη σχέση  $E = \sqrt{p^2 + m^2}$ . Οπότε, για αυτά τα ηλεκτρόνια που έχουν γνωστή ενέργεια  $E$ , κάνουμε την κατανομή του μετρούμενου totmip. Αυτή η κατανομή είναι γκαουσιανή με κέντρο  $m$  και τυπική απόκλιση  $\sigma_m = \Delta m$ .

Συγκεντρώνουμε τα  $m$  και  $\Delta m$  για ηλεκτρόνια διαφόρων  $E$ , οπότε μετά μπορούμε να χαράξουμε την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων του διαγράμματος του  $m$  συναρτήσει της  $E$ . Επομένως, βρίσκουμε τα  $\gamma$  και  $\delta$  της σχέσης (3.5). Γνωρίζοντας αυτά, σχεδιάζουμε την ποσότητα

$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta m}{m} \left( 1 + \frac{\delta}{\gamma E} \right)$  συναρτήσει του  $1/\sqrt{E}$ . Σε αυτό το διάγραμμα φέρουμε την ευθεία

ελαχίστων τετραγώνων και προσδιορίζουμε τα  $\alpha$  και  $\beta$  της σχέσεως (3.7).

Οι runs που χρησιμοποιήσα συνοψίζονται στον πίνακα 3.2. Σε όλες χρησιμοποιήθηκαν ηλεκτρονικά του μακρινού ανιχνευτή. Για να μην αναφέρουμε κάθε φορά το πρόσημο του

<sup>2</sup> Το totmip είναι πληροφορία διαθέσιμη για κάθε γεγονός και ισούται με το άθροισμα του mip και των δύο άκρων όλων των χτυπημένων strips του γεγονότος, εξαιρουμένων εκείνων που βρίσκονται στο επίπεδο 0, δηλαδή στο πρώτο. Το mip προκύπτει, μετά από διόρθωση, από τον αριθμό των φωτοηλεκτρονίων (npe) που δίνει κάθε άκρο εκάστης strip. Είναι μια μονάδα μέτρησης της ενέργειας, ίση με την ενέργεια που θα απέδιδε ένα ελάχιστο ιονίζον σωματίο (minimum ionizing particle).



φορτίου της δέσμης και την ορμή της ξεχωριστά, συνηθίζεται να αναφέρουμε κατευθείαν την ορμή της με ένα πρόσημο + ή - για να δηλώσουμε αυτομάτως και το πρόσημο του ηλεκτρικού φορτίου της.

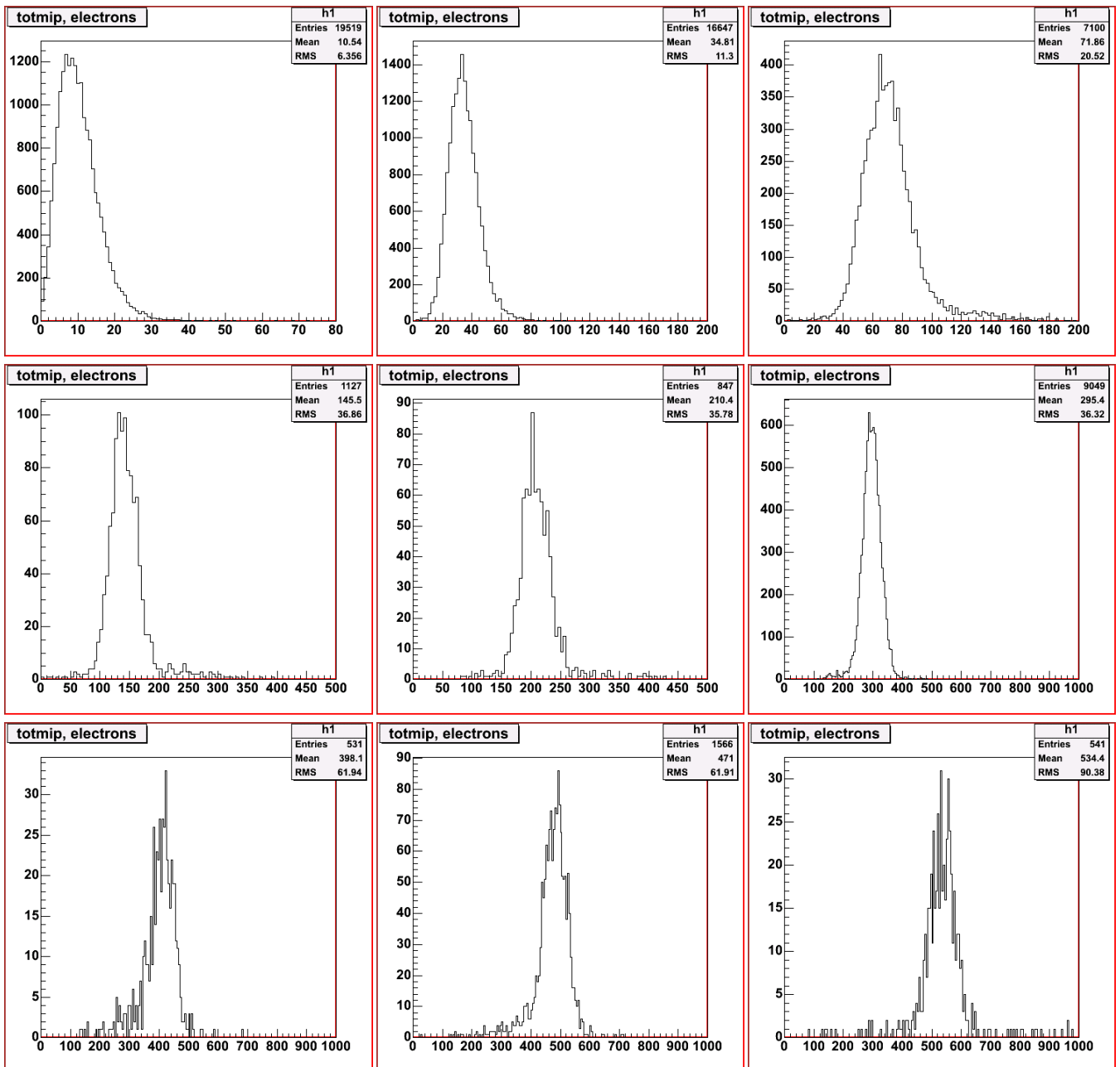
Run#	p(GeV/c)	Run#	p(GeV/c)
40771	-0.2	40777	+0.4
40783	-0.6	40616	+1.8
40874	-1.2	40844	+3.2
40916	-2.4	50601	+7.0
40801	-3.6	50545	+5.0
50557	-5.0	50537	+6.0
50695	-7.0	50551	+4.0
50594	-8.0	40781	+0.6
50700	-9.0	40815	+0.8

**Πίνακας 3.2:** Οι αριθμοί των runs που χρησιμοποιήθηκαν και οι αντίστοιχες ορμές, που σε πολύ καλή προσέγγιση είναι ίσες με την ενέργεια των ηλεκτρονίων τους.

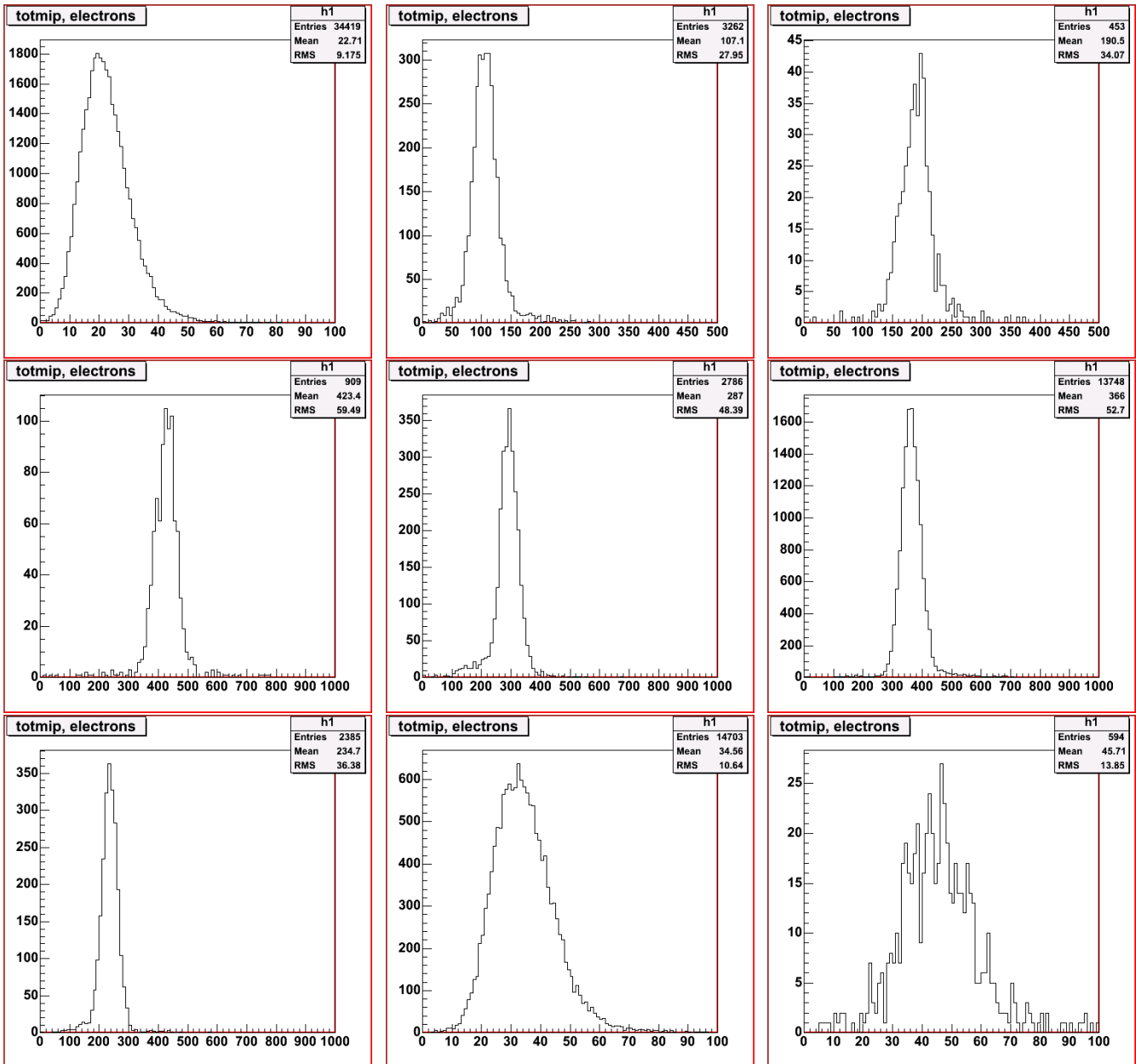
Στην εικόνα 3.10 φαίνονται οι 9 κατανομές του totmip που προέρχονται από τα ηλεκτρόνια των runs με αρνητική δέσμη, ενώ στην 3.11 παρατίθενται οι ίδιες κατανομές που πήραμε από τις 9 runs θετικής δέσμης. Στον πίνακα 3.3 φαίνονται οι τιμές των m και των  $\sigma_m = \Delta m$ , καθώς και τα σφάλματά τους  $\delta m$  και  $\delta\sigma_m$ , που πήραμε από τα αντίστοιχα fits με γκαουσιανές. Στον ίδιο πίνακα φαίνονται και οι τιμές που πήραμε από τις runs θετικού φορτίου.

Run#	E (GeV)	m (totmip)	$\delta m$ (totmip)	$\sigma_m$ (totmip)	$\delta\sigma_m$ (totmip)
40771	-0.2	8.29	0.06	3.83	0.05
40783	-0.6	34.08	0.08	9.49	0.06
40874	-1.2	69.08	0.19	14.50	0.15
40916	-2.4	140.46	0.69	22.11	0.55
40801	-3.6	207.11	0.82	22.59	0.62
50557	-5.0	296.85	0.32	29.69	0.25
50695	-7.0	413.18	1.74	34.68	1.45
50594	-8.0	481.16	1.06	38.78	0.85
50700	-9.0	536.49	2.12	43.19	1.91
40777	+0.4	19.87	0.09	6.06	0.05
40616	+1.8	105.28	0.37	20.36	0.34
40844	+3.2	187.47	1.18	23.83	1.09
50601	+7.0	424.72	1.24	35.53	1.01
50545	+5.0	293.94	0.61	31.15	0.55
50537	+6.0	362.47	0.28	32.44	0.22
50551	+4.0	235.99	0.57	26.73	0.45
40781	+0.6	33.33	0.09	8.75	0.06
40815	+0.8	45.45	0.50	10.81	0.46

**Πίνακας 3.3:** Τα μέσα (m) και οι τυπικές αποκλίσεις ( $\sigma_m$ ) των γκαουσιανών που κάνουν fit στις μετρούμενες κατανομές του totmip, για τις runs που χρησιμοποιήσα. Επίσης, φαίνονται και τα σφάλματα αυτών των μεγεθών,  $\delta m$  και  $\delta\sigma_m$  αντίστοιχα.



**Εικόνα 3.10:** Οι κατανομές του totmip για τις 9 runs αρνητικού φορτίου δέσμης. Η διάταξη των εικόνων είναι κατά αύξουσα ενέργεια ηλεκτρονίων, καθώς τις βλέπουμε από αριστερά προς τα δεξιά και από πάνω προς τα κάτω.



**Εικόνα 3.11:** Οι κατανομές του totmip για τις 9 runs θετικού φορτίου δέσμης. Οι εικόνες αντιστοιχούν στις runs ως εξής: Πρώτη γραμμή: 40777, 40616, 40844. Δεύτερη γραμμή: 50601, 50545, 50537. Τρίτη γραμμή: 50551, 40781, 40815.

Ας εργασθούμε πρώτα για τις αρνητικές δέσμες. Από τις τιμές του πίνακα 3.3 απομονώνουμε αυτές που χρειάζονται για να σχεδιάσουμε τα σημεία της καμπύλης του  $m$  ως συνάρτησης της  $E$  (εικόνα 3.12). Στη συνέχεια, χαράσσουμε την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων, όπου στον υπολογισμό της λαμβάνεται υπόψη και το κατακόρυφο σφάλμα κάθε σημείου. Οι παράμετροι της ευθείας ελαχίστων τετραγώνων, με τα σφάλματά τους, είναι:

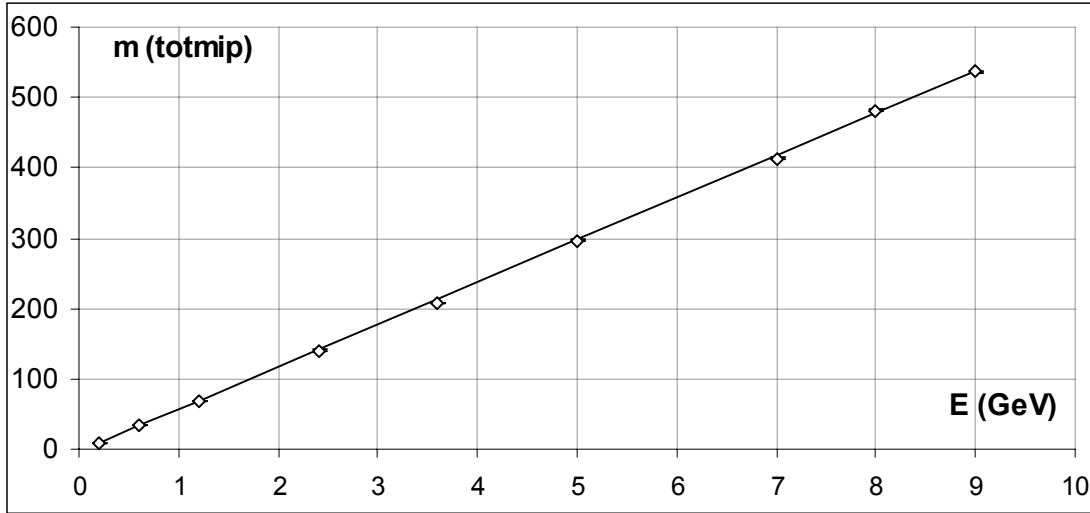
$$\gamma = A + Bx : \quad A = -3.224 \quad \delta A = 0.052$$

$$\quad \quad \quad \quad B = 60.191 \quad \delta B = 0.054$$

οπότε οι συντελεστές της εξίσωσης (3.5) προσδιορίζονται ως:

$$\gamma = (60.19 \pm 0.05) \text{ mip/GeV} \quad (3.8)$$

$$\delta = (-3.22 \pm 0.05) \text{ mip}$$



**Εικόνα 3.12:** Η απόκριση του ανιχνευτή  $m=m(E)$  στις guns με αρνητική δέσμη. Τα κατακόρυφα σφάλματα είναι υπερβολικά μικρά για να φανούν, ενώ η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων τα λαμβάνει υπόψη.

Γνωρίζοντας τα  $\gamma$  και  $\delta$  μπορούμε να υπολογίσουμε την ποσότητα  $\frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta m}{m} \left( 1 + \frac{\delta}{\gamma} \frac{1}{E} \right)$

συναρτήσει του  $1/\sqrt{E}$ . Το δε σφάλμα της ποσότητας  $\Delta E/E$  υπολογίζεται ως:

$$\delta \left( \frac{\Delta E}{E} \right) = \sqrt{\left[ \left( 1 + \frac{\delta}{\gamma} \frac{1}{E} \right) \delta \left( \frac{\Delta m}{m} \right) \right]^2 + \left( \frac{\Delta m}{m} \frac{\delta(\delta)}{\gamma E} \right)^2 + \left( \frac{\Delta m}{m} \frac{\delta}{\gamma^2 E} \delta(\gamma) \right)^2} \quad (3.9)$$

όπου 
$$\delta \left( \frac{\Delta m}{m} \right) = \sqrt{\left( \frac{\delta \sigma_m}{m} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_m}{m^2} \delta m \right)^2} \quad (3.10)$$

Στον πίνακα 3.4 συγκεντρώνονται οι υπολογιζόμενες τιμές που χρησιμοποιούνται στη χάραξη του διαγράμματος 3.13. Στην εικόνα 3.13, μεταξύ των σημείων παρεμβάλλεται ευθεία ελαχίστων τετραγώνων, στον υπολογισμό της οποίας έχουν ληφθεί υπόψη τα κατακόρυφα σφάλματα των σημείων, και οι παράμετροί της είναι:

$$y=A+Bx : \quad A= 0.0120 \quad \delta A= 0.0026 \\ B= 0.1960 \quad \delta B= 0.0052$$

Επομένως, προσδιορίστηκαν με αυτόν τον τρόπο οι συντελεστές  $\alpha$  και  $\beta$  της σχέσεως (3.7), ως:

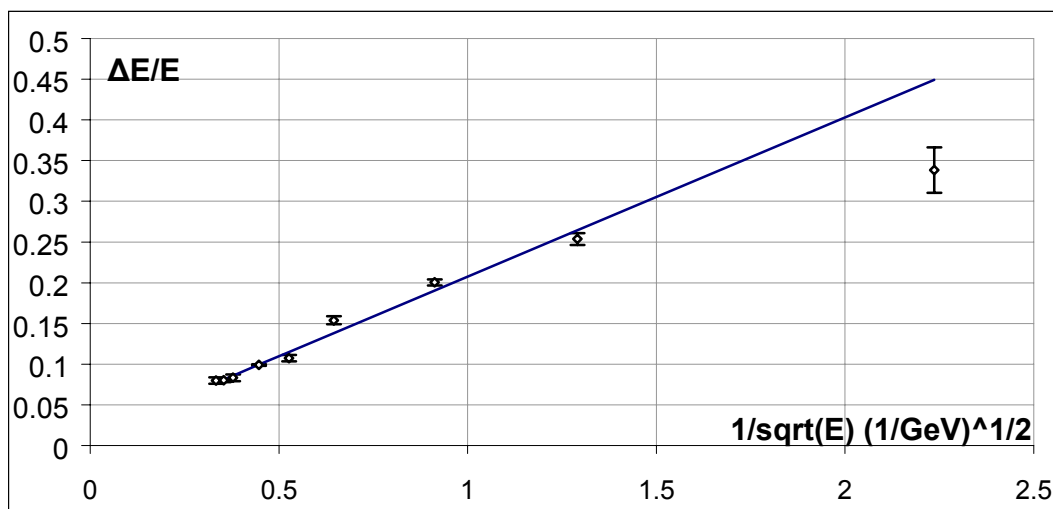
$$\alpha = (0.196 \pm 0.005) \text{ GeV}^{1/2} \\ \beta = 0.012 \pm 0.003 \quad (3.11)$$

Κατά τον ίδιο τρόπο εργαζόμαστε και με τις guns με θετική δέσμη. Στην εικόνα 3.14 φαίνεται η απόκριση  $m=m(E)$ , ενώ στην εικόνα 3.15 φαίνεται η resolution συναρτήσει του  $1/\sqrt{E}$ . Στον πίνακα 3.5 συγκεντρώνονται οι τιμές του διαγράμματος της εικόνας 3.15. Για τους συντελεστές  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\alpha$  και  $\beta$ , από τις θετικές guns καταλήγουμε στις τιμές:

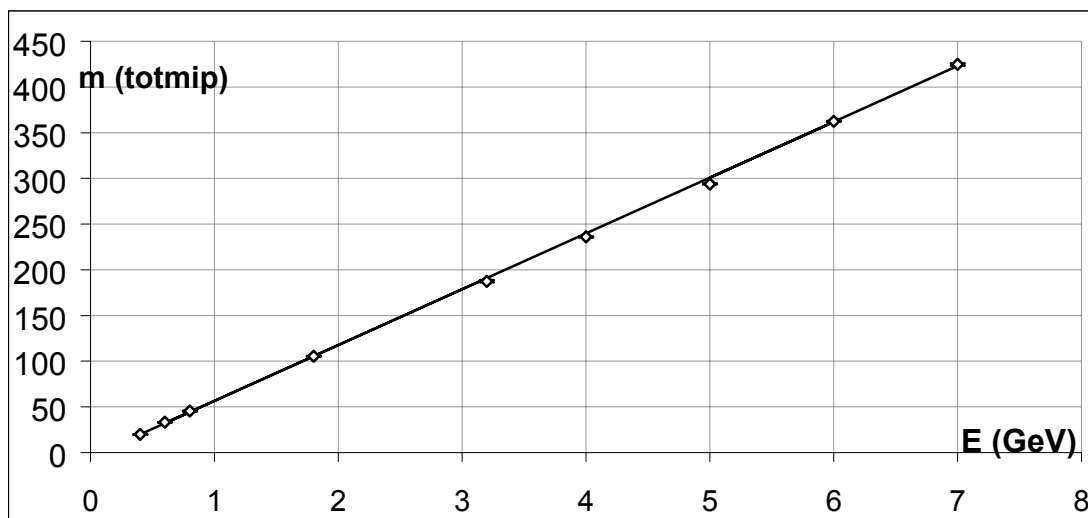
$$\gamma = (60.833 \pm 0.046) \text{ mip / GeV} \\ \delta = (-3.90 \pm 0.07) \text{ mip} \\ \alpha = (0.190 \pm 0.005) \text{ GeV}^{1/2} \\ \beta = (0.013 \pm 0.003) \quad (3.12)$$

E (GeV)	$1/\sqrt{E}$ (GeV <sup>-1/2</sup> )	$\frac{\Delta E}{E}$	$\delta\left(\frac{\Delta E}{E}\right)$
0.2	<b>2.2361</b>	0.3382	0.0280
0.6	<b>1.2910</b>	0.2537	0.0072
1.2	<b>0.9129</b>	0.2005	0.0038
2.4	<b>0.6455</b>	0.1539	0.0049
3.6	<b>0.5270</b>	0.1075	0.0039
5.0	<b>0.4472</b>	0.0989	0.0011
7.0	<b>0.3780</b>	0.0833	0.0042
8.0	<b>0.3536</b>	0.0801	0.0022
9.0	<b>0.3333</b>	0.0800	0.0039

**Πίνακας 3.4:** Οι τιμές του  $1/\sqrt{E}$ , των αντιστοίχων  $\Delta E/E$  και των σφαλμάτων τους, για τις runs με **αρνητική** δέσμη.



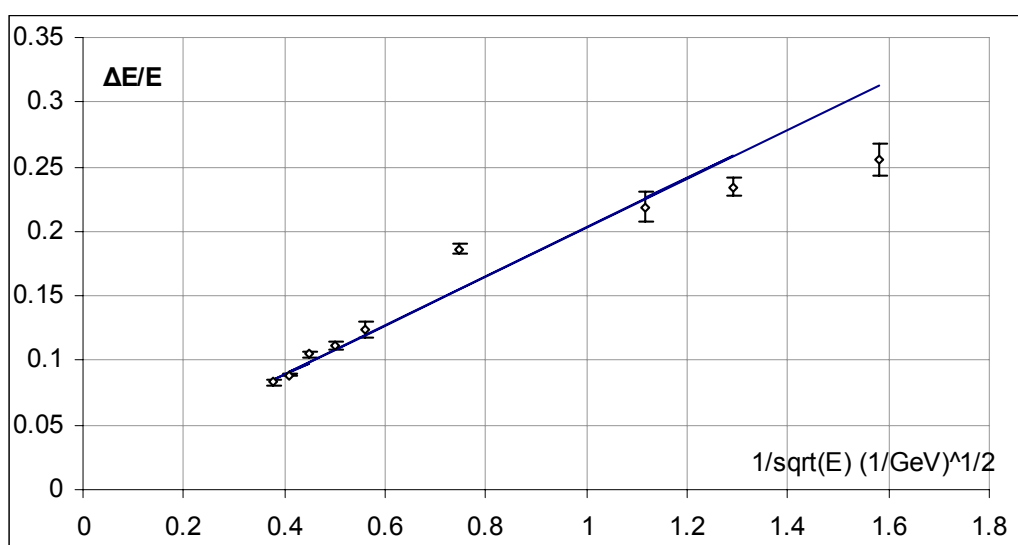
**Εικόνα 3.13:** Η ενεργειακή διακριτική ικανότητα (resolution) ως συνάρτηση του  $1/\sqrt{E}$ , για runs με **αρνητική** δέσμη, μαζί με την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων, που λαμβάνει υπόψη και τα κατακόρυφα σφάλματα των σημείων.



**Εικόνα 3.14:** Η απόκριση του ανιχνευτή  $m=m(E)$  στις runs με **θετική** δέσμη.

E (GeV)	$1/\sqrt{E}$ (GeV <sup>-1/2</sup> )	$\frac{\Delta E}{E}$	$\delta\left(\frac{\Delta E}{E}\right)$
0.4	<b>1.5811</b>	0.2561	0.0123
1.8	<b>0.7454</b>	0.1865	0.0039
3.2	<b>0.5590</b>	0.1246	0.0063
7	<b>0.3780</b>	0.0829	0.0029
5	<b>0.4472</b>	0.1046	0.0021
6	<b>0.4082</b>	0.0885	0.0008
4	<b>0.5000</b>	0.1114	0.0024
0.6	<b>1.2910</b>	0.2345	0.0076
0.8	<b>1.1180</b>	0.2189	0.0115

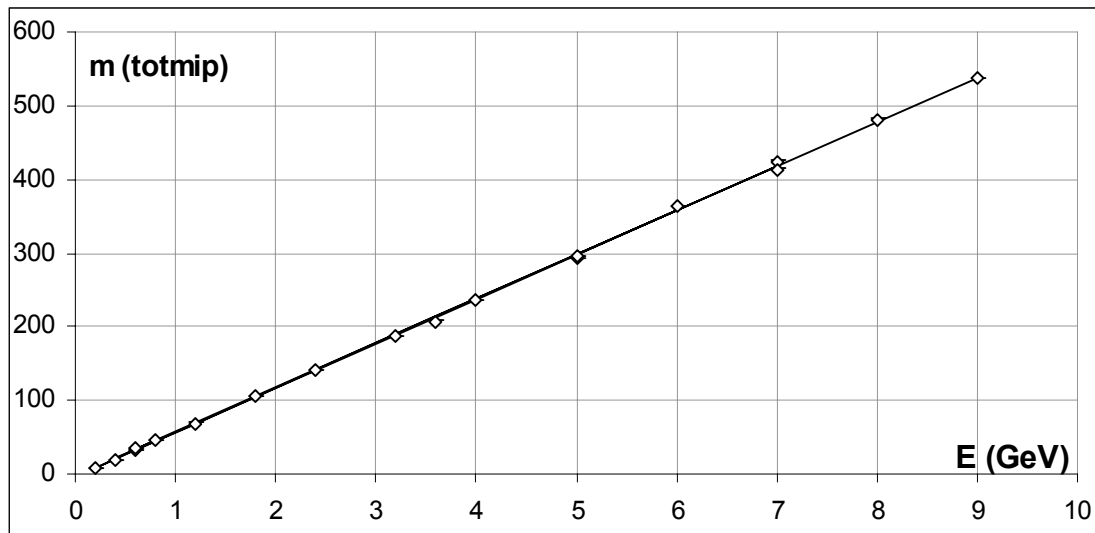
**Πίνακας 3.5:** Οι τιμές του  $1/\sqrt{E}$ , των αντιστοίχων  $\Delta E/E$  και των σφαλμάτων τους, για τις runs με **θετική** δέσμη.



**Εικόνα 3.15:** Η ενεργειακή διακριτική ικανότητα (resolution) ως συνάρτηση του  $1/\sqrt{E}$ , για runs με **θετική** δέσμη, μαζί με την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων, που λαμβάνει υπόψη και τα κατακόρυφα σφάλματα των σημείων.

Τέλος, θεωρώντας ότι η response και η energy resolution είναι ίδια τόσο για θετική όσο και για αρνητική δέσμη (που φαίνεται να ισχύει αν συγκρίνουμε τις παραμέτρους (3.12) και (3.8), (3.11)), συγκεντρώνουμε όλες μαζί τις τιμές που έχουμε στον πίνακα 3.3 και επαναλαμβάνουμε την περιγραφείσα υπολογιστική διαδικασία. Καταλήγουμε στη γραφική παράσταση της response που φαίνεται στην εικόνα 3.16, στις τιμές του πίνακα 3.6 και στην energy resolution της εικόνας 3.17. Οι παράμετροι που υπολογίζονται είναι:

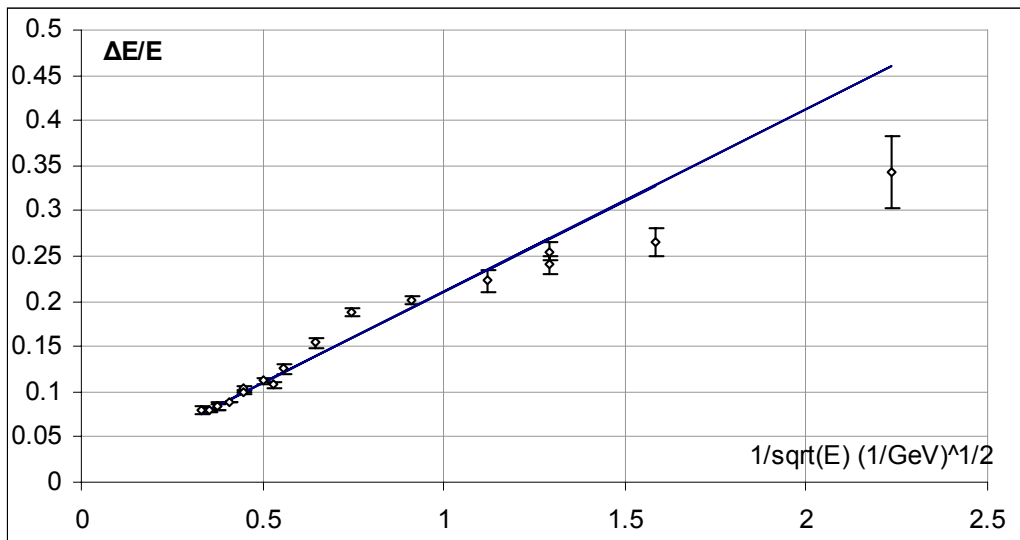
$$\begin{aligned}
 \gamma &= (60.14 \pm 0.05) \text{ mip / GeV} \\
 \delta &= (-3.09 \pm 0.07) \text{ mip} \\
 \alpha &= (0.2020 \pm 0.0045) \text{ GeV}^{1/2} \\
 \beta &= (0.0090 \pm 0.0021)
 \end{aligned}
 \tag{3.13}$$



Εικόνα 3.16: Η απόκριση του ανιχνευτή  $m=m(E)$  σε όλες τις runs.

E (GeV)	$1/\sqrt{E}$ (GeV <sup>-1/2</sup> )	$\frac{\Delta E}{E}$	$\delta(\frac{\Delta E}{E})$
0.4	<b>1.5811</b>	0.2659	0.0155
1.8	<b>0.7454</b>	0.1879	0.0042
3.2	<b>0.5590</b>	0.1251	0.0063
7	<b>0.3780</b>	0.0830	0.0029
5	<b>0.4472</b>	0.1049	0.0021
6	<b>0.4082</b>	0.0887	0.0008
4	<b>0.5000</b>	0.1118	0.0025
0.6	<b>1.2910</b>	0.2401	0.0094
0.8	<b>1.1180</b>	0.2227	0.0122
0.2	<b>2.2361</b>	0.3433	0.0391
0.6	<b>1.2910</b>	0.2547	0.0098
1.2	<b>0.9129</b>	0.2009	0.0046
2.4	<b>0.6455</b>	0.1540	0.0050
3.6	<b>0.5270</b>	0.1075	0.0040
5	<b>0.4472</b>	0.0990	0.0011
7	<b>0.3780</b>	0.0833	0.0042
8	<b>0.3536</b>	0.0801	0.0022
9	<b>0.3333</b>	0.0800	0.0039

Πίνακας 3.6: Οι τιμές του  $1/\sqrt{E}$ , των αντιστοιχών  $\Delta E/E$  και των σφαλμάτων τους, για όλες τις runs.



**Εικόνα 3.17:** Η ενεργειακή διακριτική ικανότητα (resolution) ως συνάρτηση του  $1/\sqrt{E}$ , για όλες τις runs, μαζί με την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων, που λαμβάνει υπόψη και τα κατακόρυφα σφάλματα των σημείων.



## Σύγκριση Monte Carlo και πραγματικών δεδομένων

Ένα βασικό ερώτημα που ανακύπτει στην πορεία προς τη χρήση ANNs στην αναγνώριση σωματιδίων είναι εάν πρέπει να εκπαιδευσουμε τα νευρωνικά δίκτυα με πραγματικά παραδείγματα (patterns) γεγονότων ή με γεγονότα παραγόμενα από Monte Carlo. Στα πλεονεκτήματα της κάθε επιλογής αναφέρθηκε στην προεπισκόπηση του παρόντος κεφαλαίου. Τελικά, για το διαχωρισμό ηλεκτρονικών γεγονότων από όλα τα υπόλοιπα χρησιμοποιήθηκαν πραγματικά γεγονότα, λόγω του ότι ο ανιχνευτής Cerenkov μας επιτρέπει να ξέρουμε στην πραγματικότητα ποια σωματίδια είναι ηλεκτρόνια και ποια όχι. Για τον διαχωρισμό, όμως, μιονίων και πιονίων η χρήση γεγονότων MC είναι αναγκαία, ειδικά στις ενέργειες όπου τα χαρακτηριστικά τους είναι παρεμφερή.

Για να εξετάσουμε εάν η χρήση γεγονότων MC είναι ενδεδειγμένη, βασικό ρόλο παίζει ο έλεγχος του κατά πόσο το MC προσομοιώνει την πραγματικότητα. Ο έλεγχος αυτός έχει ευρύτερη σημασία, γι' αυτό υπάρχουν συνεργάτες στο πείραμα οι οποίοι έχουν αναλάβει τη συνεχή βελτίωση του MC και τη σύγκρισή του με τα πραγματικά δεδομένα. Ο λόγος είναι ότι το MC δε χρησιμοποιείται μόνο στην εκπαίδευση νευρωνικών δικτύων, αλλά και σε πολλούς άλλους τομείς της ανάλυσης και του σχεδιασμού του πειράματος, από τη συμπεριφορά της δέσμης μέχρι την απόκριση και τις δυνατότητες των δύο ανιχνευτών.

Ο έλεγχος της ομοιότητας MC και πραγματικών data έγινε ελέγχοντας εάν διάφορες μορφολογικές μεταβλητές ακολουθούν τις ίδιες κατανομές στα MC και στα πραγματικά data. Το αποτέλεσμα της σύγκρισης ποσοτικοποιήθηκε εφαρμόζοντας το Kolmogorov test, το οποίο περιγράφεται λεπτομερώς σε ένα από τα παραρτήματα.

Μεταβλητή	Περιγραφή
<i>nhitplanes</i>	Πλήθος χτυπημένων επιπέδων. Λαμβάνει τιμές από 1 μέχρι και 60.
<i>nhits</i>	Πλήθος hits, όπου κάθε χτυπημένο strip μπορεί να δώσει έως 2 hits, εφόσον ληφθεί σήμα και από τα δύο άκρα του. Θεωρητικά, μπορεί να λάβει ακέραιες τιμές από 1 μέχρι $2 \cdot 24 \cdot 60 = 2880$ .
<i>nhitstrips</i>	Πλήθος χτυπημένων strips. Λαμβάνει ακέραιες τιμές από 1 μέχρι $24 \cdot 60 = 1440$ .
<i>mipweighrad</i>	Εγκάρσια έκταση του γεγονότος, λαμβάνοντας υπόψη τις χτυπημένες strips ανάλογα με τη visible energy (mip) που καταγράφουν.
<i>showermax</i>	Ο αριθμός του επιπέδου στο οποίο σημειώθηκε το hit με τη μεγαλύτερη visible energy (mip). Λαμβάνει ακέραιες τιμές, από 0 μέχρι και 59.
<i>nhits/nhitplanes</i>	Μέσο πλήθος hits ανά χτυπημένο επίπεδο. Θεωρητικά λαμβάνει δεκαδικές τιμές, από 0 μέχρι και 23.
<i>maxmip</i>	Η μέγιστη τιμή της visible energy που σημειώθηκε μεταξύ των hits.
<i>mipweighaveplane</i>	Ο μέσος όρος του αύξοντος αριθμού των χτυπημένων επιπέδων, ζυγισμένου με τη συνολική visible energy που κατέγραψε κάθε επίπεδο. Θεωρητικά λαμβάνει δεκαδικές τιμές από 0 μέχρι και 59.
<i>totmip</i>	Άθροισμα της visible energy (mip) που κατέγραψε ο ανιχνευτής, εξαιρώντας αυτήν που κατεγράφη στο πρώτο επίπεδο (υπ' αριθμόν 0).
<i>strip</i>	Ο αύξων αριθμός κάθε strip (από 0 έως και 23) που χτυπήθηκε.

**Πίνακας 3.7:** Μεταβλητές που χρησιμοποιήθηκαν στη σύγκριση πραγματικών και MC ηλεκτρονίων διαφόρων ενεργειών.

Οι μεταβλητές που φαίνονται στον πίνακα 3.7 χρησιμοποιήθηκαν στη σύγκριση πραγματικών και MC ηλεκτρονίων διαφόρων ενεργειών. Ο λόγος που συγκρίναμε μόνο ηλεκτρόνια μεταξύ τους, είναι ότι στα πραγματικά data, τα ηλεκτρόνια είναι αυτά για τα οποία είμαστε πιο σίγουροι ότι ξέρουμε την ταυτότητά τους, χάρη στην ακτινοβολία Cerenkov.

Στις εικόνες 3.18 ως 3.20 βλέπουμε πόσο μοιάζουν ή όχι οι κατανομές του MC και των πραγματικών data για αυτές τις 10 μεταβλητές στις ενέργειες των 0.2, 0.6 και 5.0 GeV. Για τις ενέργειες αυτές χρησιμοποιήθηκαν οι runs με αριθμούς 40771, 40783 και 50557 αντίστοιχα. Επάνω σε κάθε εικόνα αναγράφεται η τιμή της πιθανότητας Kolmogorov, που όσο πλησιάζει προς το 0 τόσο χειρότερα συμφωνούν data και MC. Οι πιθανότητες Kolmogorov των 30 συνολικά συγκρίσεων που κάναμε συνοψίζονται στον πίνακα 3.8.

	0.2 GeV	0.6 GeV	5.0 GeV
<i>nhitplanes</i>	$1.552 \times 10^{-01}$	$9.997 \times 10^{-01}$	$4.026 \times 10^{-01}$
<i>nhits</i>	$1.158 \times 10^{-35}$	$6.972 \times 10^{-07}$	$1.131 \times 10^{-25}$
<i>nhitstrips</i>	$5.647 \times 10^{-09}$	$7.434 \times 10^{-08}$	$3.221 \times 10^{-30}$
<i>mipweighrad</i>	$1.584 \times 10^{-14}$	$5.631 \times 10^{-05}$	$2.255 \times 10^{-04}$
<i>showermax</i>	$2.641 \times 10^{-04}$	$8.166 \times 10^{-03}$	$2.557 \times 10^{-02}$
<i>nhits/nhitplanes</i>	0	$2.297 \times 10^{-09}$	$7.434 \times 10^{-22}$
<i>maxmip</i>	$5.079 \times 10^{-28}$	$1.159 \times 10^{-08}$	$4.320 \times 10^{-01}$
<i>mipweighaveplane</i>	$9.891 \times 10^{-07}$	$2.358 \times 10^{-01}$	$2.122 \times 10^{-01}$
<i>totmip</i>	$9.019 \times 10^{-09}$	$1.906 \times 10^{-13}$	0
<i>strip</i>	$7.166 \times 10^{-22}$	$2.164 \times 10^{-18}$	0

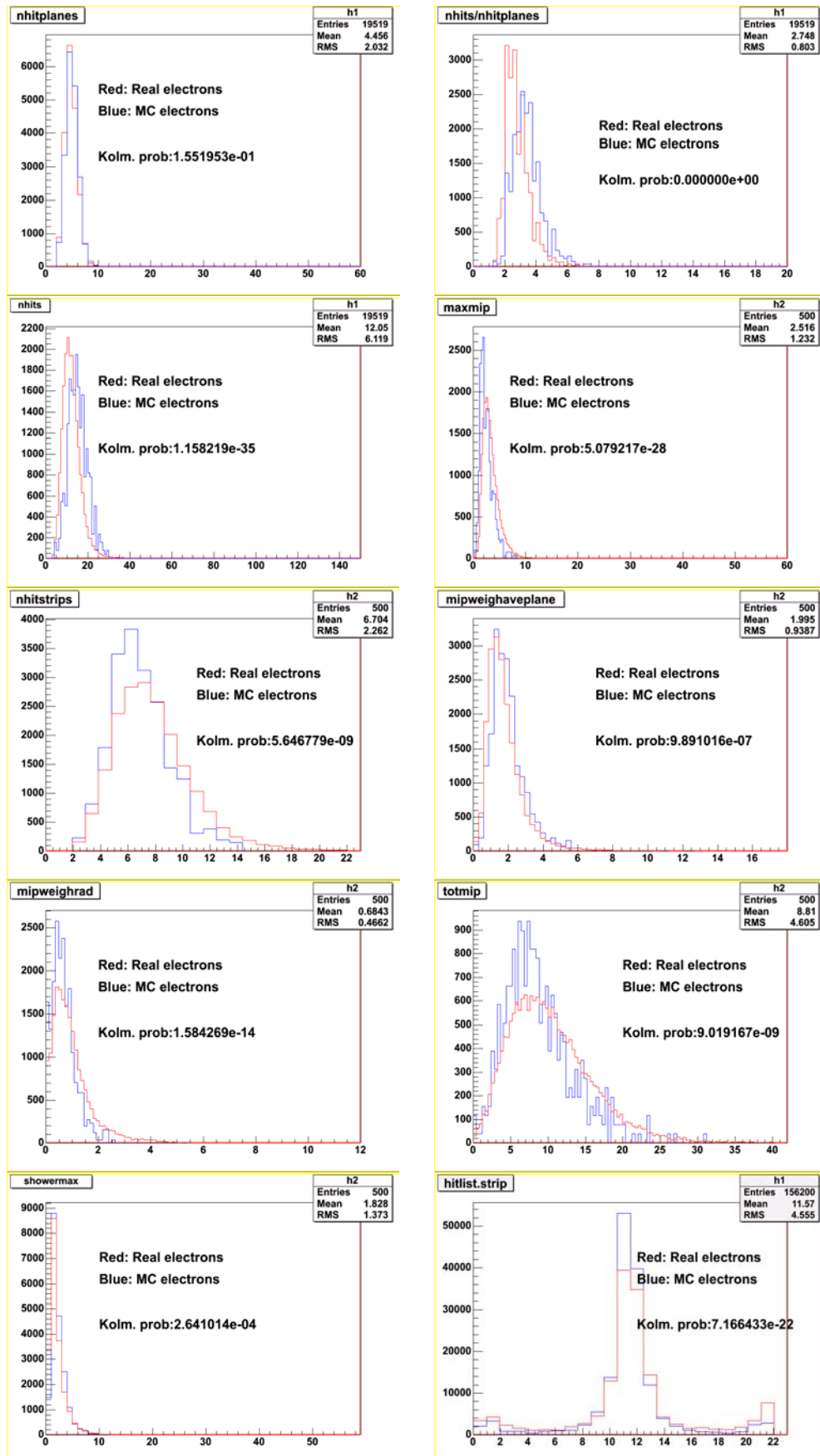
**Πίνακας 3.8:** Αποτελέσματα του Kolmogorov test για τις 10 μεταβλητές του πίνακα 3.7, σε τρεις ενέργειες.

Οι τιμές του πίνακα 3.8 απεικονίζονται στο ραβδόγραμμα της εικόνας 3.21. Βλέπουμε ότι η συμφωνία MC και πραγματικότητας δεν είναι ίδια σε όλες τις ενέργειες. Στα 0.6 GeV όλες οι μεταβλητές δίνουν μέτριες και υψηλές τιμές της Kolmogorov πιθανότητας, ενώ στα 0.2 GeV και στα 5.0 GeV υπάρχουν 2-3 μεταβλητές με πολύ μικρή πιθανότητα Kolmogorov. Στην εικόνα 3.22 φαίνεται η μέση πιθανότητα Kolmogorov ως προς τις μεταβλητές για κάθε ενέργεια, οπότε βλέπουμε ότι η χειρότερα προσομοιούμενη ενέργεια είναι τα 0.2 GeV, ενώ η καλύτερη είναι τα 0.6 GeV.

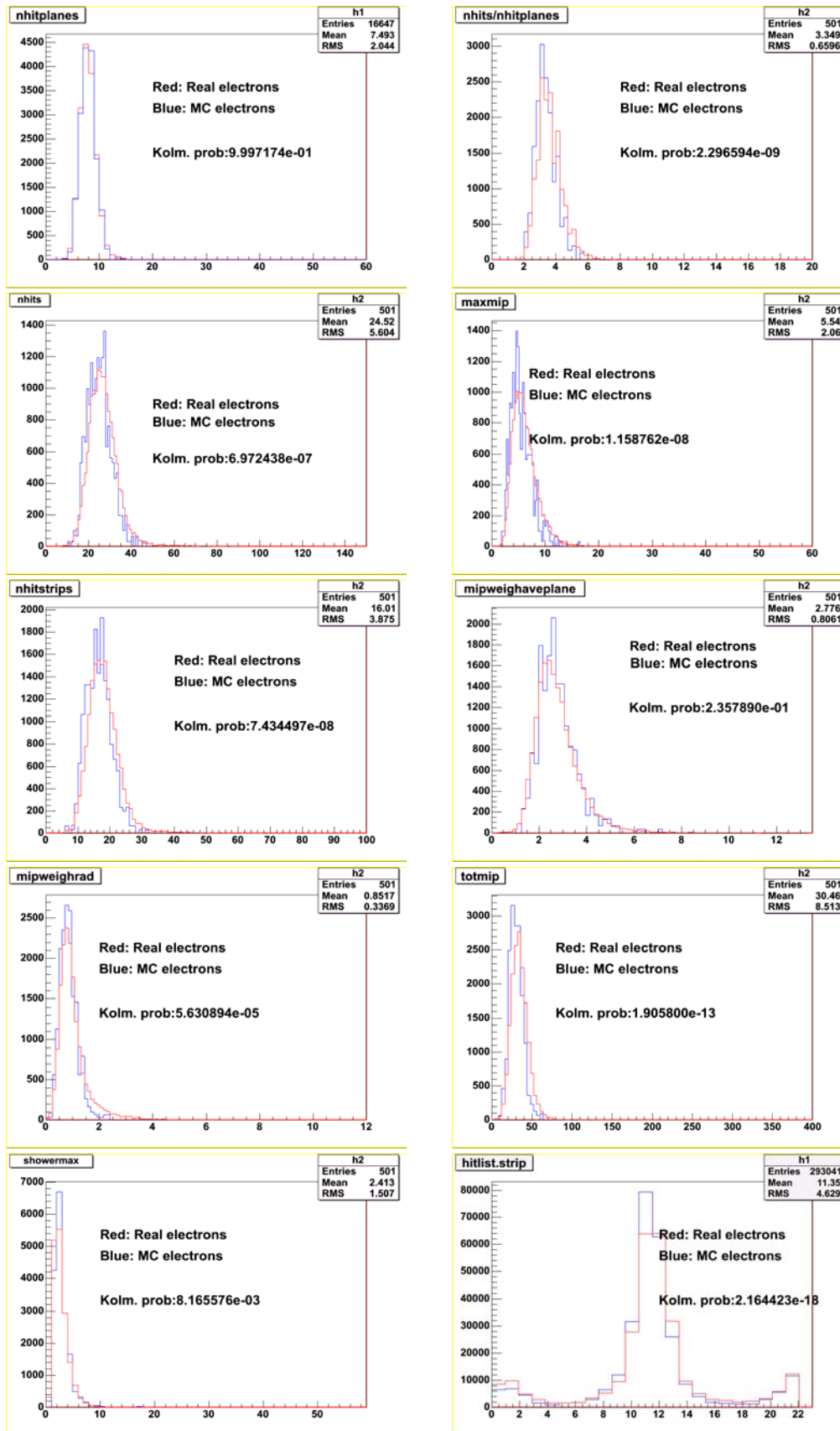
Συγκρίνοντας μεταξύ τους τις 10 μεταβλητές στην εικόνα 3.21, βλέπουμε ότι αυτές που είναι συνολικά πιο πιστά αναπαραγόμενες (με μεγαλύτερη πιθανότητα Kolmogorov) είναι η *nhitplanes*, η *mipweighaveplane* και η *maxmip*. Αυτή που είναι χειρότερα προσομοιούμενη είναι η *strip*. Στη σύγκριση βοηθά το ραβδόγραμμα της εικόνας 3.23, όπου φαίνεται η μέση πιθανότητα Kolmogorov ως προς τις ενέργειες για κάθε μεταβλητή.

Η όποια ασυμφωνία μεταξύ MC και πραγματικών data οφείλεται κυρίως στο ότι η ρύθμιση των παραμέτρων του MC επιδέχεται βελτίωση. Βεβαίως, έστω και σε μικρό ποσοστό, η ασυμφωνία οφείλεται και στο ότι δεν είναι εύκολο να είμαστε απολύτως βέβαιοι ότι όλα τα στοιχεία των κατανομών που αναφέρονται στα πραγματικά data είναι όντως ηλεκτρόνια. Αλλά κι αν έχουν παρεισφρήσει μη-ηλεκτρόνια στις κατανομές των ηλεκτρονίων, αυτά είναι τόσο λίγα που δεν επηρεάζουν το Kolmogorov test. Για να φανεί το πόσο μικρών διαστάσεων είναι η λανθασμένη αναγνώριση σωματιδίων σαν ηλεκτρόνια, παραθέτουμε την εικόνα 3.24. Εκεί φαίνεται η κατανομή του TOF για όλα τα σωματίδια και μαζί φαίνεται και η κατανομή του TOF για τα σωματίδια που έδωσαν ακτινοβολία Cerenkov, σε ενέργεια 5 GeV. Βλέπουμε ότι συγκριτικά ελάχιστα σωματίδια είχαν ακτινοβολία Cerenkov και ταυτόχρονα TOF που να αντιστοιχεί στην δεύτερη κορυφή, των αντιπρωτονίων. Τα υπόλοιπα σωματίδια που έδωσαν Cerenkov έχουν όλα TOF που αντιστοιχεί σε TOF ηλεκτρονίων, οπότε δε μπορούμε παρά να τα δεχτούμε ως ηλεκτρόνια. Αυτό μας πείθει ότι η απαίτηση να έχουμε ακτινοβολία Cerenkov και μόνο αρκεί για να απομονώσουμε τα ηλεκτρόνια με πολύ καλή ακρίβεια.

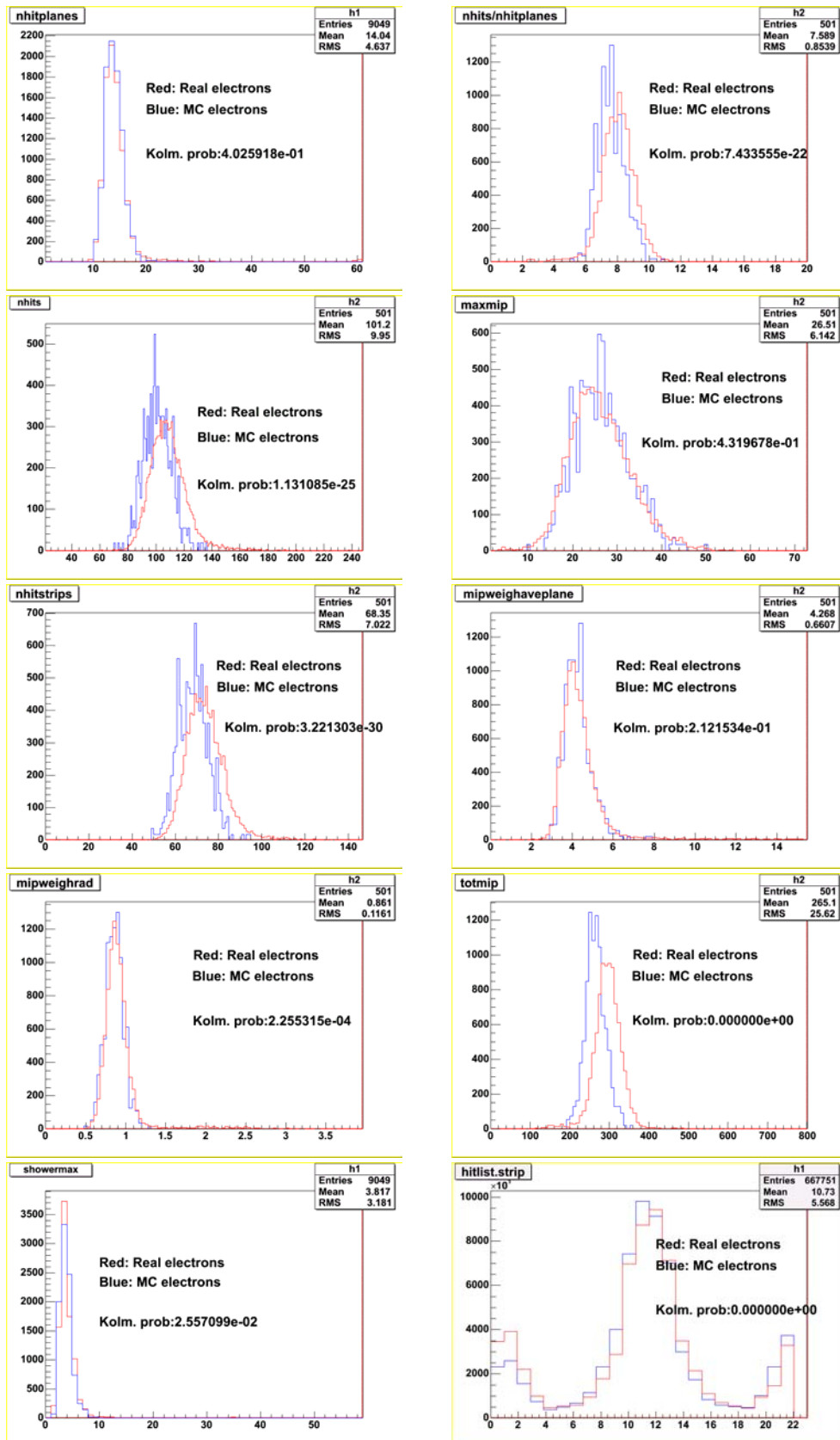
Πάντως είναι σαφές ότι το πρόγραμμα του MC επιδέχεται βελτίωση και *όταν είναι δυνατόν, είναι προτιμότερο να αποφεύγεται η χρήση του*. Αυτό σημαίνει ότι όταν θέλουμε να εκπαιδεύσουμε ANNs που να διαχωρίζουν ηλεκτρόνια από μη-ηλεκτρόνια, είναι προτιμότερο να χρησιμοποιήσουμε πραγματικά δεδομένα, εφόσον σε αυτά μας παρέχεται η δυνατότητα αναγνώρισης ηλεκτρονίων και μη ηλεκτρονίων.



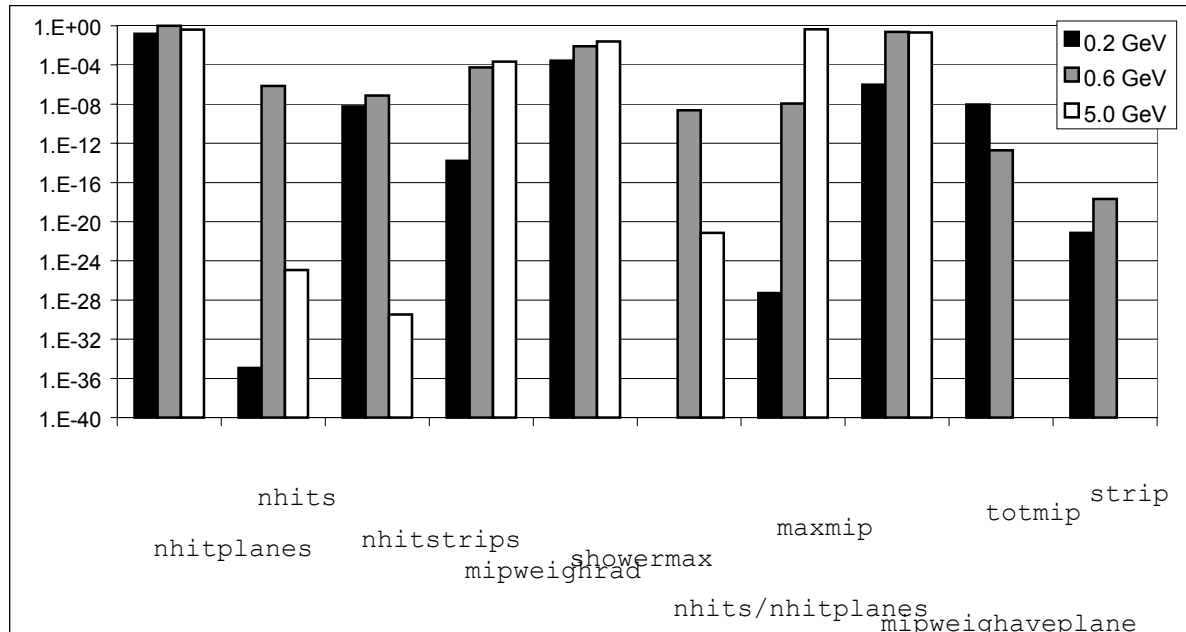
Εικόνα 3.18: Κατανομές των μεταβλητών του πίνακα 3.7 για ηλεκτρόνια πραγματικά και MC σε ενέργεια 0.2 GeV.



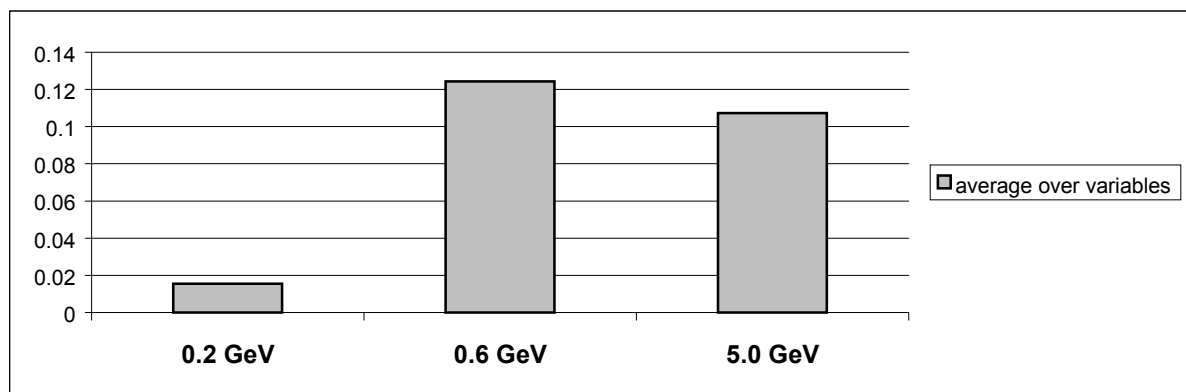
Εικόνα 3.19: Κατανομές των μεταβλητών του πίνακα 3.7 για ηλεκτρόνια πραγματικά και MC σε ενέργεια 0.6 GeV.



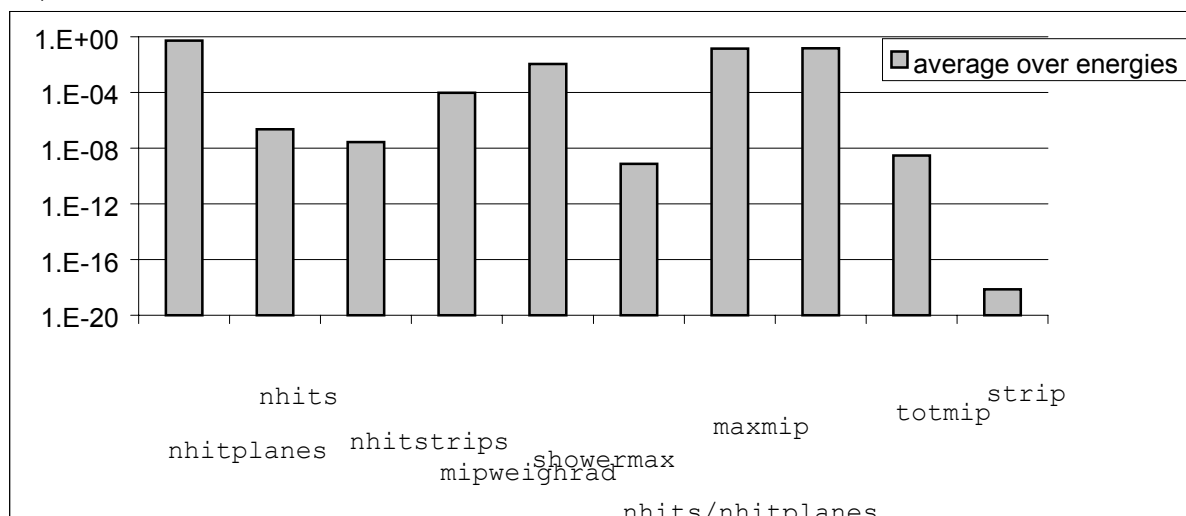
Εικόνα 3.20: Κατανομές των μεταβλητών του πίνακα 3.7 για ηλεκτρόνια πραγματικά και MC σε ενέργεια 5.0 GeV.



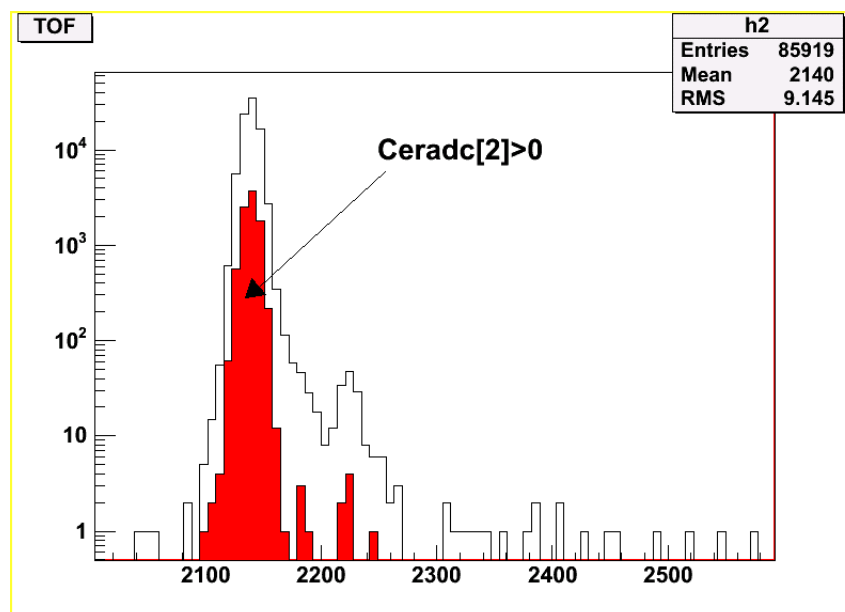
Εικόνα 3.21: Οι πιθανότητες Kolmogoron του πίνακα 3.8.



Εικόνα 3.22: Μέση πιθανότητα Kolmogoron ως προς τις μεταβλητές του πίνακα 3.7, για κάθε ενέργεια.



Εικόνα 3.23: Μέση πιθανότητα Kolmogoron ως προς τις ενέργειες, για κάθε μεταβλητή του πίνακα 3.7.



**Εικόνα 3.24:** Κατανομή του TOF όλων των γεγονότων και των γεγονότων που έδωσαν Cerenkov, στη run #50557, με ορμή -5 GeV/c.

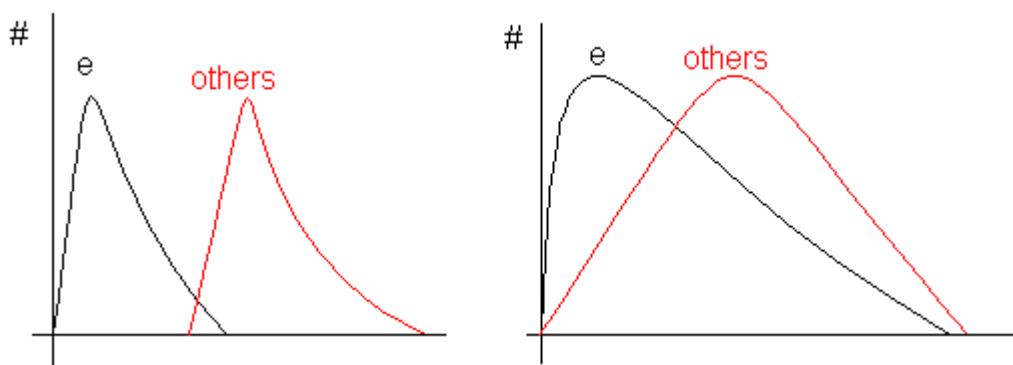
### Διαχωριστικές μεταβλητές για ηλεκτρόνια – μη ηλεκτρόνια

Έχοντας λάβει την απόφαση να χρησιμοποιήσουμε *πραγματικά δεδομένα* στην εκπαίδευση νευρωνικών δικτύων που να διαχωρίζουν τα ηλεκτρόνια από τα μη ηλεκτρόνια, σε αυτήν την παράγραφο θα περιγραφεί τη διαδικασία αναζήτησης κατάλληλων μεταβλητών για την εκπαίδευση.

Το χαρακτηριστικό που πρέπει να διαθέτουν αυτές οι μεταβλητές είναι να κατανέμονται όσο γίνεται πιο διαφορετικά όταν προέρχονται από τους δύο προς διαχωρισμό πληθυσμούς. Για παράδειγμα, στην εικόνα 3.25 φαίνεται ένα παράδειγμα μιας μεταβλητής που, αν υπήρχε, θα ήταν πολύ διαχωριστική και πολύ κατάλληλη, και μιας που είναι λιγότερο διαχωριστική<sup>3</sup>.

Είναι αναγκαίο να περιορίσουμε την αναζήτηση διαχωριστικών μεταβλητών μόνο μεταξύ εκείνων των μεταβλητών που θα υπάρχουν και στους δύο ανιχνευτές του MINOS, ώστε να έχουν χρησιμότητα τα ANNs που θα φτιάξουμε. Δηλαδή, δεν είναι σκόπιμο να χρησιμοποιήσουμε ως σήμα εισόδου στο νευρωνικό την πληροφορία του ανιχνευτή Cerenkov, ή αυτήν του TOF, παρ' όλο που κάτι τέτοιο θα έδινε ANNs που θα έκαναν εκπληκτικά καλά τη δουλειά τους, γιατί οι δύο αυτές μεταβλητές είναι εξαιρετικά διαχωριστικές όταν αναφερόμαστε σε ηλεκτρόνια και μη-ηλεκτρόνια. Παρ' όλο που δε θα τις εισάγουμε στα ANNs, θα τις χρησιμοποιήσουμε για να γνωρίζουμε σε κάθε παράδειγμα (pattern) που δείχνουμε στο ANN ποια είναι η σωστή απάντηση που θα έπρεπε να δώσει (το λεγόμενο target του pattern).

<sup>3</sup> Θα μπορούσε κανείς να αναρωτηθεί εάν η λιγότερο διαχωριστική μεταβλητή είναι και λιγότερο κατάλληλη για την εκπαίδευση. Η απάντηση είναι ότι δε βλάπτει να εισάγουμε σε ένα νευρωνικό και μεταβλητές που δεν είναι πολύ διαχωριστικές, αρκεί να εισάγουμε και άλλες παράλληλα, οι οποίες να είναι διαχωριστικές. Το δίκτυο θα εκμεταλλευθεί τις πολύ διαχωριστικές ώστε να φτάσει σε καλό επίπεδο εκπαίδευσης, αλλά θα επιβαρυνθεί και με το μάταιο χρέος να ρυθμίσει τα βάρη που πολλαπλασιάζουν το σήμα που εισάγει η μη διαχωριστική μεταβλητή. Γενικά, όταν μπορούμε, είναι καλό να μην επιβαρύνουμε την εκπαίδευση με μη διαχωριστικές μεταβλητές, διότι όσο περισσότερων διαστάσεων γίνεται ο χώρος των βαρών, τόσο πιο δύσκολο γίνεται να βρεθεί μέσα σε αυτόν το σημείο που δίνει το ολικό ελάχιστο του σφάλματος του ANN.



**Εικόνα 3.25:** **Αριστερά:** Παράδειγμα μιας μεταβλητής που είναι πολύ διαχωριστική για τους πληθυσμούς των ηλεκτρονίων (e) και των μη-ηλεκτρονίων (others). **Δεξιά:** Παράδειγμα μιας μεταβλητής που διαχωρίζει λιγότερο τους δύο πληθυσμούς.

Η αναζήτηση θα γίνει μεταξύ των μορφολογικών μεταβλητών που βρίσκονται ήδη υπολογισμένες μέσα στα root-αρχεία των διαφόρων runs, αλλά και άλλων που θα εμπνευστούμε και θα υπολογίζουμε εμείς. Μορφολογικές μεταβλητές ονομάζω αυτές που συνδυάζουν πληροφορία τοπολογική ή και ενεργειακή. Η τοπολογική πληροφορία μας λέει σε ποια strips χτυπήθηκε ο ανιχνευτής και από πόσα και ποια άκρα των strips λάβαμε φως κατά την ανάπτυξη ενός γεγονότος, ενώ η ενεργειακή πληροφορία μας λέει πόση ενέργεια εναποτέθηκε σε κάθε strip, πόση διαβάστηκε από κάθε άκρο της, πόση ήταν η συνολική ενέργεια που εναποτέθηκε σε ολόκληρο τον ανιχνευτή ή σε κάποιο τμήμα αυτού.

Από τη στιγμή που αναζητούμε νέες μεταβλητές, πέραν αυτών που ήδη υπάρχουν μέσα σε κάθε root-αρχείο, αντιλαμβάνεται κανείς ότι μπορούμε να βρούμε πάμπολλες. Δεν είναι, όμως, σκόπιμο να ψάχνουμε επ' άπειρον, διότι ούτως ή άλλως δε θα μπορούμε να εκπαιδεύσουμε ένα ANN με όλες αυτές. Ο λόγος είναι ότι όσο περισσότερους νευρώνες εισόδου έχει ένα ANN, τόσο περισσότερα είναι και τα βάρη του (weights), οπότε τόσο περισσότερα patterns χρειάζεται για να ρυθμίσει όλα αυτά τα βάρη. Αν έχουμε πολλά βάρη και λίγα παραδείγματα, το ANN πιθανόν να μη μπορεί να εκπαιδευτεί αρκούντως. Όπως θα φανεί και στη συνέχεια, το γεγονός ότι χρησιμοποιώ πραγματικά data μου θέτει περιορισμό ως προς το πλήθος των παραδειγμάτων που διαθέτω για να εκπαιδεύσω ANNs.

Στον πίνακα 3.9 συνοψίζονται και περιγράφονται οι μεταβλητές που εξετάζω ως προς τη διαχωριστικότητα.

Μεταβλητή		Περιγραφή
nhitplanes	*	βλ. πίνακα 3.7
nhits	*	βλ. πίνακα 3.7
nhitstrips	*	βλ. πίνακα 3.7
mipweighrad	*	βλ. πίνακα 3.7
showermax	*	βλ. πίνακα 3.7
nhits/nhitplanes		βλ. πίνακα 3.7
maxmip	*	βλ. πίνακα 3.7
mipweighaveplane	*	βλ. πίνακα 3.7
totmip	*	βλ. πίνακα 3.7
strip	*	βλ. πίνακα 3.7
totmip/nhitplanes		Μέση visible energy (mip), πλην όσης αποτέθηκε στο πρώτο επίπεδο, ανά χτυπημένο επίπεδο.
60 μετ/τές: planes[0, 1, ..., 59]		Το ποσοστό των χτυπημένων strips, που ανήκαν στο επίπεδο υπ' αριθμόν 0, 1, ..., 59.



60 μετ/τέξ: planes_mip[0, 1, ... , 59]	Το ποσοστό της συνολικής visible energy που αποτέθηκε στο επίπεδο υπ' αριθμόν 0, 1, ... , 59.
24 μετ/τέξ: strips[0, 1, ... , 23]	Το ποσοστό των χτυπημένων strips που, στο επίπεδο όπου ανήκαν, ήταν υπ' αριθμόν 0, 1, ... , 23.
24 μετ/τέξ: strips_mip[0, 1, ... , 23]	Το ποσοστό της visible energy που αποτέθηκε σε strips που, στο επίπεδο όπου ανήκαν, ήταν υπ' αριθμόν 0, 1, ... , 23.

**Πίνακας 3.9:** Οι 179 μεταβλητές που εξετάσαμε ως προς τη διαχωριστικότητά τους. Μόνο οι 9 μεταβλητές που σημαδεύονται με αστερίσκο ήταν έτοιμες μέσα στα root-αρχεία, ενώ όλες οι υπόλοιπες υπολογίστηκαν εξ αυτών.

Όλες οι μεταβλητές του πίνακα 3.9 εξετάστηκαν ως προς τη διαχωριστικότητά τους σε διάφορες ενέργειες και, όπως είναι λογικό, δεν ήταν εξίσου διαχωριστικές σε όλες τις ενέργειες. Οι ενέργειες στις οποίες εξετάστηκαν και οι αντίστοιχες runs φαίνονται στον πίνακα 3.10.

Ορμή (GeV/c)	run #
-0.2	40771
-0.6	40783
-1.2	40874
-2.4	40415, 40916
5.0	50557

**Πίνακας 3.10:** Οι ενέργειες και οι runs όπου εξετάστηκε η διαχωριστικότητά.

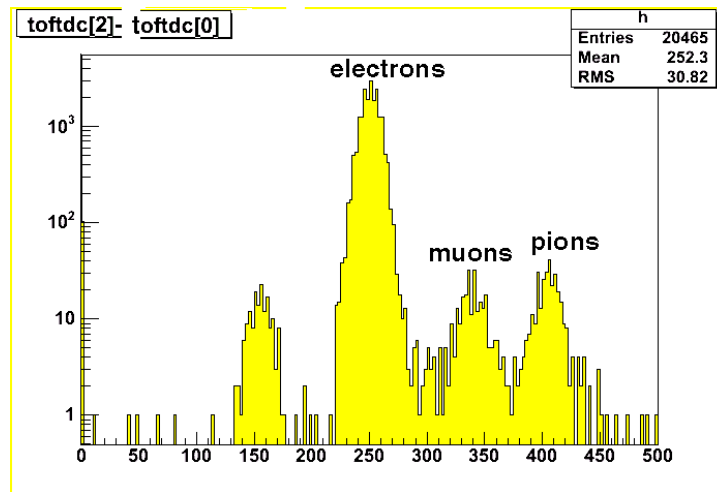
Στις επόμενες σελίδες πρόκειται να παρατεθούν οι κατανομές επιλεγμένων μεταβλητών του πίνακα 3.9 για όλες τις ενέργειες του πίνακα 3.10. Στα περισσότερα διαγράμματα θα φαίνεται με ένα χρώμα (μαύρο) η κατανομή των ηλεκτρονίων και με άλλο χρώμα (συνήθως κόκκινο) η κατανομή των μη-ηλεκτρονίων. Μόνη εξαίρεση αποτελεί η ενέργεια των 0.2 GeV, όπου μπορούμε να διακρίνουμε τα ηλεκτρόνια, αλλά και τα πόνια και τα μόνια διότι έχουν διαφορετικά TOFs, όπως φαίνεται στην εικόνα 3.26.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η αριστερότερη κορυφή, που σχηματίζεται από μικρό αριθμό, κυρίως ηλεκτρονίων, αντιστοιχεί σε τόσο μικρό TOF που θα έπρεπε τα σωματίδια που την αποτελούν να κινούνταν με ταχύτητα μεγαλύτερη από την ταχύτητα του φωτός. Αυτό φυσικά δε συμβαίνει και το ελέγξαμε ως εξής: Κάναμε την κατανομή του αριθμού του strip που χτυπιέται στο πρώτο επίπεδο του ανιχνευτή, δηλαδή την κατανομή του «ύψους» στο οποίο τα σωματίδια χτυπάνε πρώτα τον ανιχνευτή. Τα περισσότερα σωματίδια χτυπούσαν τον ανιχνευτή στο κέντρο. Τα γεγονότα με το αφύσικο TOF συναντούσαν τον ανιχνευτή έκκεντρα, γεγονός που εξηγεί το φαινόμενο. Πρόκειται για συνήθη σωματίδια τα οποία χτυπούσαν τα TOF paddles όχι στην περιοχή του σπινθηριστή αλλά στο σύστημα των δυνόδων, ελαφρώς πιο ψηλά, σηματοδοτώντας το πέρασμά τους με μικρότερη καθυστέρηση από την κανονική.

Για να γίνει περισσότερο κατανοητή η σημασία των μεταβλητών όπως η plane\_mip[i], εξηγώ ότι βλέποντας για παράδειγμα στην εικόνα 3.27β την κατανομή του planes[13] καταλαβαίνω ότι ελάχιστα γεγονότα της run #40771 έδωσαν πάνω από το 10% της ενέργειάς τους στο επίπεδο #13, δηλαδή το 14<sup>ο</sup> επίπεδο στην πραγματικότητα. Αντίθετα, βλέποντας την κατανομή του planes[3], καταλαβαίνω ότι όλα σχεδόν τα γεγονότα έδωσαν λιγότερο από το 50% της ενέργειάς τους στο επίπεδο #3, ενώ υπήρχαν και λίγα events που έδωσαν το 50%, ελάχιστα που έδωσαν το 70% κλπ.

Συγκρίνοντας τη διαχωριστικότητα των μεταβλητών αυτών συναρτήσει της ενέργειας, βλέπουμε ότι στα 0.2 GeV (εικ. 3.27α, 3.27β) η διαχωριστικότητα είναι αισθητά μικρότερη απ' ότι σε μεγαλύτερες ενέργειες, ειδικά στις μεταβλητές strip\_mip[i] και plane\_mip[i]. Ο λόγος είναι ότι τα γεγονότα σε τόσο μικρή ενέργεια διανύουν ελάχιστα επίπεδα σιδήρου και χτυπούν ελάχιστες strips. Όλα σχεδόν τα events έχουν μια παρόμοια μορφή, περιορισμένη

κυρίως στα πρώτα 5 περίπου επίπεδα του ανιχνευτή, γι' αυτό και καμία μεταβλητή δεν είναι σε θέση να διαφοροποιήσει δραστικά τα ηλεκτρόνια.

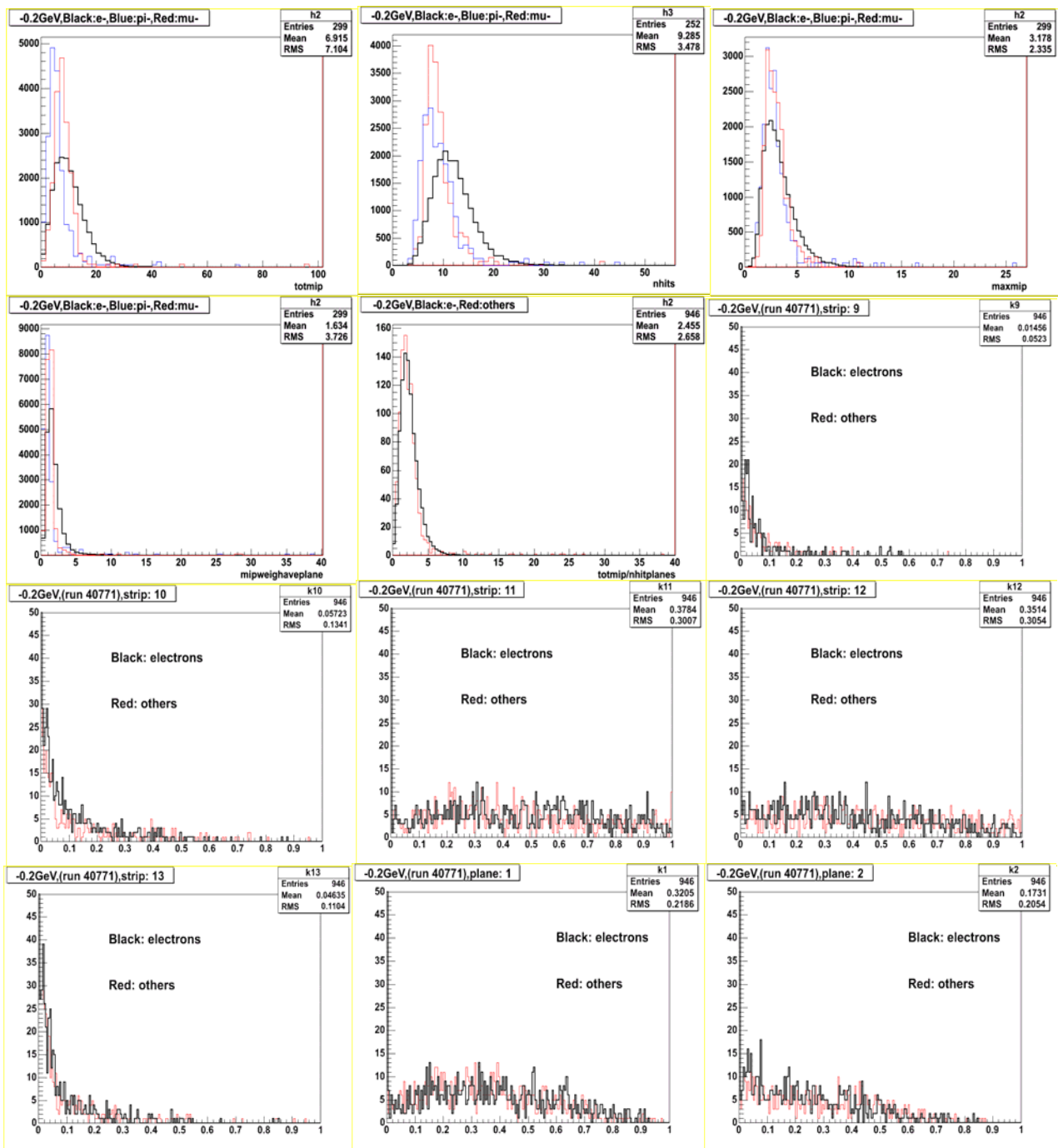


**Εικόνα 3.26:** Κατανομή του TOF των γεγονότων της run #40771, ορμής 0.2 GeV/c.

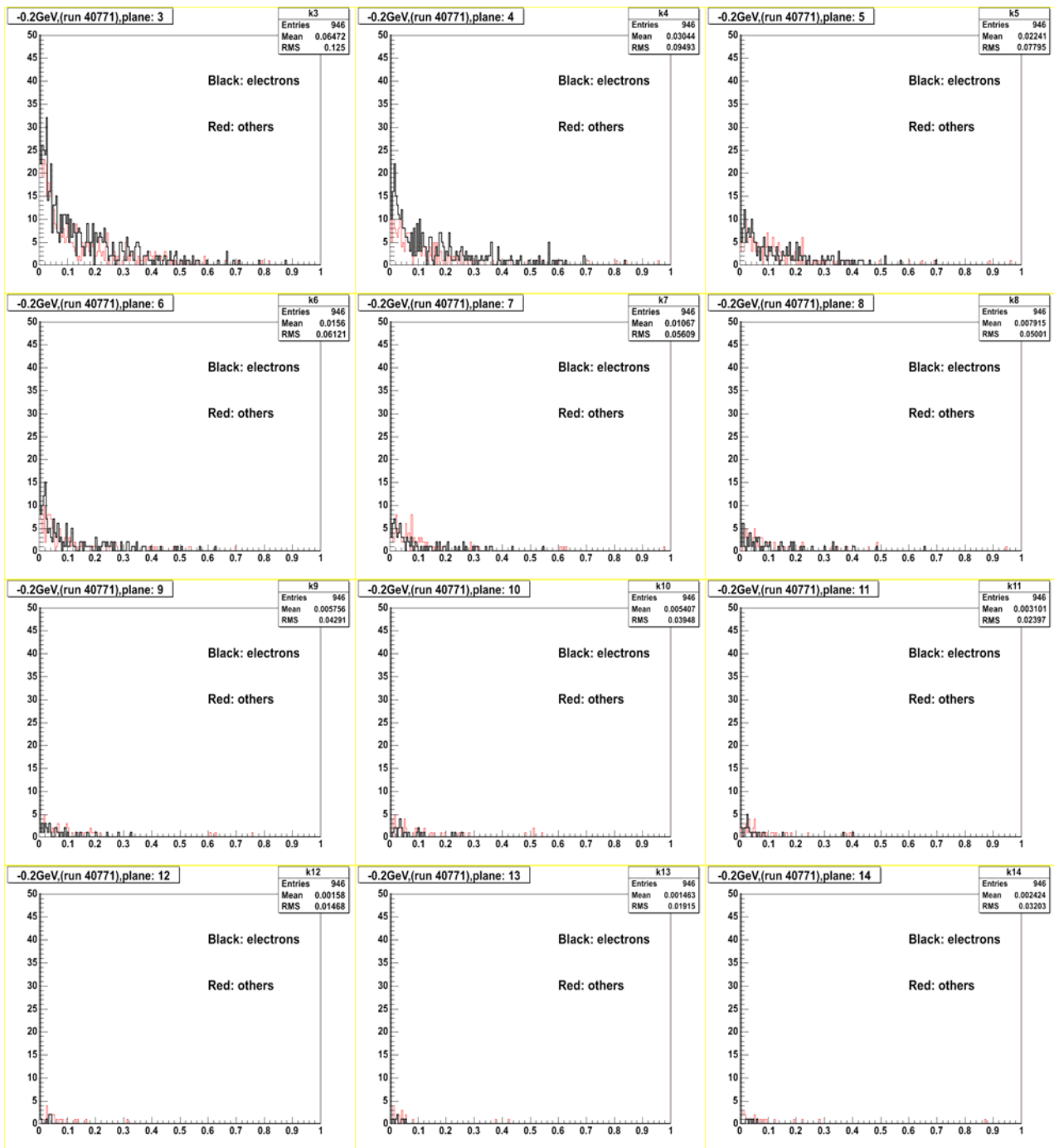
Ο λόγος που επιλέξαμε προς παρουσίαση αυτές τις 24 μεταβλητές από το σύνολο των 179, είναι ότι αυτές, συν την `plane_mip[15]`, πρόκειται να χρησιμοποιήσουμε για την εκπαίδευση ANNs. Για να διαλέξουμε ποιες μεταβλητές ενδείκνυνται για αυτήν τη χρήση προσπαθήσαμε να εντοπίσουμε ποιες είναι περισσότερο διαχωριστικές σε όλες τις ενέργειες.

Στην προσπάθεια να βρούμε πιο διαχωριστικές μεταβλητές σκεφτήκαμε να θέσουμε ένα κατώτατο όριο στο σύνολο των φωτοηλεκτρονίων που πρέπει να δίνει μια strip για να τη λαμβάνουμε υπόψη μας. Με αυτόν τον τρόπο ελαττώνουμε το cross-talk, ελπίζοντας βεβαίως ότι το φως που μεταβιβάζεται από την αρχική οπτική ίνα στη γειτονική της δεν είναι μεγάλο ποσοστό του αρχικού. Το πόσο δραστικά μπορούμε να απομακρύνουμε το cross-talk φαίνεται στην εικόνα 3.33 με το παράδειγμα ενός πιονίου ορμής 2.4 GeV/c, αλλά και στην εικόνα 3.34 όπου φαίνεται η μεταβλητή `nhits`. Όταν επιβάλλουμε το cross-talk cut, βλέπουμε ότι ξεκαθαρίζει η εικόνα πως τα άρτια `nhits` είναι πολυπληθέστερα, εφόσον οι περισσότερες strips δίνουν σήμα και στα δύο άκρα τους. Αντίθετα, όταν δεν επιβάλλουμε κανένα cut στο pulse height, τα περιττά `nhits` δε φαίνονται να υστερούν σε σχέση με τα άρτια, διότι είναι σύνηθες να μοιράζεται το φως που θα λαμβάναμε από το ένα άκρο μιας strip και να εξέρχεται εν μέρει και από το ένα άκρο μιας άλλης strip, δημιουργώντας τουλάχιστον μια strip που φαινομενικά δίνει περιττό αριθμό σημάτων.

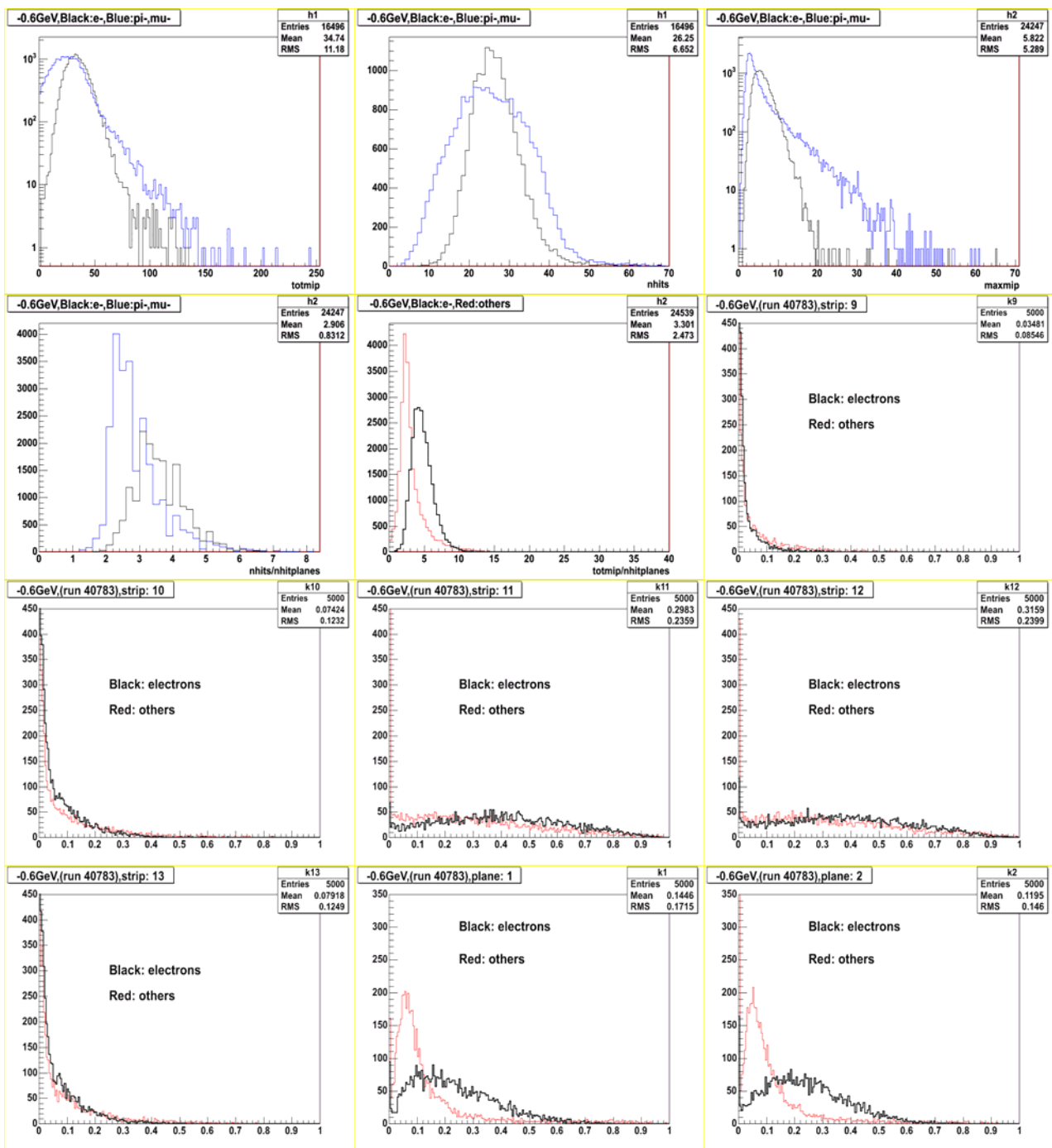
Δεν είναι εύκολο το να πούμε εάν η επιβολή του cross-talk cut οδηγεί σε περισσότερο διαχωριστικές μεταβλητές, δεν προκαλεί καμία αλλαγή ή κάνει το διαχωρισμό μικρότερο. Αυτό έχει να κάνει με το ύψος του τιθέμενου κατωφλίου, με την ενέργεια των προς διαχωρισμό γεγονότων και με το ποια μεταβλητή εξετάζουμε. Στις περισσότερες μεταβλητές η επίδραση του κατωφλίου των 5 φωτοηλεκτρονίων δεν προκαλεί σημαντικές αλλαγές στη διαχωριστικότητα. Βεβαίως, συμβαίνει να αλλάζει το σχήμα της κατανομής τόσο των ηλεκτρονίων όσο και των μη ηλεκτρονίων, οπότε το cross-talk cut έχει εμφανή αποτελέσματα, αλλά η διαχωριστικότητα συνήθως δεν επηρεάζεται. Αυτό είναι λογικό από την άποψη ότι το cross-talk είναι ένα φαινόμενο που εμφανίζεται ανεξαρτήτως εάν το γεγονός είναι ηλεκτρονικό ή μη. Ένα παράδειγμα όπου η διαχωριστικότητα μειώνεται είναι στην εικόνα 3.35, όπου φαίνεται η μεταβλητή `planes[1]` πριν και μετά το κατώφλι των 5 φωτοηλεκτρονίων.



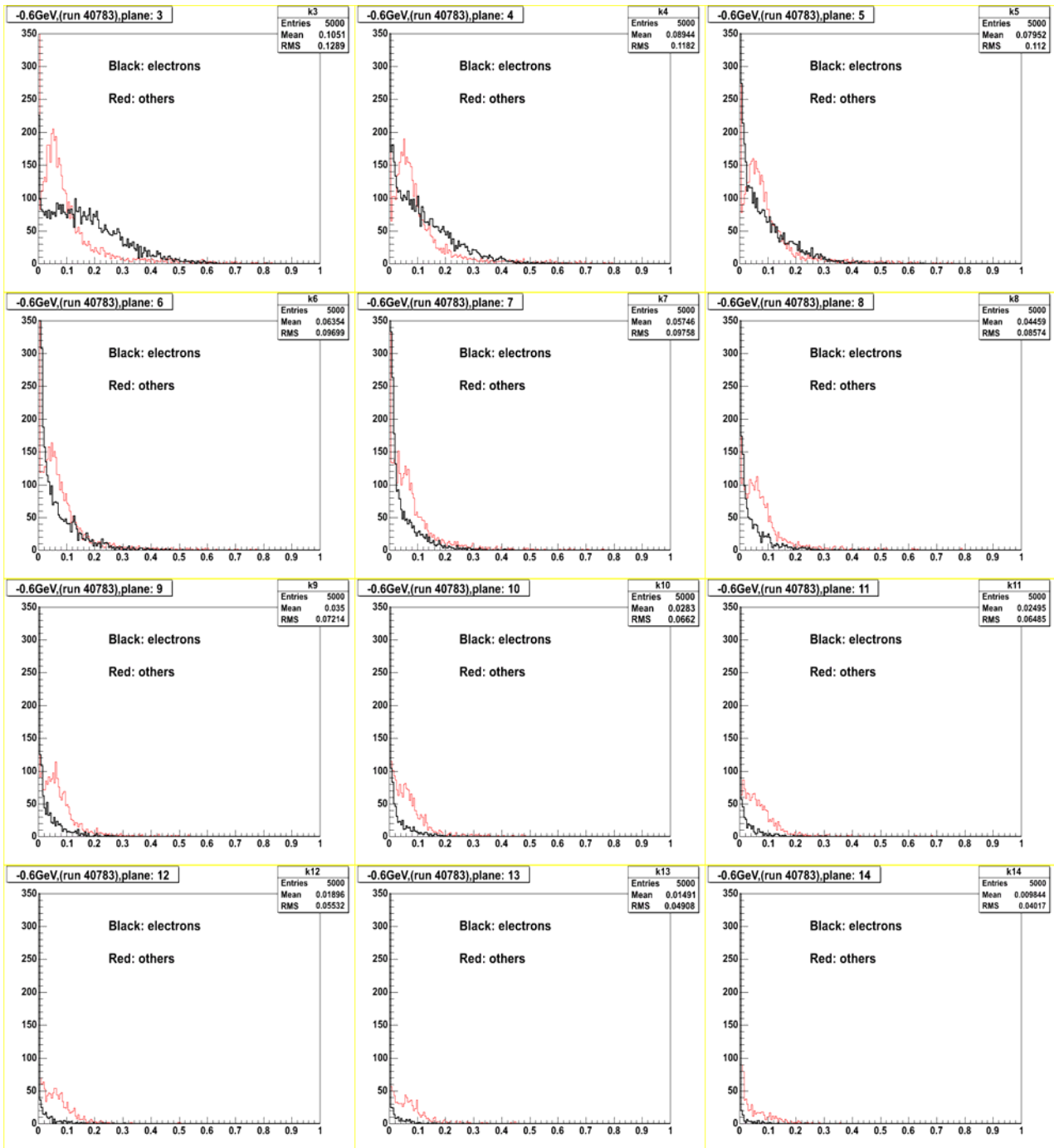
**Εικόνα 3.27α:** Για τη run #40771 (-0.2GeV/c) οι διαχωριστικές μεταβλητές totmip, nhits, maxmip, nhits/nhitplanes, totmip/nhitplanes, strip\_mip[9, ..., 13], plane\_mip[1,2].



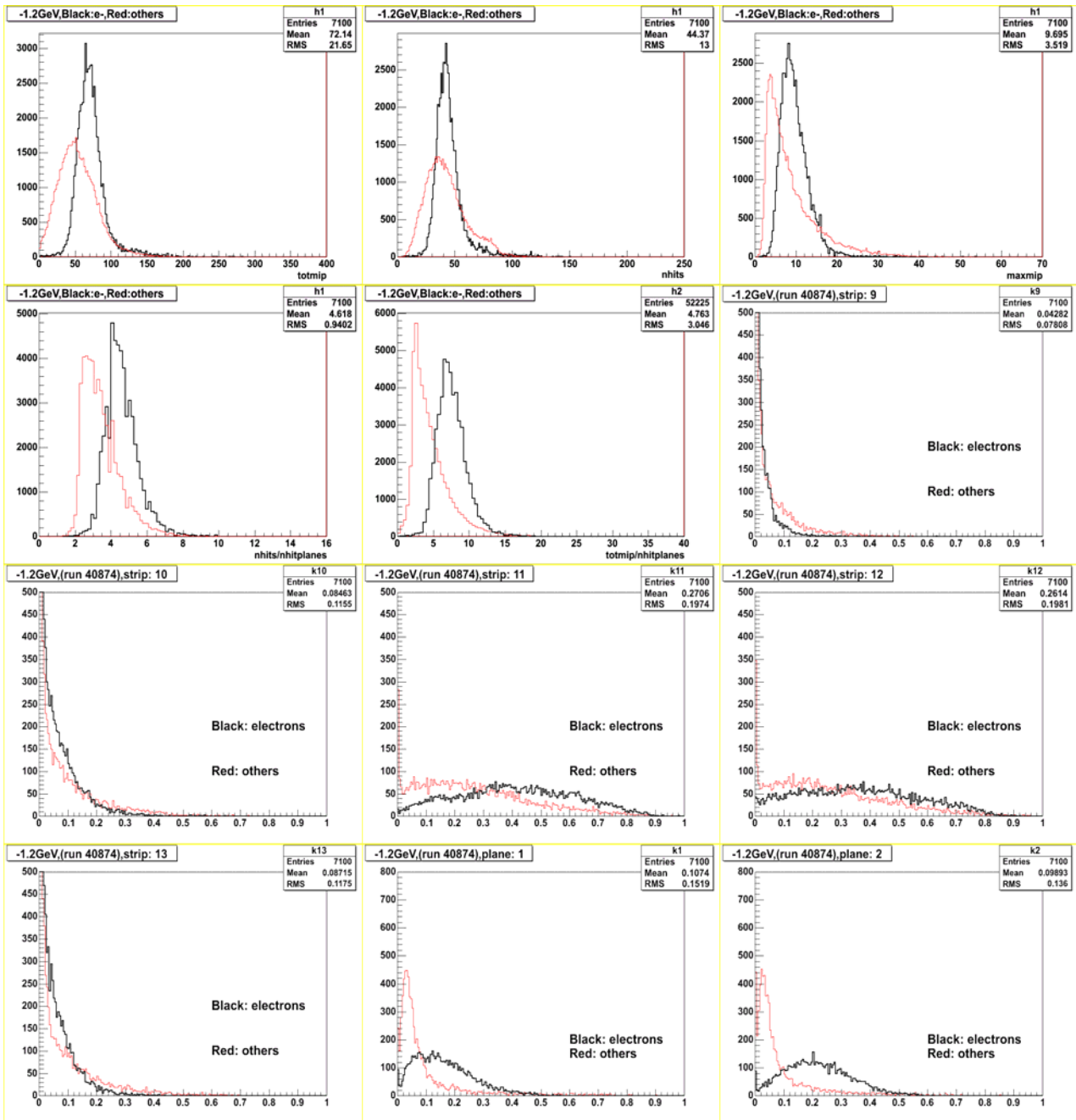
Εικόνα 3.27β: Για τη run #40771 (-0.2GeV/c) οι διαχωριστικές μεταβλητές plane\_mip[3, ..., 14].



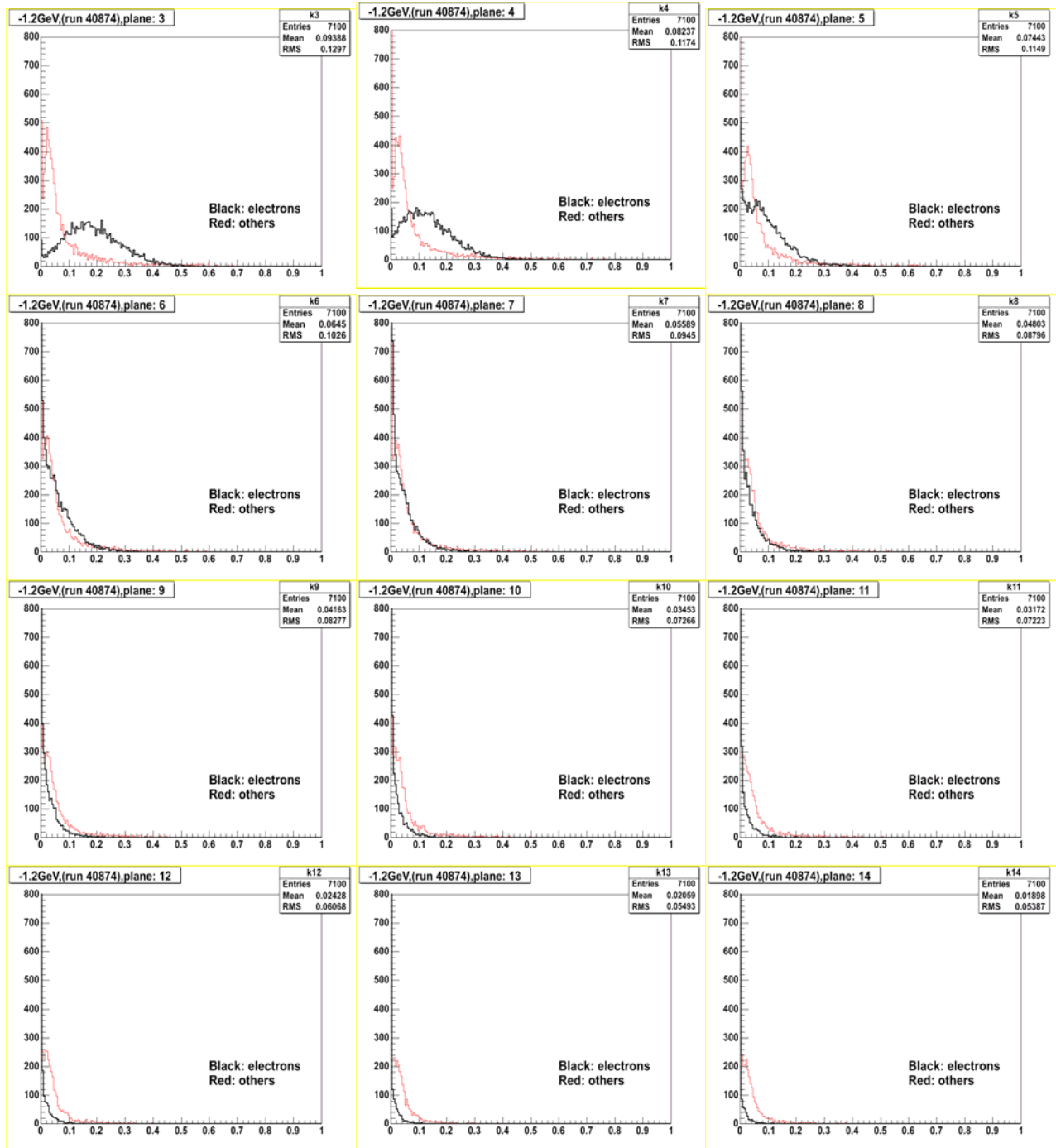
**Εικόνα 3.28α:** Για τη run #40783 (-0.6GeV/c) οι διαχωριστικές μεταβλητές totmip, nhits, maxmip, nhits/nhitplanes, totmip/nhitplanes, strip\_mip[9, ..., 13], plane\_mip[1,2].



Εικόνα 3.28β: Για τη run #40783 (-0.6GeV/c) οι διαχωριστικές μεταβλητές plane\_mip[3, ..., 14].

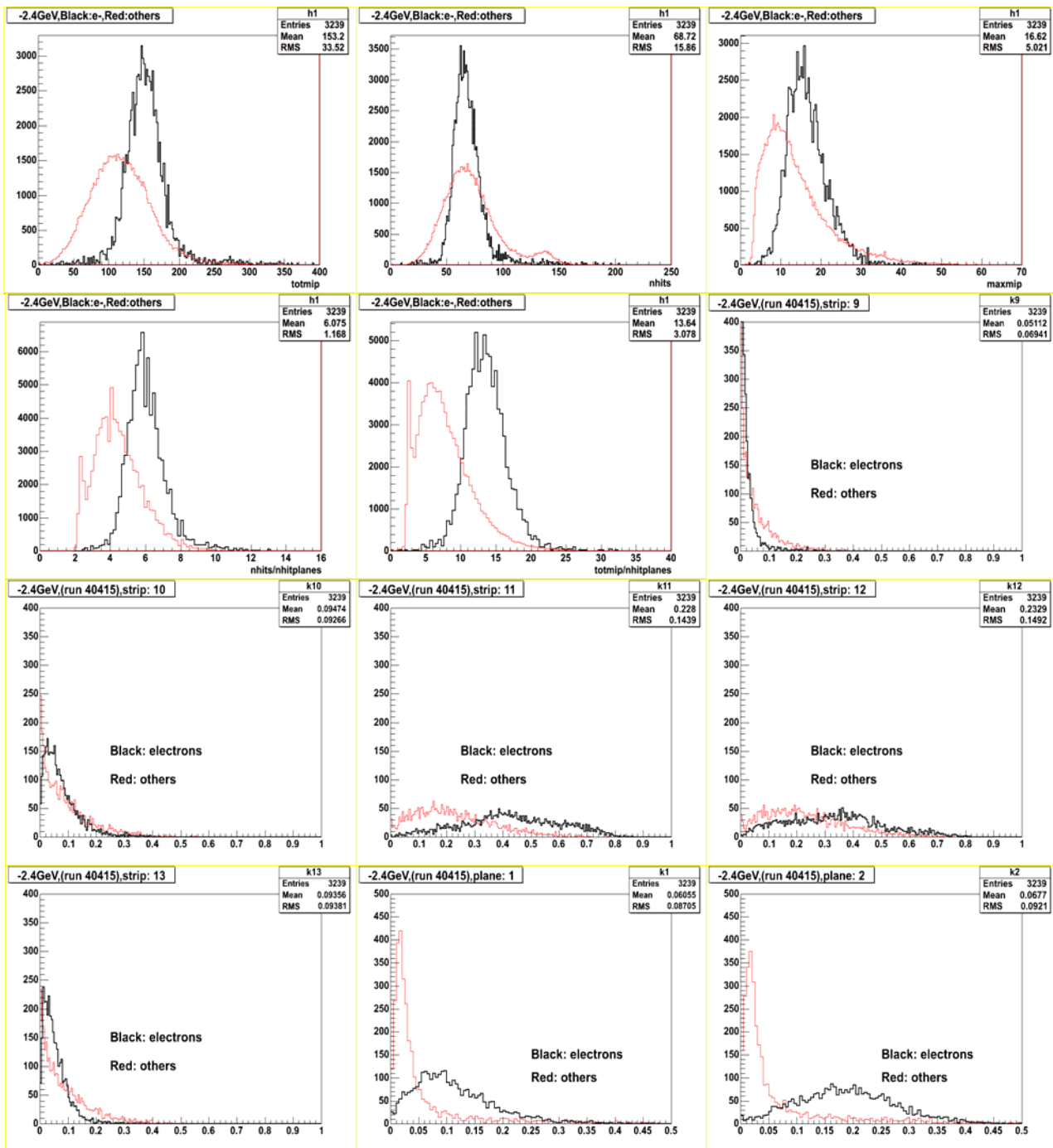


**Εικόνα 3.29α:** Για τη run #40874 (-1.2GeV/c) οι διαχωριστικές μεταβλητές totmip, nhits, maxmip, nhits/nhitplanes, totmip/nhitplanes, strip\_mip[9, ..., 13], plane\_mip[1,2].

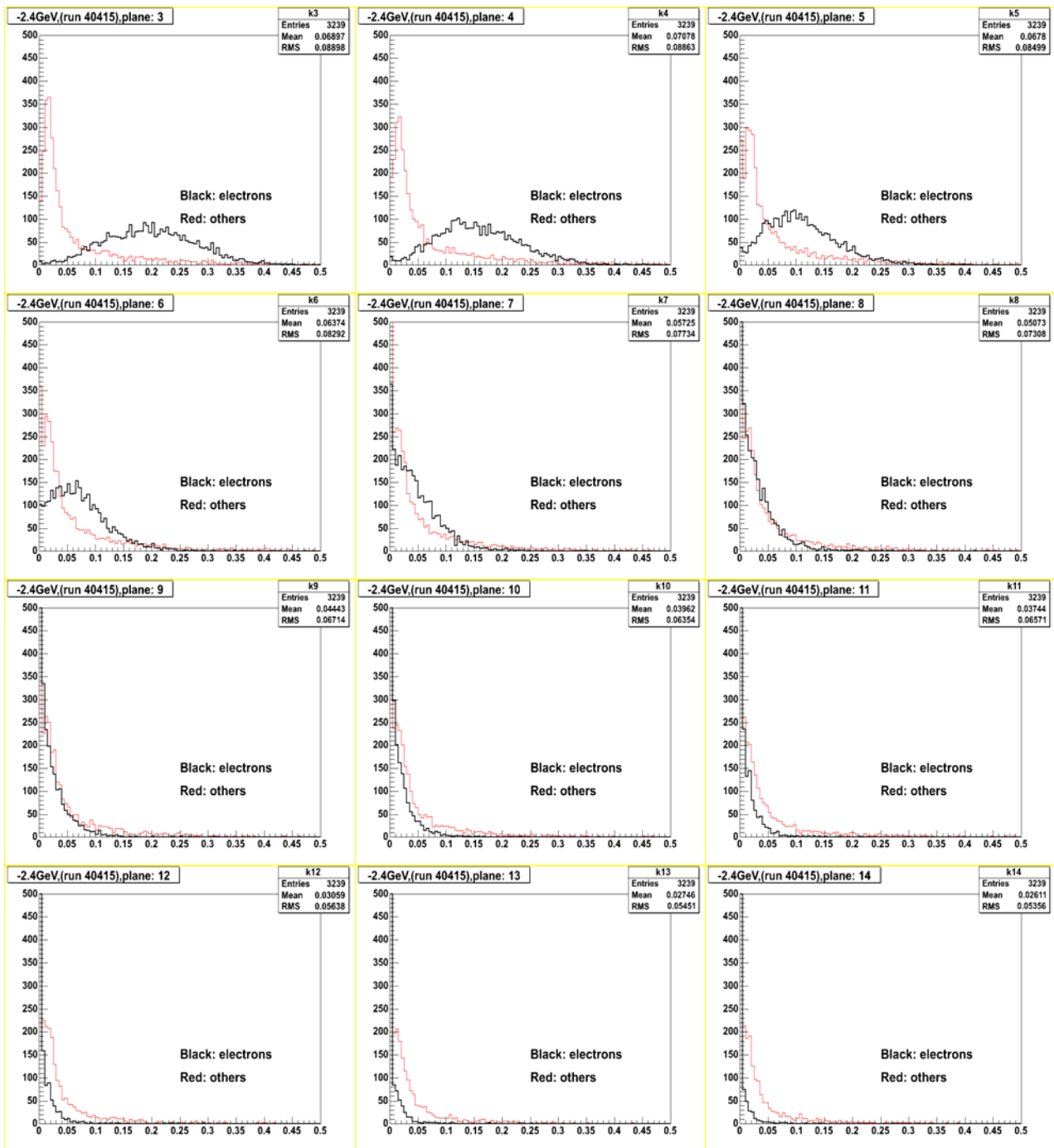


Εικόνα 3.29β: Για τη run #40874 (-1.2GeV/c) οι διαχωριστικές μεταβλητές plane\_mip[3, ..., 14].

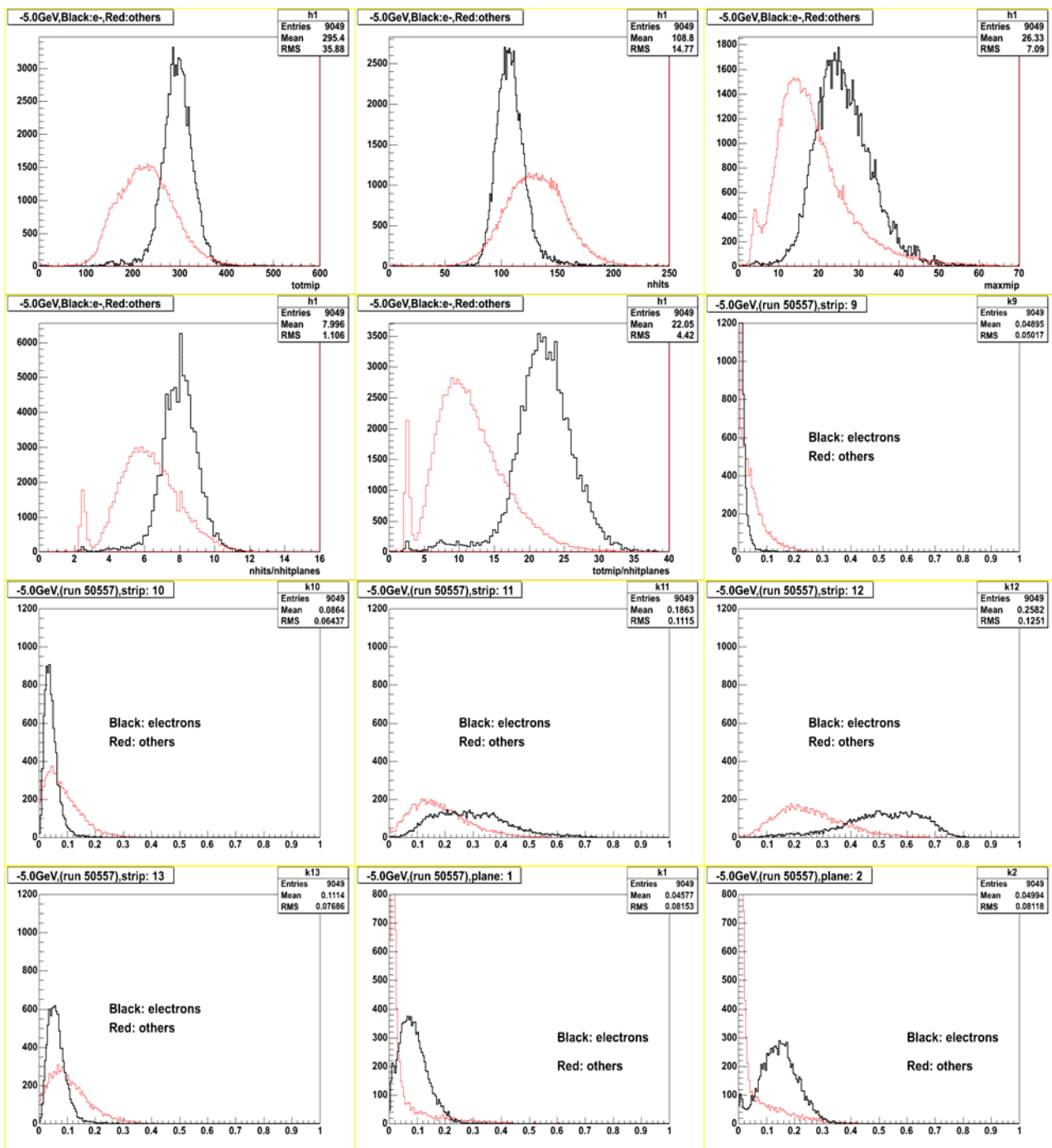




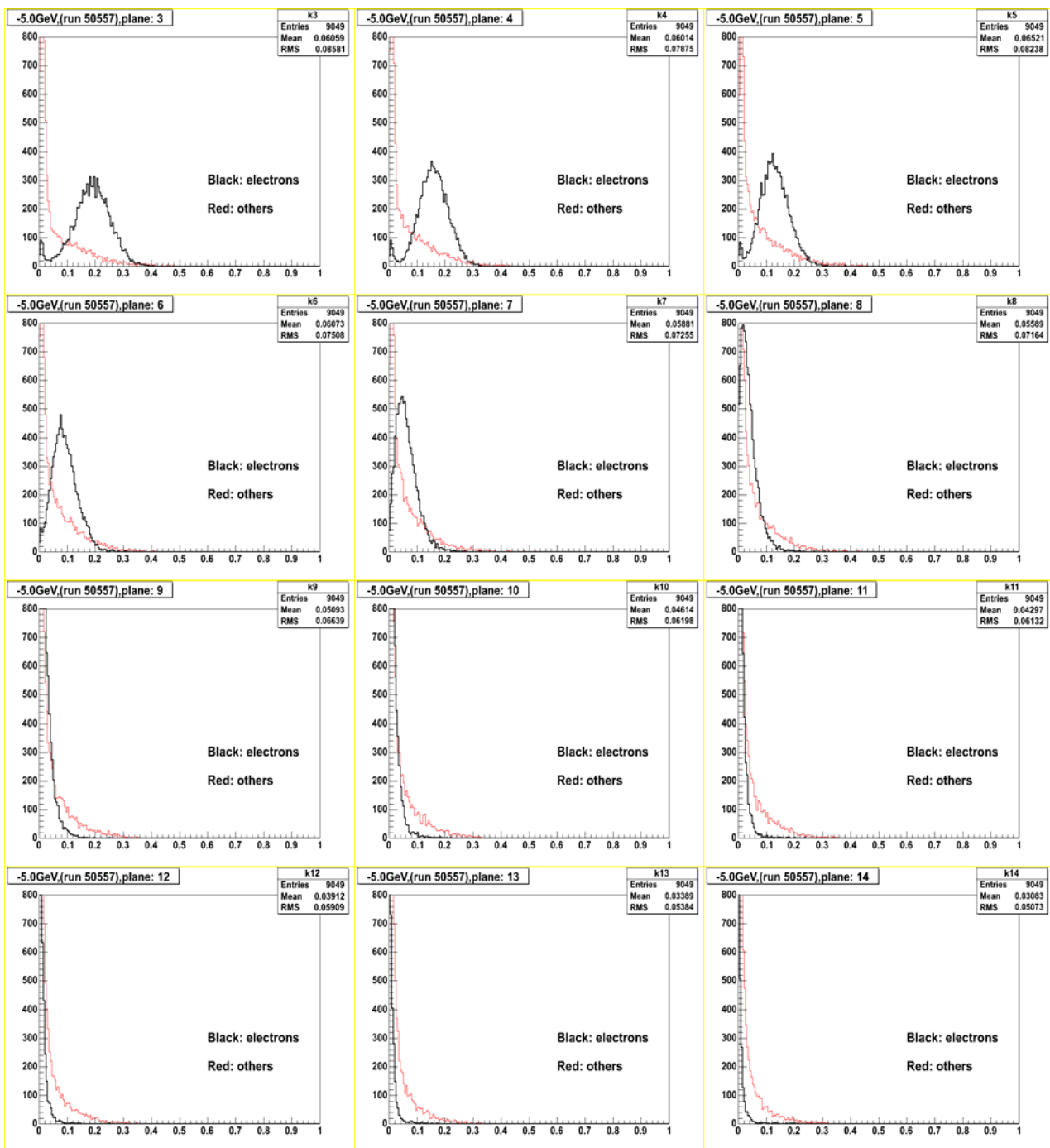
**Εικόνα 3.30α:** Για τη run #40415 (-2.4GeV/c) οι διαχωριστικές μεταβλητές totmip, nhits, maxmip, nhits/nhitplanes, totmip/nhitplanes, strip\_mip[9, ..., 13], plane\_mip[1,2].



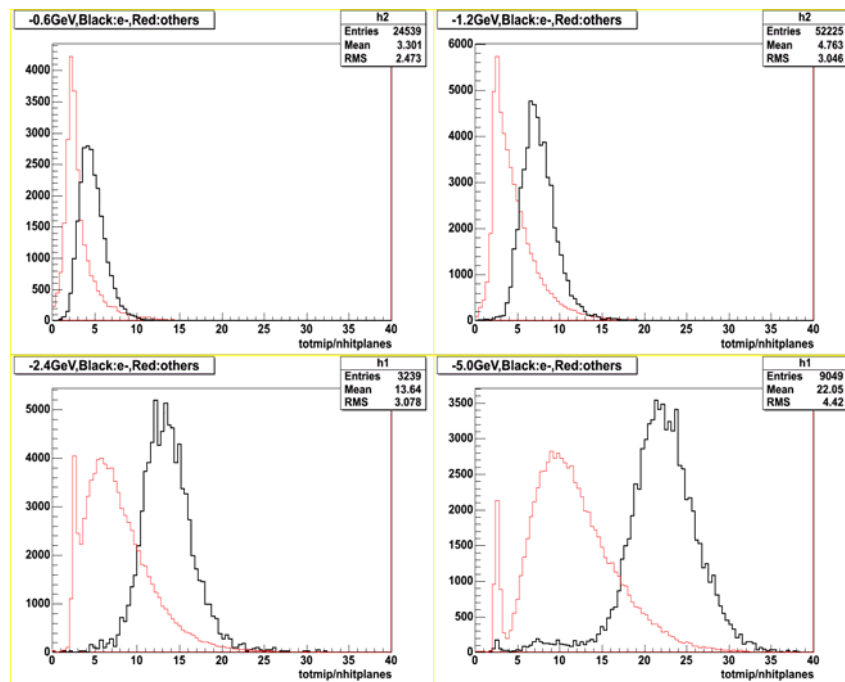
Εικόνα 3.30β: Για τη run #40415 (-2.4GeV/c) οι διαχωριστικές μεταβλητές plane\_mip[3, ..., 14].



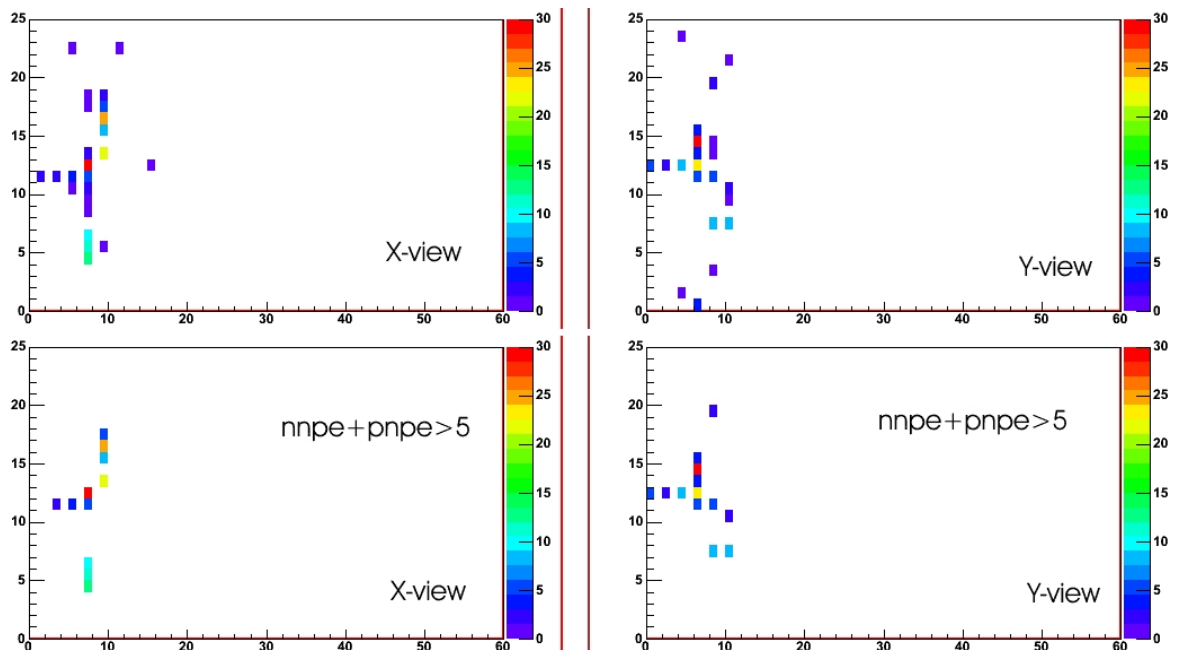
**Εικόνα 3.31α:** Για τη run #50557 (-5.0GeV/c) οι διαχωριστικές μεταβλητές totmip, nhits, maxmip, nhits/nhitplanes, totmip/nhitplanes, strip\_mip[9, ..., 13], plane\_mip[1,2].



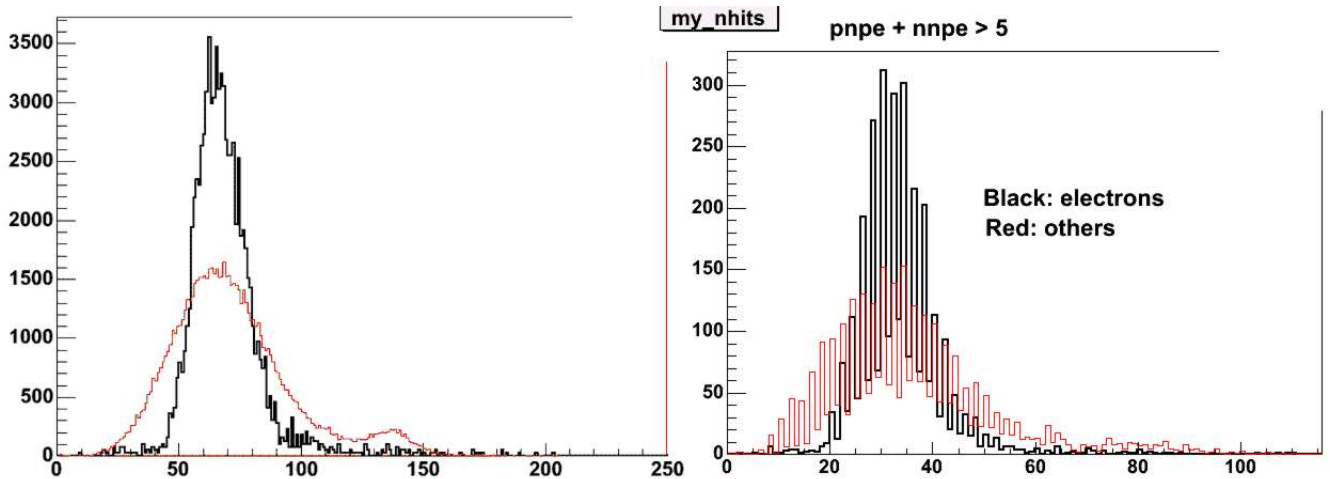
**Εικόνα 3.31β:** Για τη run #50557 (-5.0GeV/c) οι διαχωριστικές μεταβλητές plane\_mip[3, ..., 14].



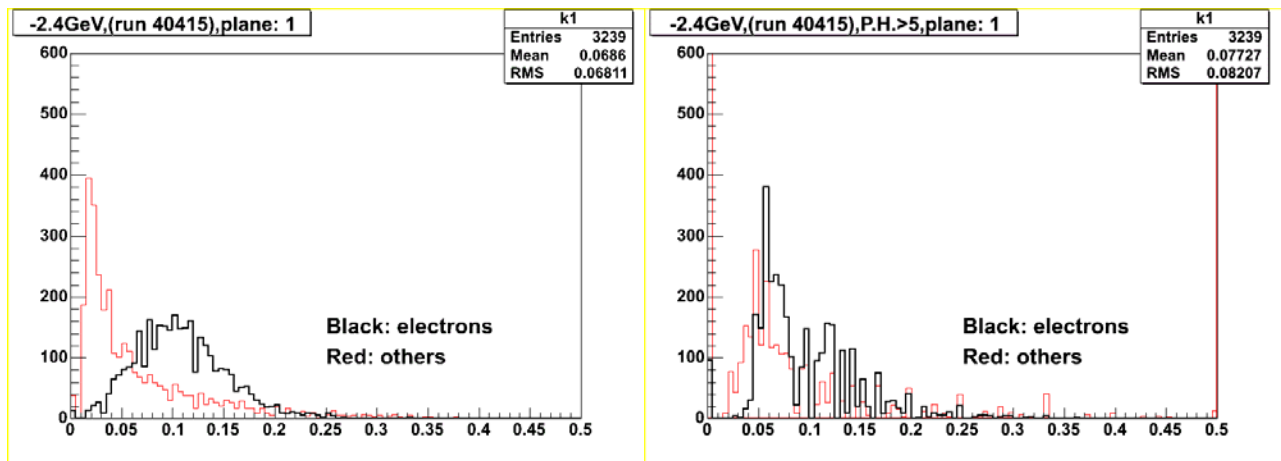
Εικόνα 3.32: Πώς αυξάνεται η διαχωριστικότητα μιας μεταβλητής, της totmip/nhitplanes, καθώς η ενέργεια των ηλεκτρονίων αυξάνεται.



Εικόνα 3.33: Παράδειγμα πιονίου ορμής 2.4 GeV/c και του πώς ξεκαθαρίζει η μορφή του όταν επιβάλουμε cross-talk cut του τύπου  $nhpe + pnpe > 5$ , δηλαδή να δεχόμαστε μόνο τις strips που συνολικά έδωσαν πάνω από 5 φωτοηλεκτρόνια (δηλαδή και απ' τα δύο άκρα συνολικά).



**Εικόνα 3.34:** Η μεταβλητή nhits πριν (αριστερά) και μετά (δεξιά) το cross-talk cut. Η απομάκρυνση του cross-talk αποκαλύπτει την υπεροχή που έχουν οι άρτιοι αριθμοί nhits σε σχέση με τους περιττούς. Επίσης, μειώνει το μέγιστο παρατηρούμενο nhits από 200 περίπου σε 100.



**Εικόνα 3.35:** η μεταβλητή planes[1] πριν (αριστερά) και μετά (δεξιά) την επιβολή του κατωφλίου  $nhpe+nhpe>5$ . Η διαχωριστικότητα μειώθηκε.

## ANNs διαχωρισμού ηλεκτρονίων – μη ηλεκτρονίων

Σε αυτήν την παράγραφο θα περιγράψουμε την έρευνα που κάναμε αναζητώντας νευρωνικά δίκτυα που να διαχωρίζουν όσο γίνεται καλύτερα τα ηλεκτρόνια από τα μη ηλεκτρόνια σε διάφορες ενέργειες. Όπως έχει ήδη εξηγηθεί, χρησιμοποιήσαμε πραγματικές μεταβλητές ως εισόδους στα δίκτυα και τα εφαρμόσαμε σε πραγματικά σύνολα γεγονότων (data sets). Η διερεύνηση που έγινε κινήθηκε σε διάφορες κατευθύνσεις ταυτόχρονα. Συγκεκριμένα, έγιναν πειραματισμοί στα εξής ζητήματα:

1. ποιες μεταβλητές πρέπει να χρησιμοποιηθούν ως σήματα εισόδου.
2. ποια αρχιτεκτονική είναι περισσότερο αποτελεσματική.
3. ποια μέθοδος εκπαίδευσης είναι πιο κατάλληλη όταν η εκπαίδευση μπορεί να γίνει με ίσα ή με άνισα σύνολα σήματος και υποβάθρου.
4. πώς μπορούμε να προβλέψουμε την απόδοση ενός νευρωνικού δικτύου όταν το εφαρμόσουμε σε ένα data set άλλο από αυτό που χρησιμοποιήθηκε για την εκπαίδευση, αλλά του οποίου τη σύσταση γνωρίζουμε ως προς το σήμα και το υπόβαθρο.
5. εάν μπορούμε να πετύχουμε καλύτερα αποτελέσματα εφαρμόζοντας cross-talk cut.

Θα αναφερθούμε σε όλα τα παραπάνω ζητήματα ξεχωριστά, αν και σε αρκετές περιπτώσεις η γνώση που αποκτούσαμε για ένα απ' αυτά επηρέαζε τη μελέτη που κάναμε στα υπόλοιπα, καθώς σχεδόν όλα προχωρούσαν παράλληλα.

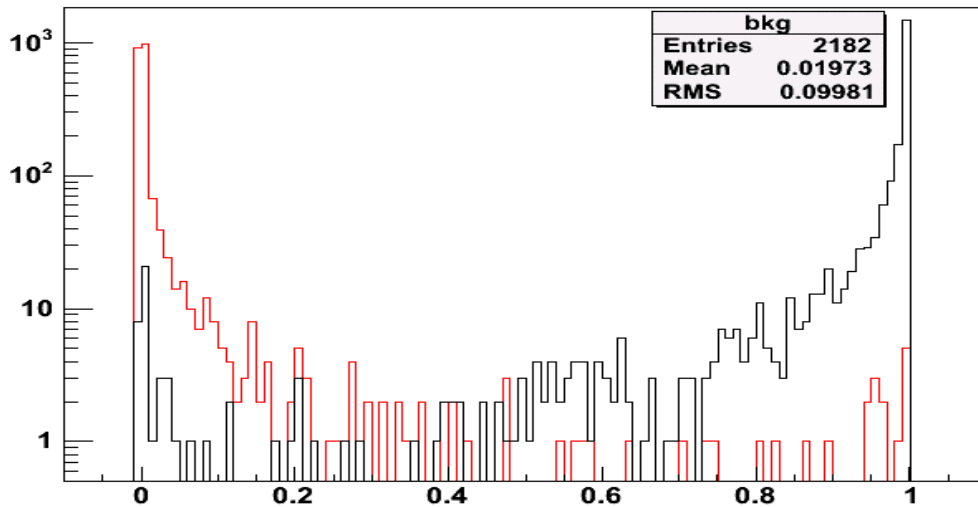
Πρώτα όμως πρέπει να παρουσιασθεί μια συγκεκριμένη ορολογία και παραμετροποίηση της απόδοσης των νευρωνικών δικτύων που μελετήσαμε, ώστε να θεωρείται δεδομένη όταν θα περιγράφουμε την αναζήτηση βελτιωμένων νευρωνικών δικτύων στη συνέχεια.

Όλα τα νευρωνικά δίκτυα που κατασκευάσαμε δίνουν ως έξοδο (output) έναν μόνο αριθμό στο διάστημα  $[0,1]$ . Κατά σύμβαση, θεωρούμε ως σήμα (signal) τα ηλεκτρόνια και ως υπόβαθρο (background) τα μη ηλεκτρόνια, που στην πραγματικότητα τα διαφοροποιούμε βάση του αν έδωσαν Cerenkov ή όχι. Άρα, για ηλεκτρόνια τίθεται  $target=1$ , ενώ για μη ηλεκτρόνια  $target=0$ .

Το βασικότερο διάγραμμα, το οποίο περιγράφει το πόσο καλά ή κακά λειτουργεί ένα νευρωνικό όταν το εφαρμόσουμε σε ένα συγκεκριμένο data set είναι η κατανομή του output για γεγονότα που εμείς γνωρίζουμε ότι ανήκουν στο signal ή στο background. Παράδειγμα τέτοιου διαγράμματος, που για συντομία θα το ονομάζουμε **output-διάγραμμα** είναι αυτό της εικόνας 3.36. Τέτοια διαγράμματα θα εμφανίζονται για όλα τα νευρωνικά που θα μελετήσουμε. Η σύμβαση που χρησιμοποιείται είναι πάντα να σχεδιάζουμε με μαύρη γραμμή την κατανομή του output που δόθηκε εισάγοντας στο νευρωνικό γεγονότα signals (δηλαδή ηλεκτρόνια), ενώ με κόκκινη γραμμή την κατανομή του output του νευρωνικού σε γεγονότα background.

Το ιδανικό νευρωνικό θα ήταν εκείνο το οποίο θα έδινε για όλα τα signals  $output=1$ , ενώ για όλα τα backgrounds  $output=0$ . Φυσικά, αυτό δε μπορεί να επιτευχθεί και ο λόγος είναι ότι όλες οι μεταβλητές εκπαίδευσης έχουν μια περιοχή αλληλεπικάλυψης, δηλαδή δεν είναι καμία 100% διαχωριστική. Επίσης, οφείλεται και στο ότι σωματίδια που υποτίθεται, κρίνοντας από τον Cerenkov, ότι είναι ηλεκτρόνια (ή ότι δεν είναι), στην πραγματικότητα δεν είναι (ή είναι), αλλά πήραμε σήμα Cerenkov (ή δεν πήραμε) για άλλους λόγους. Αυτό είναι μια από τις δυσκολίες που συνεπάγεται η εργασία με πραγματικά data. Εκείνο που προσπαθεί να κάνει η εκπαίδευση είναι να διαμορφώσει το ANN ούτως ώστε να συγκεντρώνεται η κατανομή των outputs των backgrounds όσο γίνεται πιο κοντά στο 0 και η κατανομή των outputs των signals όσο γίνεται πιο κοντά στο 1<sup>4</sup>.

<sup>4</sup> Πρωθύστερα αναφέρω απλώς ότι αυτό ισχύει όταν το training set (βλ. παράρτημα για ANNs) δεν κατακλύζεται από signals ή από backgrounds. Σε αυτό θα γίνει εκτενέστερη αναφορά αργότερα.



Εικόνα 3.36: Παράδειγμα ενός output-διαγράμματος.

Από το output-διάγραμμα προκύπτει το δεύτερο πολύ χαρακτηριστικό διάγραμμα ενός νευρωνικού, το οποίο εν συντομία θα αποκαλούμε **parameters-διάγραμμα**. Σε αυτό (βλ. εικόνα 3.37) εμφανίζονται τρεις παράμετροι που ορίζονται συναρτήσει της λεγομένης **cut**. Η cut είναι το σημείο στο διάστημα  $[0,1]$  που παίζει το ρόλο ότι, εάν η output του ANN λάβει τιμή στο διάστημα  $[0, cut)$  θεωρώ ότι αναγνωρίζεται ένα μη ηλεκτρόνιο, ενώ αν λάβει τιμή στο διάστημα  $[cut, 1]$  θεωρώ ότι αναγνωρίζεται ένα ηλεκτρόνιο. Το πού είναι καλύτερα να τοποθετηθεί η cut ενός νευρωνικού είναι εν μέρει υποκειμενικό, αλλά από αυτό εξαρτώνται οι παράμετροι του ANN που χαρακτηρίζουν την ποιότητά του.

Οι παράμετροι ενός νευρωνικού είναι τρεις, εκ των οποίων δύο είναι περισσότερο σημαντικές: η efficiency, η purity και η contamination που είναι λιγότερο βασική αλλά συμπεριλαμβάνεται κι αυτή στο parameters-διάγραμμα για λόγους πληρότητας. Οι ορισμοί τους είναι:

$$\text{efficiency} = \frac{S_c}{S}, \text{ purity} = \frac{S_c}{S_c + B_c}, \text{ contamination} = \frac{B_c}{B} \quad (3.14)$$

όπου  $S$ =σύνολο signal events,  $S_c$ =πλήθος signal events με output στο  $[cut,1]$

$B$ =σύνολο backgrounds,  $B_c$ =πλήθος backgrounds με output στο  $[cut,1]$

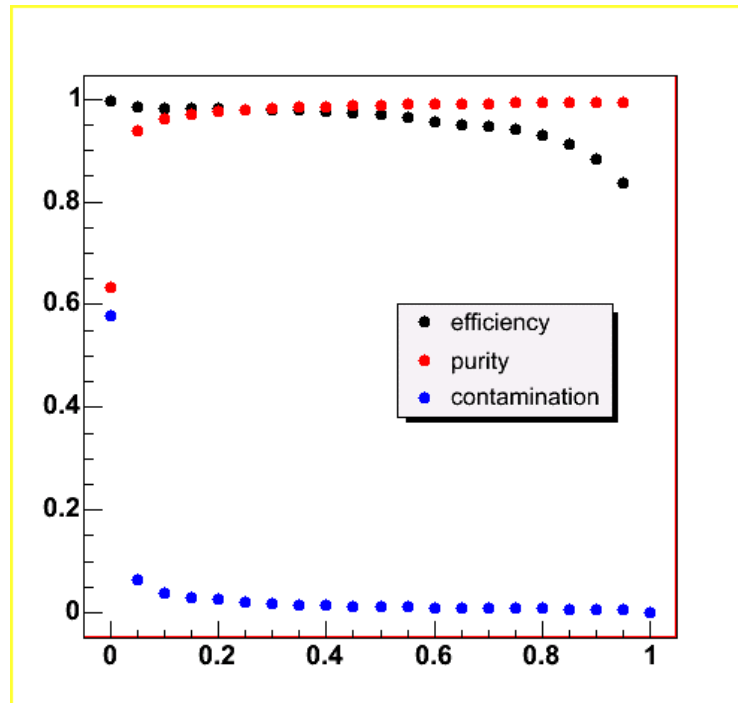
Η efficiency εκφράζει το ποσοστό των signals που ξεπερνούν την cut και ορθώς εκλαμβάνονται ως signals. Όσο πιο κοντά στο 1 είναι, τόσο καλύτερα. Η purity εκφράζει το πόσο απαλλαγμένο από backgrounds είναι το σύνολο των γεγονότων που εκλαμβάνονται σαν signals. Αν  $B_c=0$  τότε το purity είναι 1 και δεν έχει γίνει καμία λάθος αναγνώριση κάποιου background event σαν signal. Η contamination εκφράζει το ποσοστό των backgrounds που εσφαλμένα εκλαμβάνονται σαν signals, λόγω του ότι το output γι' αυτά ξεπερνά την cut. Όσο πιο μικρή είναι η contamination τόσο καλύτερη αναγνώριση του background έχουμε.

Υπάρχουν διάφορα σκεπτικά με τα οποία αποφασίζει κανείς που να θέσει την cut, έχοντας μπροστά του το parameters-διάγραμμα. Αν τον ενδιαφέρει να εξασφαλίσει πολύ μεγάλη efficiency, τότε είναι καλύτερα να θέσει το cut πιο κοντά στο 0, ενώ αν θέλει μεγάλη καθαρότητα πιο κοντά στο 1. Όμως, το ιδανικό είναι να συγκεράζονται και οι δύο αυτές καλές ιδιότητες. Προκειμένου να χρησιμοποιηθεί κάποιο αντικειμενικότερο μέτρο του πού συνίσταται να τεθεί η cut, εισάγουμε το μέγεθος efficiency-purity, το οποίο φυσικά είναι κι αυτό συνάρτηση της cut, και προτιμούμε να θέτουμε την cut εκεί όπου αυτό το γινόμενο μεγιστοποιείται. Για συντομία, ονομάζουμε το διάγραμμα αυτού του γινομένου **area-διάγραμμα**<sup>5</sup> και

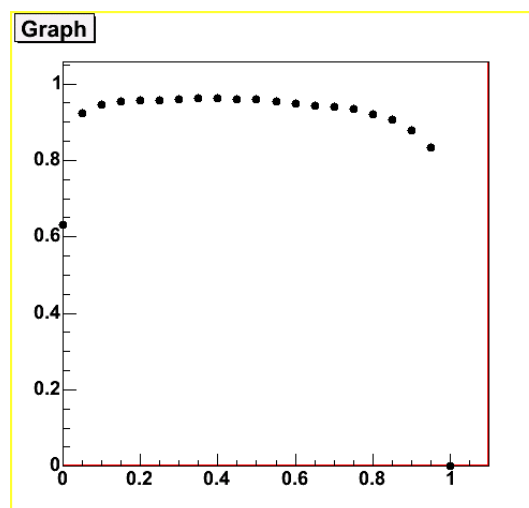
<sup>5</sup> Η λέξη area(=εμβαδόν) είναι σύντομη και συνειρμικά θυμίζει ότι πρόκειται για γινόμενο δύο μεγεθών. Δεν υπάρχει άλλος ιδιαίτερος λόγος που την επέλεξα.



ένα παράδειγμα φαίνεται στην εικόνα 3.38. Σε πολλές περιπτώσεις, όπως και στην εικόνα 3.38, το γινόμενο purity·efficiency εμφανίζει ένα πλατό όπου λαμβάνει τη μέγιστη τιμή του, οπότε εντός του πλατό επιλέγουμε μια cut, αναλόγως εάν δίνουμε μεγαλύτερη σημασία στην efficiency ή στην purity.



**Εικόνα 3.37:** Παράδειγμα parameters-διαγράμματος. Πάντα, στον οριζόντιο άξονα βρίσκεται η θέση της cut. Αναφέρεται στο ίδιο ANN όπου αναφέρεται και η εικόνα 3.36.



**Εικόνα 3.38:** Παράδειγμα ενός area-διαγράμματος. Στον οριζόντιο άξονα πάντα βρίσκεται η θέση της cut. Αναφέρεται στο ίδιο ANN όπου αναφέρονται και οι εικόνες 3.36 και 3.37.

## 1. ποιες μεταβλητές να χρησιμοποιηθούν ως σήματα εισόδου

Αφού παρουσιάσαμε τις συμβάσεις που χρησιμοποιήσαμε στη χρήση των νευρωνικών δικτύων, προχωρούμε στο πρώτο ζήτημα που τίθεται και αφορά στην επιλογή μεταβλητών προς εισαγωγή στα ANNs. Σε αυτό του ζήτημα αναφέρθηκε και η προηγούμενη παράγραφος που ήταν αφιερωμένη στη διαχωριστικότητα των μεταβλητών. Εδώ θα αναλύσουμε περισσότερο τη λογική με την οποία καταλήξαμε στην επιλογή συγκεκριμένων μεταβλητών.

Βασικός περιορισμός είναι ότι δεν επιτρέπεται να χρησιμοποιήσουμε όλες τις διαθέσιμες διαχωριστικές μεταβλητές, διότι τότε το νευρωνικό θα είχε υπερβολικά πολλές εισόδους και επομένως πάρα πολλά βάρη και θα απαιτούνταν τεράστια training sets για να το εκπαιδεύσουμε.

Από τις πρώτες 11 μεταβλητές του πίνακα 3.9 χρησιμοποιήσαμε μόνο 5: totmip, maxmip, nhits, nhits/nhitplanes, totmip/nhitplanes. Ο λόγος είναι ότι αυτές ήταν περισσότερο διαχωριστικές από τις υπόλοιπες στις περισσότερες ενέργειες. Δεν ήταν όλες εξίσου διαχωριστικές σε όλες τις ενέργειες, αλλά ακόμα και στην πιο δυσμενή περίπτωση, των 0.2 GeV, όπου ο διαχωρισμός γίνεται πολύ δύσκολα (βλ. εικόνες 3.27α και 3.27β), μεταξύ αυτών υπήρχε τουλάχιστον μια (η nhits) που διαχώριζε κάπως τα ηλεκτρόνια από τα υπόλοιπα. Στις υψηλότερες ενέργειες ήταν οι περισσότερες από αυτές αρκετά διαχωριστικές.

Μεταξύ των μεταβλητών strips\_mip[i] και strips[i] (βλ. πίνακα 3.9) προτιμήσαμε τις πρώτες, διότι είναι περισσότερο ανεπηρέαστες από το φαινόμενο του cross-talk. Ο λόγος είναι ότι κατά το cross-talk εμφανίζονται δήθεν χτυπημένες strips, οπότε αλλάζει δραστικά η κατανομή των hits στις διάφορες strips και στα διάφορα planes, αλλά αυτές οι παραπλανητικές strips συνήθως «κλέβουν» μικρά ποσά ενέργειας από τις γειτονικές οπτικές ίνες και έτσι δε βαρύνουν ιδιαίτερα στο πώς κατανέμεται η ενέργεια του γεγονότος. Με το ίδιο σκεπτικό προτιμήσαμε να χρησιμοποιήσουμε τις planes\_mip[i] αντί για τις planes[i].

Μεταξύ των 60 μεταβλητών planes\_mip[0, 1, ..., 59] χρησιμοποιήσαμε μόνο τις 15: planes\_mip[1,2,...,15]. Ο λόγος που απορρίψαμε την πρώτη (planes\_mip[0]) είναι ότι αναφέρεται στο πρώτο επίπεδο που συναντά η δέσμη εισερχόμενη στον ανιχνευτή, οπότε εκεί υπάρχει πολλή θόρυβος και συστηματικά σφάλματα, οπότε δεν εμπιστευόμαστε τις μετρήσεις που παίρνουμε απ' αυτό, ενώ στα επόμενα επίπεδα τα σήματα είναι πιο καθαρά. Θα ήταν πολύ αντι-οικονομικό όπως είπαμε να χρησιμοποιήσουμε και τις 59 υπόλοιπες μεταβλητές, γι' αυτό σταματάμε στο 16<sup>ο</sup> επίπεδο, δηλαδή στην planes\_mip[15]. Ο λόγος είναι ότι μέσα στα πρώτα 16 επίπεδα τα αδρόνια (πιόνια, πρωτόνια) θα έχουν αλληλεπιδράσει στη μεγάλη τους πλειονότητα και θα έχουν δώσει δείγματα της ταυτότητάς τους. Αυτό το εκτιμούμε από γεγονός ότι ο σίδηρος έχει μέσο interaction length 131.9 g/cm<sup>2</sup> και πυκνότητα 7.87 g/cm<sup>3</sup>, οπότε έχουμε interaction length που αντιστοιχεί σε απόσταση 131.9 / 7.87 = 16.76 cm. Κάθε επίπεδο σιδήρου έχει πάχος 2.54 cm, οπότε τα 16 επίπεδα ισοδυναμούν με 2.42 interaction lengths, που σημαίνει ότι μόνο  $e^{-2.42} = 8.85\%$  των αδρονίων δε θα έχει αλληλεπιδράσει ισχυρά μέχρι αυτό το βάθος.

Μεταξύ των 24 μεταβλητών strips\_mip[0,...,23] χρησιμοποιήσαμε μόνο τις 5 μεταβλητές που αναφέρονται στην κεντρική περιοχή του ανιχνευτή, στις strips\_mip[9,...,13]. Η δέσμη συναντά τον ανιχνευτή στο κέντρο του, οπότε περιμένουμε ότι θα έχουμε διαφοροποιό συμπεριφορά μέσα σε 20.8 cm εγκάρσιας απόστασης που αντιστοιχούν σε 5 strips.

Σημαντικότερη είναι η κανονικοποίηση (normalization) που γίνεται σε όλες τις μεταβλητές πριν εισαχθούν στο ANN. Δηλαδή, βλέπουμε ποια περίπου είναι η μέγιστη τιμή που λαμβάνει κάθε μεταβλητή και διαιρούμε πάντα αυτήν με τη μέγιστη τιμή που μπορεί να λάβει. Έτσι, απεικονίζουμε γραμμικά όλες τις τιμές όλων των μεταβλητών στο διάστημα [0,1]. Αυτό είναι σημαντικό, διότι η σιγμοειδής activation function που χρησιμοποιούν οι νευρώνες (βλ. παράρτημα) παρουσιάζουν κορεσμό για ορίσματα πάνω απ' το 1, οπότε οι μεγαλύτεροι αριθμοί θα προκαλούσαν όλοι την ίδια έξοδο από τον νευρώνα, δηλαδή θα είχαμε απώλεια πληροφορίας.

*Σύνοψη:* Έχοντας κάνει διάφορες δοκιμές με ποικιλία μεταβλητών, αποφασίσαμε να χρησιμοποιούμε για όλες τις ενέργειες τις εξής 25 μεταβλητές εισόδου: **totmip, nhits, maxmip, nhits/nhitplanes, totmip/nhitplanes, planes\_mip[1,...,15], strips\_mip[9,...,13]**.

## 2. Ποια αρχιτεκτονική είναι προτιμότερη

Το δεύτερο ζήτημα, αφού έχουμε καταλήξει στις μεταβλητές εισόδου που θα χρησιμοποιήσουμε, είναι το ποια είναι η προτιμότερη αρχιτεκτονική για το ANN. Απ' αυτού κάναμε πολλές δοκιμές. Βεβαίως, κοινό χαρακτηριστικό πλέον είναι ότι το επίπεδο εισόδου περιλαμβάνει 25 νευρώνες και το επίπεδο εξόδου έναν. Επίσης, κοινό χαρακτηριστικό είναι το full connection, δηλαδή ότι υπάρχουν συνδέσεις από όλους τους νευρώνες ενός επιπέδου (layer) προς όλους τους νευρώνες του αμέσως επόμενου επιπέδου. Κάναμε μια δοκιμή να εκπαιδεύσουμε ένα ANN όπου δεν εφαρμόστηκε full connection, αλλά επιλεκτικές συνδέσεις, αλλά το αποτέλεσμα ήταν χειρότερο.

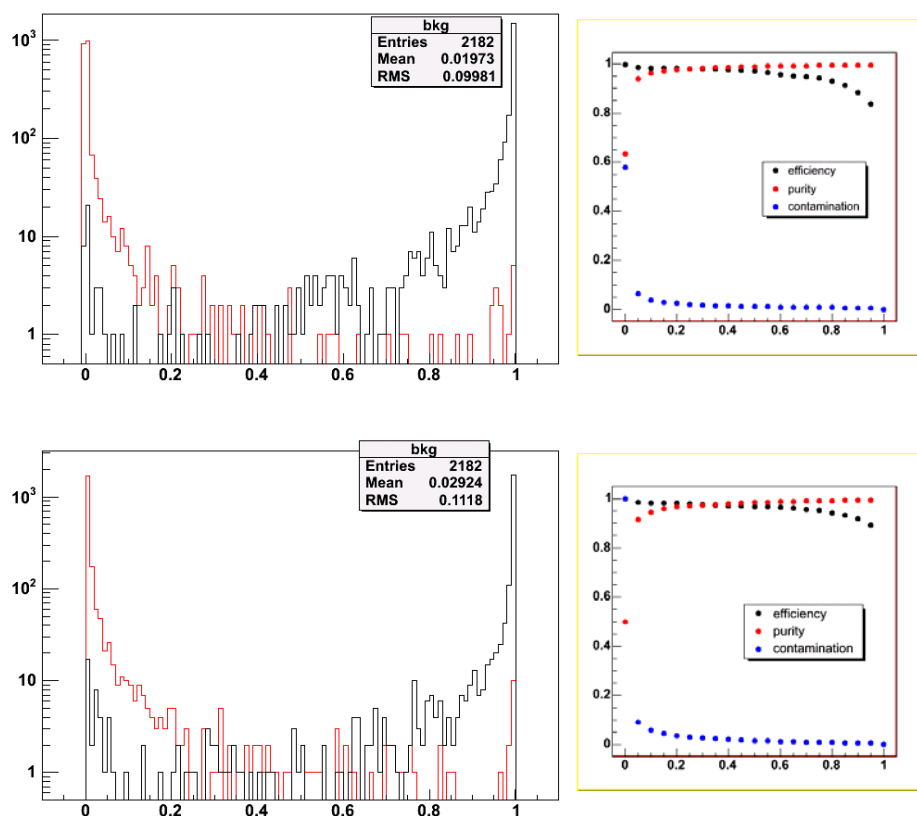
Δυστυχώς δεν υπάρχει σχεδόν κανένας λόγος που να ευνοεί θεωρητικά την επιλογή μιας αρχιτεκτονικής έναντι μιας άλλης. Το μόνο που κρατάμε υπ' όψιν μας είναι ότι είναι καλή η οικονομία στους ενδιάμεσους (hidden) νευρώνες, διότι εάν υπερβάλλουμε τοποθετώντας πάρα πολλούς ενδιάμεσους νευρώνες θα έχουμε το ίδιο πρόβλημα που θα είχαμε κι αν χρησιμοποιούσαμε πάρα πολλές μεταβλητές εισόδου· δε θα αρκούσαν τα διαθέσιμα training sets για την επαρκή εκπαίδευση.

Δύο είναι οι αρχιτεκτονικές με τις οποίες πειραματιστήκαμε περισσότερο. Η αρχιτεκτονική #1: 25→30→1, που σημαίνει 25 νευρώνες στο επίπεδο εισόδου, ένα hidden επίπεδο με 30 νευρώνες και ένα επίπεδο εξόδου με έναν, και η αρχιτεκτονική #2: 25→10→5→1, που περιλαμβάνει δύο hidden επίπεδα με 10 και 5 νευρώνες. Κάναμε και δοκιμές με τρία hidden επίπεδα, αλλά δεν είδαμε καμία σταθερή βελτίωση.

Στην εικόνα 3.39 βλέπουμε το output- και το parameters-διάγραμμα ενός νευρωνικού που είχε την αρχιτεκτονική #1 και ενός που είχε την #2. Η διαφορά είναι πολύ μικρή και έχει δύο όψεις: Η αρχιτεκτονική #1 δίνει ελαφρώς καλύτερη συγκέντρωση του background στο 0, οπότε ελάχιστα υψηλότερη purity, ενώ η αρχιτεκτονική #2 δίνει ελάχιστα καλύτερη efficiency, συγκεντρώνοντας τα signals πιο κοντά στο 1. Το συγκεκριμένο δίκτυο αφορούσε σε ενέργεια 2.4 GeV και εκπαιδεύτηκε και στις δύο περιπτώσεις με το ίδιο training set, που περιελάμβανε ίσο αριθμό signals και backgrounds. Δεν είναι εύκολο να χαρακτηρίσουμε τη μια αρχιτεκτονική καλύτερη από την άλλη. Σε καμία ενέργεια δεν παρουσιάζεται έντονη υπεροχή της μίας ή της άλλης.

Πρέπει να θυμόμαστε, όμως, ότι το να συγκρίνουμε δύο νευρωνικά δίκτυα και να προσπαθούμε έτσι να δούμε ποιο χαρακτηριστικό τα βελτιώνει δεν είναι απόλυτα σωστό. Ποτέ οι καμπύλες εκπαίδευσής τους δεν είναι ολόιδιες. Ακόμα και το ίδιο ακριβώς νευρωνικό αν επανεκπαιδευτεί θα διαφέρει λίγο από την προηγούμενη εικόνα του, διότι σε κάθε εκπαίδευση το training set ανακατεύεται (shuffle) με τυχαίο τρόπο, οπότε οι τιμές που παίρνουν τα βάρη στον παραμετρικό χώρο ακολουθούν διαφορετική τροχιά και δεν καταλήγουν ποτέ στο ίδιο τελικό σημείο.

Η διαφοροποίηση που προκαλεί η αρχιτεκτονική #1 σε σχέση με την αρχιτεκτονική #2 είναι τόσο μικρή που θα μπορούσε να παρατηρηθεί και μεταξύ διαδοχικών εκπαίδευσων με την ίδια αρχιτεκτονική. Παρ' όλα αυτά θα προτιμήσουμε να χρησιμοποιούμε την #2, διότι εκπαιδεύεται πιο γρήγορα. Αυτό οφείλεται στο ότι έχει λιγότερες παραμέτρους ( $25 \cdot 10 + 10 \cdot 5 + 5 \cdot 1 = 305$  έναντι των  $25 \cdot 30 + 30 \cdot 1 = 780$  που έχει η #1), γεγονός που έχει κι άλλο ένα καλό, το ότι με τον ίδιο πληθυσμό στο training set μπορούμε να κάνουμε καλύτερη εκπαίδευση, δηλαδή να πετύχουμε ευκρινέστερο minimum στην καμπύλη του test set (βλ. παράρτημα, validation set).



**Εικόνα 3.39:** Το output- και το parameters-διάγραμμα ενός ANN που εκπαιδεύεται με την αρχιτεκτονική #1 (πάνω) και με την αρχιτεκτονική #2 (κάτω).

### 3. Ίσα ή άνισα signals και backgrounds στην εκπαίδευση

Ένα σοβαρό ζήτημα που μας απασχόλησε είναι εάν πρέπει να εκπαιδεύουμε το δίκτυο παρέχοντάς του ίσα ή άνισα παραδείγματα signal και background, δηλαδή ηλεκτρονίων και μη ηλεκτρονίων. Ο λόγος που μας απασχόλησε αυτό είναι ότι τα πραγματικά data που χρησιμοποιήσαμε δεν περιείχαν ίσους τέτοιους πληθυσμούς και συνήθως η δυσαναλογία ήταν πολύ μεγάλη. Δεν υπάρχει αμφιβολία ότι όσο περισσότερα παραδείγματα από το κάθε είδος χρησιμοποιήσουμε τόσο καλύτερο θα γίνει το ANN, αποκτώντας μεγαλύτερη «εμπειρία», αλλά το ζήτημα τίθεται στη σχέση που ενδείκνυται να έχουν οι δύο πληθυσμοί μεταξύ τους.

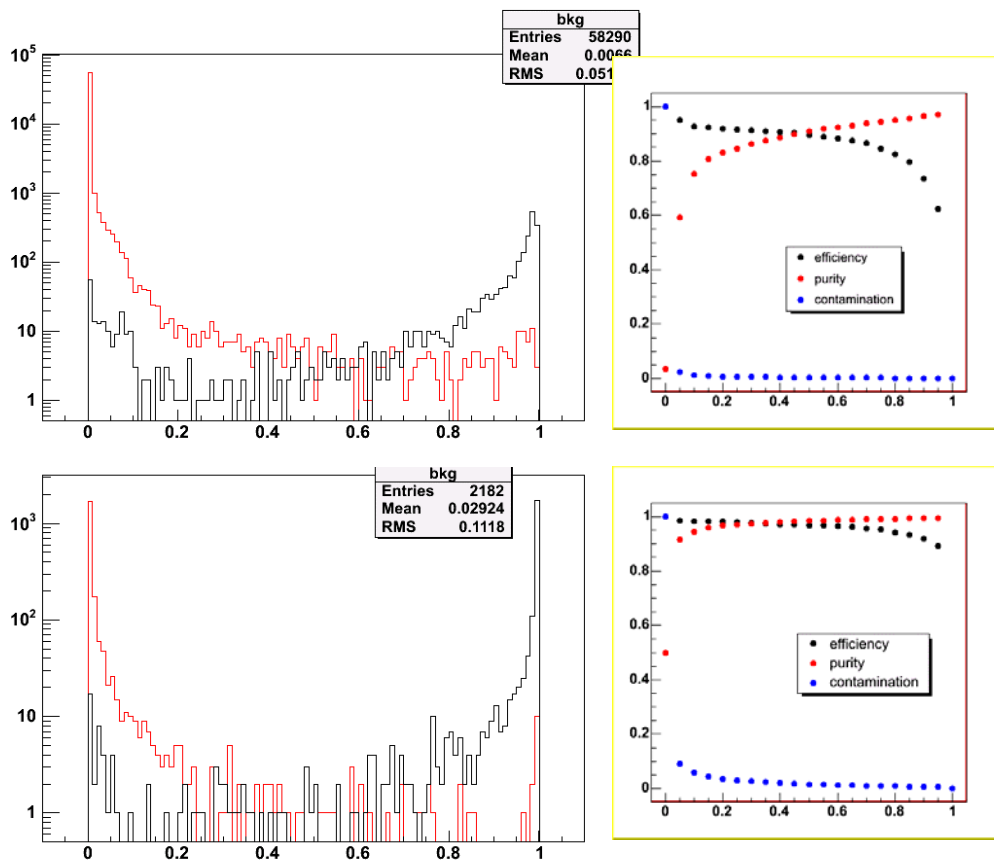
Θα μπορούσε κανείς να παρασυρθεί από τον τρόπο με τον οποίο μαθαίνει ο άνθρωπος και να νομίζει ότι αρκεί να δείξουμε πολλά signals ή πολλά backgrounds μόνο και έτσι, δια της μεθόδου του αποκλεισμού, το δίκτυο θα μπορεί να ξεχωρίζει και τη μειονοτική ποικιλία. Για παράδειγμα, ένας Εσκιμώος που έχει δει στη ζωή του μόνο λευκούς ανθρώπους, αν δει έστω και έναν Αφρικανό, ξέρει πια να ξεχωρίζει τους Αφρικανούς από τους Εσκιμώους. Δυστυχώς, τα τεχνητά νευρωνικά δίκτυα δε λειτουργούν με εξίσου θαυμάσιο τρόπο.

Κατά την εκπαίδευση ο αλγόριθμος backpropagation προσπαθεί να ελαχιστοποιήσει το μέσο σφάλμα επί ολόκληρου του epoch. Δηλαδή, αρχίζει να βλέπει ένα προς ένα τα παραδείγματα (patterns) του training set και μετά από το καθένα που βλέπει κάνει μια μικρή διόρθωση στα βάρη του. Θυμάται το error που έδωσε το κάθε pattern του training set και όταν ολοκληρωθεί το training set, δηλαδή κλείσει μια epoch, υπολογίζει το Mean Square Error:  $MSE = \langle error^2 \rangle$ .

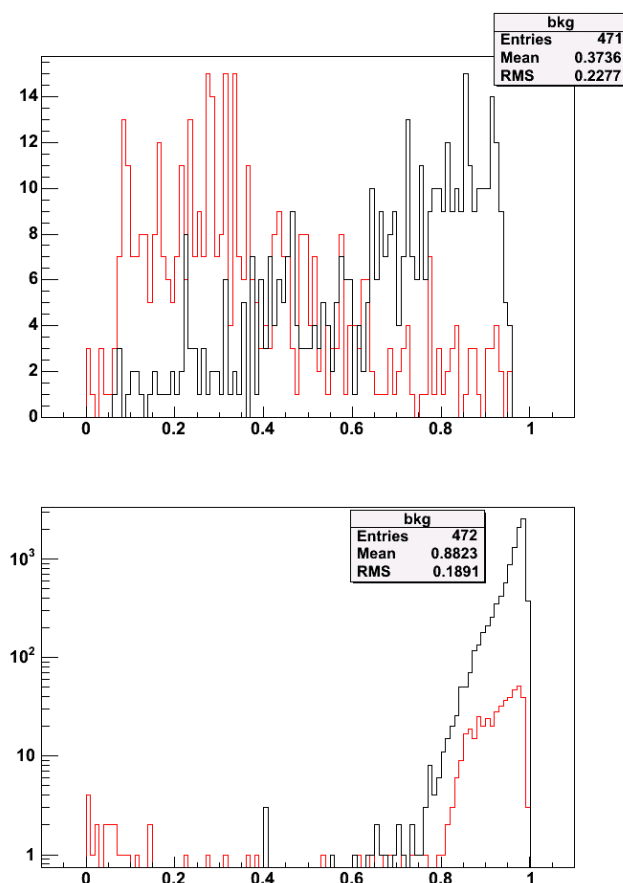
Ας υποθέσουμε τώρα ότι στο training set περιλαμβάνονται 99 backgrounds και 1 signal. Το ANN θα πετύχαινε πολύ μικρό MSE αν μηδένιζε όλα του τα βάρη και έδινε πάντα  $\text{output}=0$ , διότι θα ικανοποιούσε τα 99 backgrounds ενώ θα είχε  $\text{MSE} = 0.01$  μόνο, λόγω του 1 signal παραδείγματος. Αν προσπαθούσε να ρυθμίσει τα βάρη ώστε να πλησιάσει το output του signal στο 1, θα μεγάλωνε πολύ το MSE γιατί αρκετά backgrounds δε θα έδιναν ακριβώς  $\text{output} = 0$ . Κάτι αντίστοιχο θα συνέβαινε εάν δίναμε πάρα πολύ περισσότερα signals. Τότε, όλα τα βάρη θα λάμβαναν μεγάλες τιμές ώστε να προκαλούν κορεσμό στην activation function του output νευρώνα και να δίνει πάντα  $\text{output} = 1$ .

Η κατάσταση που απέχει περισσότερο από τις δύο ακραίες καταστάσεις είναι να έχουμε στο training set ίσους πληθυσμούς signal και background και φυσικά, όσο μεγαλύτεροι είναι αυτοί οι πληθυσμοί τόσο το καλύτερο. Βέβαια, μπορεί αν η δυσαναλογία δεν είναι πολύ μεγάλη να μην αντιληφθούμε έντονη πόλωση της εκπαίδευσης, αλλά θεωρητικά είναι δικαιολογημένο να υπάρχει, με τη λογική που εξηγήσαμε.

Στην εικόνα 3.40 βλέπουμε τη διαφορά που υπάρχει μεταξύ του ίδιου ακριβώς δικτύου που εκπαιδεύθηκε τη μια φορά με άνισους πληθυσμούς και την άλλη με ίσους. Η βελτίωση των παραμέτρων είναι εντυπωσιακή. Στην άνιση εκπαίδευση είχαμε  $(\text{background} : \text{signal}) = (58290 : 2182) = (26.7 : 1)$ . Μια άλλη περίπτωση, στην οποία έχουμε  $(\text{background} : \text{signal}) = (473 : 9760) = (1 : 20.6)$ , φαίνεται στην εικόνα 3.41. Εκεί το αποτέλεσμα της άνισης εκπαίδευσης είναι πολύ χειρότερο, αλλά πρέπει να προσέξουμε ότι και κατ' απόλυτο μέγεθος τα backgrounds ήταν πολύ λίγα. Γι' αυτό και στην ίση εκπαίδευση, το αποτέλεσμα δεν είναι αρκετά ικανοποιητικό, αν και είναι σαφώς βελτιωμένο.



**Εικόνα 3.40:** Το ίδιο ANN όταν εκπαιδεύεται με  $(\text{background} : \text{signal})=(58290 : 2182)$  (πάνω) και με  $(\text{background} : \text{signal})=(2182 : 2182)$  (κάτω).



**Εικόνα 3.41:** πάνω: ίση εκπαίδευση με πληθυσμούς ίσους με 473. κάτω: άνιση εκπαίδευση, με (background:signal)=(473:9760).

#### 4. Εφαρμογή σε άνισο data set – πρόγνωση παραμέτρων

Ένα ζήτημα που προκύπτει αφού έχουμε εκπαιδεύσει το νευρωνικό με ίσα patterns από signal και background, προκύπτει το ζήτημα του πώς αυτό το ANN θα εφαρμοστεί πάνω σε ένα δείγμα γεγονότων (data set) που δεν είναι ίσα, όπως συμβαίνει σε όλες τις πραγματικές περιπτώσεις<sup>6</sup>.

Αφού εκπαιδευτεί ένα δίκτυο σε ίσους πληθυσμούς, η συνάρτησή του έχει διαμορφωθεί υπό τις καταλληλότερες συνθήκες. Έχοντας πλέον ρυθμίσει τα βάρη του μπορεί να λάβει οποιοδήποτε γεγονός ως σήμα εισόδου (δηλαδή τις 25 συγκεκριμένες μεταβλητές αυτού του γεγονότος) και να δώσει το ανάλογο output. Αυτή είναι η λεγόμενη εφαρμογή της συνάρτησης του νευρωνικού (ή συντομότερα η εφαρμογή του νευρωνικού) σε ένα data set.

Στην πράξη, για κάθε ενέργεια είχα στη διάθεσή μου ένα<sup>7</sup> root-αρχείο το οποίο περιέχει S πλήθος ηλεκτρονιακών γεγονότων και B πλήθος μη ηλεκτρονιακών. Αν  $S < B$  χρησιμοποιώ στο training set  $S/2$  από τα signals και  $S/2$  από τα backgrounds, και  $S/2$  και  $S/2$  ομοίως στο test<sup>8</sup> set. Αν  $B > S$ , χρησιμοποιώ στο training set  $B/2$  και  $B/2$  signals και backgrounds αντίστοι-

<sup>6</sup> Φυσικά, αν χρησιμοποιούσαμε MC θα είχαμε την πολυτέλεια να εφαρμόσουμε το ANN σε εκ κατασκευής ίσους πληθυσμούς.

<sup>7</sup> Μόνη εξαίρεση αποτελεί η ενέργεια των 2.4 GeV, όπου συνδύασα τα runs #40914 και #40415.

<sup>8</sup> test set είναι ένας άλλος όρος για αυτό που στο παράρτημα ονομάζουμε validation ή verification set.

χα, και ομοίως B/2 και B/2 στο test set. Όταν η εκπαίδευση ολοκληρωθεί, λαμβάνω ένα output-διάγραμμα και τις αντίστοιχες παραμέτρους του νευρωνικού, όταν αυτό εφαρμόζεται στα patterns του training set. Όταν εφαρμόζω τη συνάρτηση του νευρωνικού στο πλήρες σύνολο των data (S και B), το output-διάγραμμα διαφέρει από το προηγούμενο, εφόσον οι κατανομές του signal και του background περιλαμβάνουν τώρα και γεγονότα που πριν δεν περιελάμβαναν. Τίθεται το ερώτημα: *ποιες παράμετροι του ANN θα αλλάξουν και κατά ποιον τρόπο;*

Για να απαντήσουμε πρώτα πρέπει να υπενθυμίσω ότι η συνάρτηση του ANN αποτελεί μια απεικόνιση (mapping) του 25-διάστατου χώρου των μεταβλητών εισόδου σε έναν μονοδιάστατο χώρο, αυτόν του αριθμού output. Σχεδόν αξιωματικά παραδεχόμαστε ότι όλα τα ηλεκτρόνια δίνουν γεγονότα με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά (όχι πανομοιότυπα βεβαίως) και το ίδιο συμβαίνει και με τα μη-ηλεκτρόνια. Δηλαδή, αν από μια run απομονώσω τα πρώτα ηλεκτρονικά γεγονότα που συνέβησαν και τα τελευταία και μετά τα συγκρίνω δε θα υπάρχει κάποιο διαφοροποιό στοιχείο που να με κάνει να καταλαβαίνω ποια ήταν πρώτα και ποια ήταν κατοπινά. Αν αυτό δεν ισχύει, τότε δεν έχει νόημα να φτιάχνουμε ANNs για pattern recognition, ίσως δεν έχει καν νόημα να κάνουμε πειράματα, εάν το ίδιο αίτιο προκαλεί τελείως διαφορετικά αποτελέσματα από τη μια φορά στην άλλη.

Εφόσον όλα τα γεγονότα ηλεκτρονίων δεχόμαστε ότι μοιάζουν, περιμένουμε ότι θα βρίσκονται στην ίδια περιοχή του 25-διάστατου χώρου όπου βρίσκονται κι εκείνα τα signals που χρησιμοποιήσαμε στο training set. Εφόσον το ANN απεικόνισε τα εκπαιδευτικά signals στην περιοχή κοντά στο output = 1, περιμένουμε το ίδιο να κάνει και με τα signals ολόκληρου του data set. Το αυτό συμβαίνει και με τα background γεγονότα, τα μη ηλεκτρόνια.

Άρα, από το output-διάγραμμα που παίρνουμε από την εφαρμογή του ANN στο training set, μπορούμε να πούμε ότι βλέπουμε την κατανομή του output των signals και των backgrounds. Όσο περισσότερα patterns περιλαμβάνονται στο training set τόσο μεγαλύτερος πληθυσμός θα περιλαμβάνεται σε αυτές τις κατανομές του output-διαγράμματος, οπότε θα έχουμε καλύτερη γνώση της ακολουθούμενης κατανομής.

Το να γνωρίζω τις κατανομές που ακολουθεί το output για signals και για backgrounds μου δίνει τη δυνατότητα να προβλέψω το output-διάγραμμα που θα έπαιρνα εφαρμόζοντας το ANN σε οποιοδήποτε data set, άρα και τις αντίστοιχες παραμέτρους (efficiency, purity, contamination).

Αν οι πληθυσμοί S και B μεταβληθούν πηγαίνοντας στο πλήρες data set σε a·B και b·S και το output ακολουθούσε τις ίδιες κατανομές, που σημαίνει ότι θα είχαμε και  $B_c \rightarrow a \cdot B_c$  και  $S_c \rightarrow b \cdot S_c$ , τότε οι παράμετροι θα άλλαζαν ως εξής:

$$\begin{aligned} \text{Efficiency} &\rightarrow \text{Efficiency}' = \frac{S'_c}{S'} = \frac{bS_c}{bS} = \frac{S_c}{S} = \text{Efficiency} \\ \text{Purity} &\rightarrow \text{Purity}' = \frac{bS_c}{bS_c + aB_c} \\ \text{Cont / tion}' &= \frac{aB_c}{aB} = \frac{B_c}{B} = \text{Cont / tion} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Στην πράξη, όμως, και το efficiency και το cont/tion θα αλλάξει, διότι δεν είναι δυνατόν να γνωρίζουμε 100% την κατανομή που ακολουθεί το output. Για παράδειγμα, στην εικόνα 3.36 βλέπουμε ότι το output-διάγραμμα, που αναφέρεται σε ένα training set με ίσους πληθυσμούς, περιέχει ορισμένα κενά στις κατανομές τόσο του signal όσο και του background. Αν σε πλήρες data set έχουμε πολλαπλάσιο πλήθος events αυτά τα κενά πιθανόν να καλυφθούν, να αλλάξει ελαφρώς η μορφή των κορυφών κλπ. Δηλαδή, δεν είναι ακριβές το να υψώνουμε απλώς όλες τις στήλες του output-διαγράμματος κατά έναν συντελεστή a ή b.<sup>9</sup>

Για παράδειγμα, θα προσπαθήσουμε να κάνουμε μια εκτίμηση του στατιστικού σφάλματος του purity, χωρίς να λαμβάνουμε υπόψη τα σφάλματα που μπαίνουν στην πρόβλεψη του

<sup>9</sup> Μια σκέψη που γίνεται και ίσως υλοποιηθεί στο μέλλον, είναι αντί να υψώνω κατά έναν συντελεστή τις διάφορες στήλες, να παρεμβάλλω πρώτα ένα πολυώνυμο που να κάνει fit στην output-κατανομή και μετά να πολλαπλασιάσω ολόκληρο το παρεμβλημένο πολυώνυμο με το συντελεστή a ή b. Έτσι, θα καλύπτω τα κενά, δηλαδή τα outputs όπου η κατανομή έχει κάτω από 1 entry.

purity λόγω των κενών που υπάρχουν στο output-διάγραμμα. Θα υποθέσουμε, κάπως απλοϊκά, ότι η στήλη (bin) υπ' αριθμόν  $v$  της κατανομής του output του υποβάθρου έχει ύψος  $Y_v$ . Αν τα entries αυτής της bin δεν είναι πολύ λίγα, τότε επικαλούμενοι το κεντρικό οριακό θεώρημα, θεωρούμε ότι κάθε bin έχει σφάλμα  $\delta Y_v = (Y_v)^{1/2}$ . Ομοια, κάθε bin της κατανομής του output του σήματος έχει ύψος  $\Sigma_v$  και σφάλμα  $\delta \Sigma_v = (\Sigma_v)^{1/2}$ .

Το  $S_c$  και το  $B_c$  είναι τα αθροίσματα:

$$S_c = \sum_{v>cut} \Sigma_v, B_c = \sum_{v>cut} Y_v \quad (3.16)$$

με σφάλματα:

$$\begin{aligned} \delta S_c &= \sqrt{\sum_{v>cut} \delta \Sigma_v^2} = \sqrt{\sum_{v>cut} (\sqrt{\Sigma_v})^2} = \sqrt{\sum_{v>cut} \Sigma_v} = \sqrt{S_c} \\ \delta B_c &= \sqrt{\sum_{v>cut} \delta Y_v^2} = \sqrt{\sum_{v>cut} (\sqrt{Y_v})^2} = \sqrt{\sum_{v>cut} Y_v} = \sqrt{B_c} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Επομένως, το σφάλμα του προβλεπόμενου purity, σύμφωνα με τη σχέση (3.15) είναι:

$$\begin{aligned} \delta \text{Purity}' &= \sqrt{\left( \frac{b(bS_c + aB_c) - b^2S_c}{(bS_c + aB_c)^2} \sqrt{S_c} \right)^2 + \left( \frac{bS_c a}{(bS_c + aB_c)^2} \sqrt{B_c} \right)^2} \\ &= \frac{ab}{(bS_c + aB_c)^2} \sqrt{B_c S_c (B_c + S_c)} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Στην εικόνα 3.42 βλέπουμε ένα παράδειγμα μιας πρόβλεψης που έγινε με τον τρόπο που περιγράψαμε και ήταν πολύ επιτυχής. Το efficiency και το contamination άλλαξαν τόσο λίγο που το μέγεθος των κηλίδων δεν επιτρέπει να το δούμε. Το purity πήρε σχεδόν ακριβώς την προβλεπόμενη μορφή. Φυσικά, εφαρμόζοντας το ANN στο πλήρες data set, που περιείχε (background : signal) = (76869 : 9046), η purity μειώθηκε αρκετά, διότι το σήμα ήταν «ανακατεμένο» με πολύ background. Το ακριβές της πρόβλεψης οφείλεται κυρίως στο ότι οι κατανομές του output για signal και background ήταν αρκετά πολυπληθείς, ήδη από την εκπαίδευση, οπότε μπορούσαμε να έχουμε ακριβή γνώση της ακολουθούμενης κατανομής, χωρίς πολλά κενά bins.

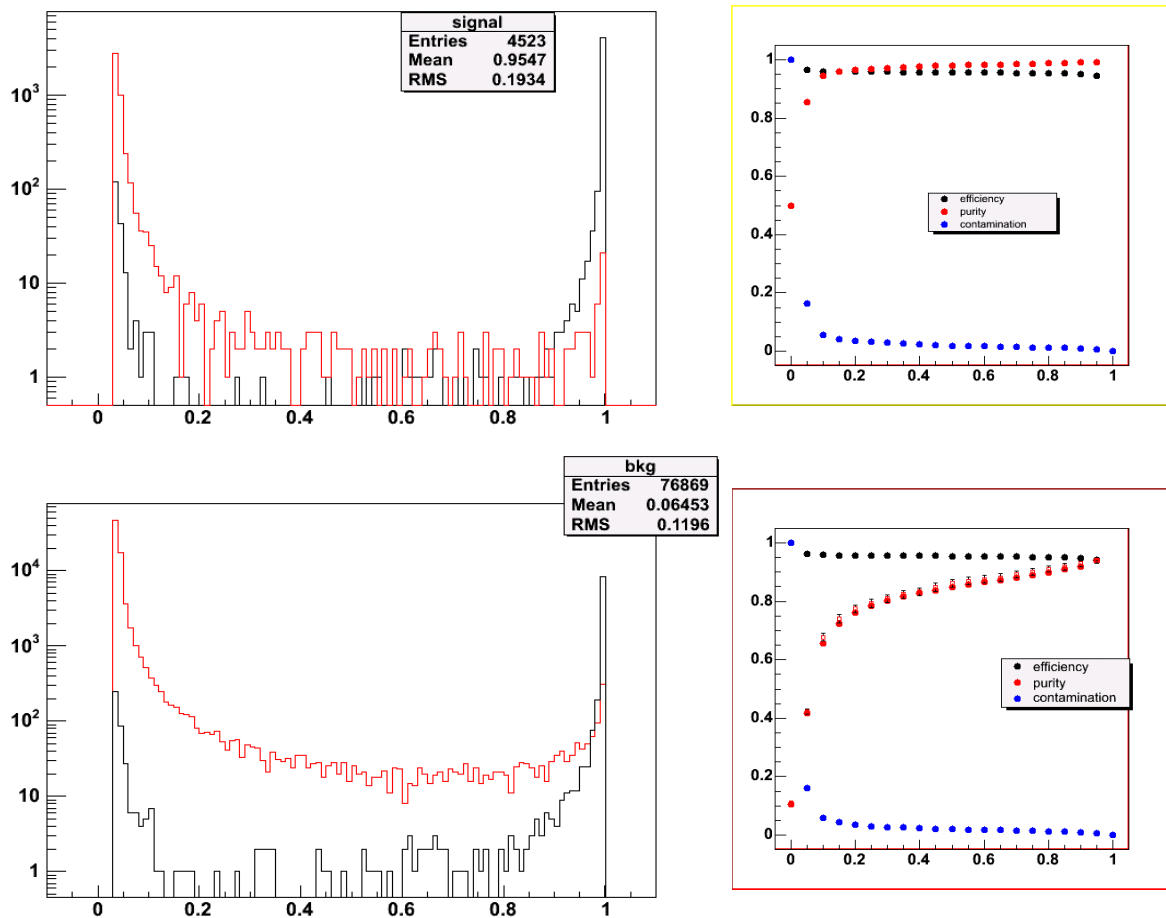
Βλέπουμε ότι μπορούμε λοιπόν σε ορισμένες ευνοϊκές περιπτώσεις να προβλέψουμε τις παραμέτρους του ANN, γνωρίζοντας τις παραμέτρους της εφαρμογής του πάνω στο training set ίσων πληθυσμών και τους πληθυσμούς του data set όπου θα εφαρμοστεί το ANN. Για την ακρίβεια, δε χρειάζεται να ξέρουμε ακριβώς τους τελικούς πληθυσμούς, αλλά αρκεί να ξέρουμε την αναλογία τους. Ο λόγος είναι ότι η σχέση (3.15) για την purity μπορεί να γραφτεί και:

$$\text{purity}' = \frac{S_c}{S_c + \frac{a}{b} B_c} \quad (3.19)$$

το  $a/b$  μπορεί να βρεθεί ξέροντας μόνο τον λόγο των  $B'$  και  $S'$ , όχι τα ίδια τα νούμερα, κι αυτό χάρη στο ότι  $B_c = S_c$  στην εκπαίδευση με ίσους πληθυσμούς.

$$\frac{B'}{S'} = \frac{B'_c}{S'_c} = \frac{aB_c}{bS_c} = \frac{a}{b} \quad (3.20)$$





**Εικόνα 3.42: Πάνω:** Το output-διάγραμμα από την εφαρμογή στο training set και δεξιά οι υπολογιζόμενες παράμετροι. **Κάτω:** Το output-διάγραμμα της εφαρμογής του ANN στο πλήρες data set και δεξιά οι υπολογιζόμενες παράμετροι, με έντονες κηλίδες, μαζί με τις προβλεπόμενες παραμέτρους, που είναι με μικρά τετραγωνάκια ίδιου χρώματος.

Είναι βεβαίως κάπως δυσάρεστο το ότι για να προβλέψουμε την purity πρέπει να ξέρουμε την αναλογία signal και background που θα συναντήσουμε εκεί όπου θα εφαρμόσουμε το ANN, το οποίο εκπαιδεύσαμε με ίσους πληθυσμούς. Αν δεν έχουμε καμία γνώση για το data set όπου θα το εφαρμόσουμε, δε μπορούμε να κάνουμε καμία εκ των προτέρων εκτίμηση της purity. Αλλά αυτό δεν είναι παράλογο. Το παράλογο θα ήταν να προβλέψουμε την purity χωρίς αυτήν την πληροφορία. Η purity (καθαρότητα), όπως το λέει και το όνομά της, είναι μια παράμετρος που εξαρτάται από τη σχέση signal και background, σε αντίθεση με την efficiency, που εξαρτάται μόνο από το signal. Δε θα ήταν δυνατόν να εκτιμήσουμε την purity αν δεν είχαμε κάποια ιδέα για το πόσα γεγονότα background αντιστοιχούν ανά γεγονός σήματος.

## Παρουσίαση νευρωνικών (άνευ cross-talk cut)

Πριν συζητηθεί το τελευταίο ζήτημα, που αφορά στη δυνατότητα βελτίωσης των νευρωνικών με την εφαρμογή κατωφλίου στο ύψος παλμού, είναι καλό να παρουσιάσουμε τα ANNs που έχουν κατασκευασθεί χωρίς καμία αφαίρεση του cross-talk. Έτσι θα μπορεί να γίνει μετά η σύγκριση. Πάντως, πρωθύστερα αναφέρουμε ότι η όποια βελτίωση της απόδοσης δε θα είναι καθολική και σαφής.

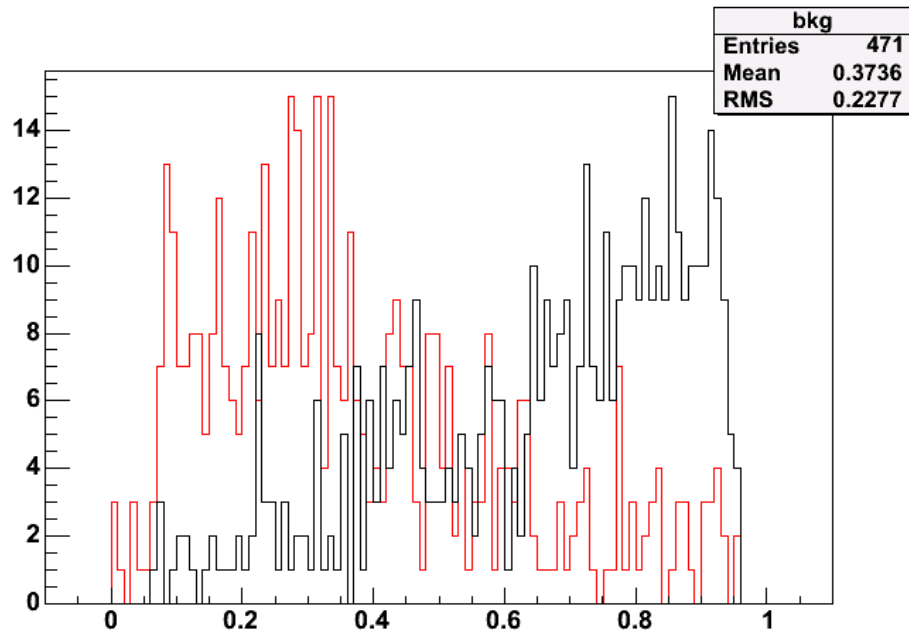
Συνοπτικά υπενθυμίζουμε τα βασικά χαρακτηριστικά όλων των νευρωνικών που θα ακολουθήσουν:

- Χρησιμοποιούνται κανονικοποιημένες οι 25 μεταβλητές: totmip, nhits, maxmip, nhits/nhitplanes, totmip/nhitplanes, planes\_mip[1,...,15], strips\_mip[9,...,13].
- Η αρχιτεκτονική είναι η 25→10→5→1.
- Γίνεται εκπαίδευση με ίσους πληθυσμούς σήματος και υποβάθρου. Αν  $S < B$  χρησιμοποιώ  $S/2$  signals και  $S/2$  backgrounds, αν  $B < S$  αντίστοιχα  $B/2$  και  $B/2$ . Τα υπόλοιπα  $S/2$  ή  $B/2$  (αναλόγως ποιος πληθυσμός υστερεί) χρησιμοποιούνται για έλεγχο κατά την εκπαίδευση.
- Για κάθε ANN παρουσιάζονται πρώτα το output-διάγραμμα, το parameters-διάγραμμα και το area-διάγραμμα για την εφαρμογή του πάνω στο training set (equal training on equal set). Στη συνέχεια, η αποκατεστημένη συνάρτηση του ANN εφαρμόζεται για το διαχωρισμό ολόκληρου του data set σε κάθε ενέργεια, οπότε εμφανίζονται τα αυτά τρία διαγράμματα για την εφαρμογή αυτή, που είναι επί άνισων πληθυσμών σήματος και υποβάθρου (equal on unequal, δηλαδή equally trained on unequal data set).

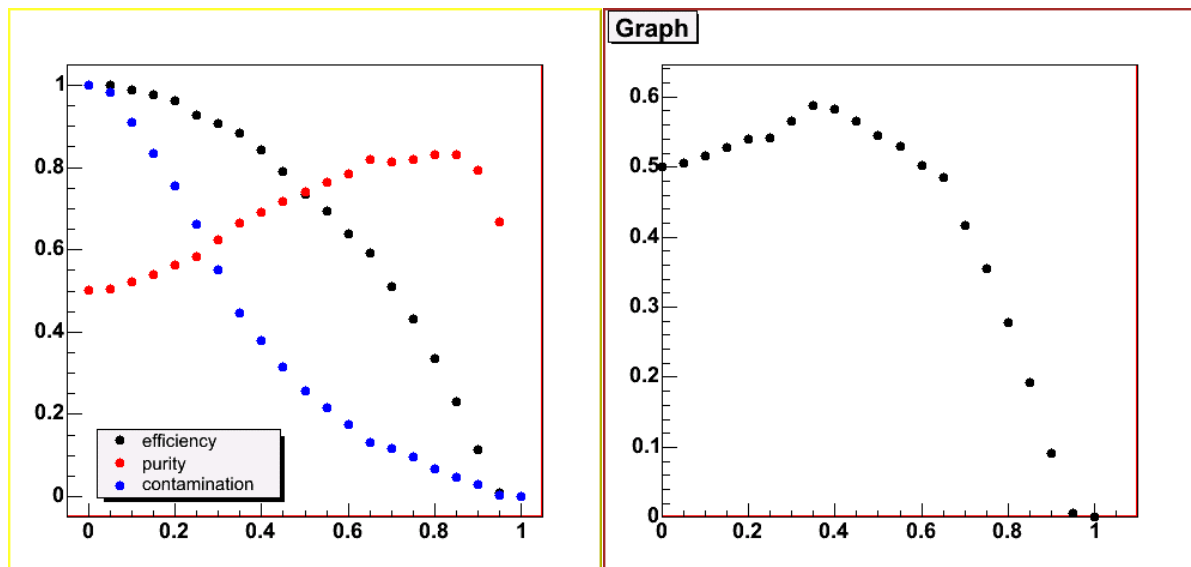
### Ενέργεια 0.2 GeV – run #40771

Το κύριο σχόλιο που έχουμε να κάνουμε για αυτήν την ενέργεια είναι ότι, αφ' ενός οι μεταβλητές εκπαίδευσης είναι ασθενώς διαχωριστικές, αφ' εταίρου ο πληθυσμός του training set είναι εξαιρετικά μικρός, οπότε δεν επιτυγχάνεται ικανοποιητική εκπαίδευση. Το output-διάγραμμα της εικόνας 3.43α έχει κατ' εξαίρεση γραμμικό τον κατακόρυφο άξονα, λόγω του μικρού πληθυσμού. Παρόλο που η καμπύλη του μέσου σφάλματος επί του test set έφτασε σε ελάχιστο στον κύκλο όπου παύσαμε την εκπαίδευση, η ελάχιστη τιμή που επιτεύχθηκε ήταν συγκριτικά υψηλή, οπότε είναι αντιληπτό ότι με αυτά τα δεδομένα δε θα μπορούσαμε να πετύχουμε καλύτερο αποτέλεσμα. Σε αυτήν την αδυναμία οφείλεται τόσο η σύγχυση των κατανομών του signal- και του background-output, όσο και το γεγονός ότι το output δε φτάνει μέχρι την τιμή 1.

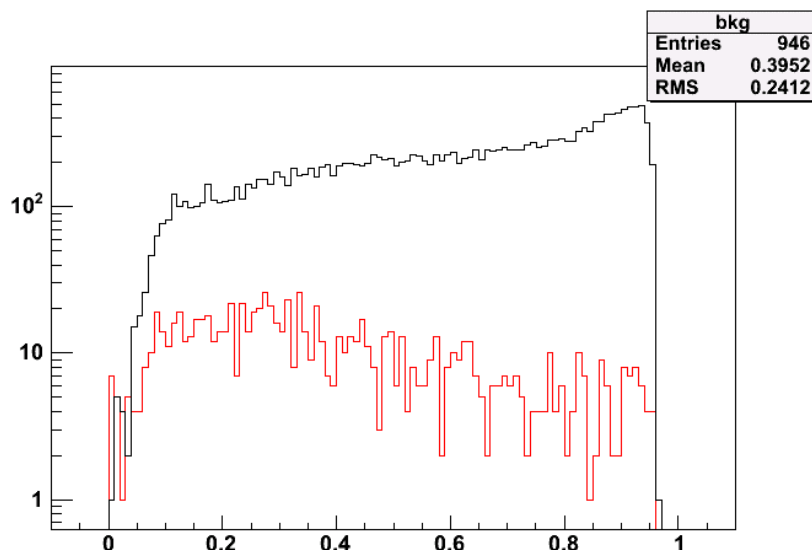
Όταν εφαρμόσουμε το συγκεκριμένο ANN στο πλήρες data-set, το οποίο περιέχει πληθυσμούς signal : background = 19519 : 946, περιμένουμε πολύ υψηλή purity, λόγω του ελάχιστου background σε σχέση με το signal. Στην εικόνα 3.44α βλέπουμε το output-διάγραμμα κατά την εφαρμογή στο πλήρες data-set και στην εικόνα 3.44β βλέπουμε το parameters-διάγραμμα και το area-διάγραμμα. Στην 3.44β μάλιστα παρατίθενται (με τετραγωνάκια όπως συνηθίζουμε) οι προβλεπόμενες παράμετροι και το προβλεπόμενο purity·efficiency, που υπολογίστηκαν με τον τρόπο που περιγράψαμε σε προηγούμενη παράγραφο. Παρατηρούμε ότι οι προβλεπόμενες παράμετροι δε διαφέρουν πολύ από αυτές που όντως προέκυψαν από την εφαρμογή equal on unequal.



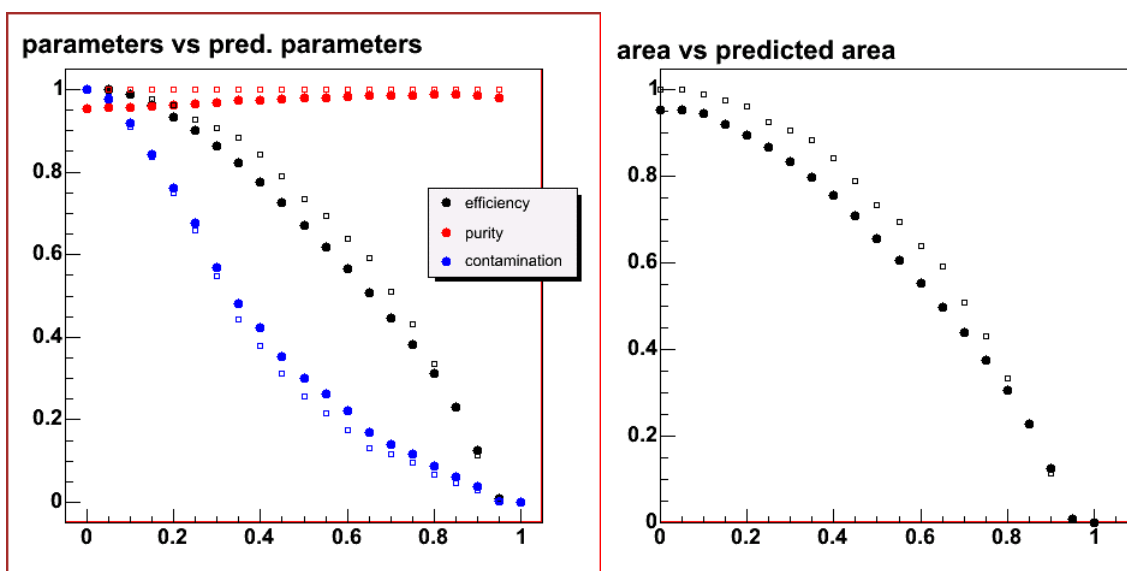
Εικόνα 3.43α: Το output-διάγραμμα του ANN (equal on equal) για ενέργεια 0.2 GeV.



Εικόνα 3.43β: Το output-διάγραμμα (αριστερά) και το area-διάγραμμα (δεξιά) του ANN (equal on equal) για ενέργεια 0.2 GeV.



**Εικόνα 3.44α:** Το output-διάγραμμα (equal on unequal) του ANN για ενέργεια 0.2 GeV.



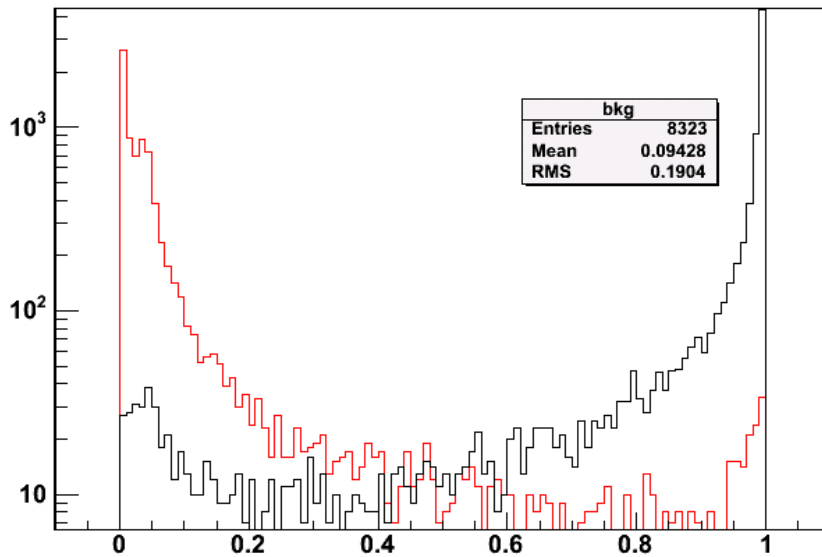
**Εικόνα 3.44β:** Το parameters- και το area-διάγραμμα (equal on unequal) του ANN για τα 0.2 GeV. Με ομόχρωμα τετραγωνάκια παρατίθενται και οι προβλεπόμενες τιμές των παραμέτρων όπως υπολογίσθηκαν από την εφαρμογή equal on equal.

### Ενέργεια 0.6 GeV – run #40783

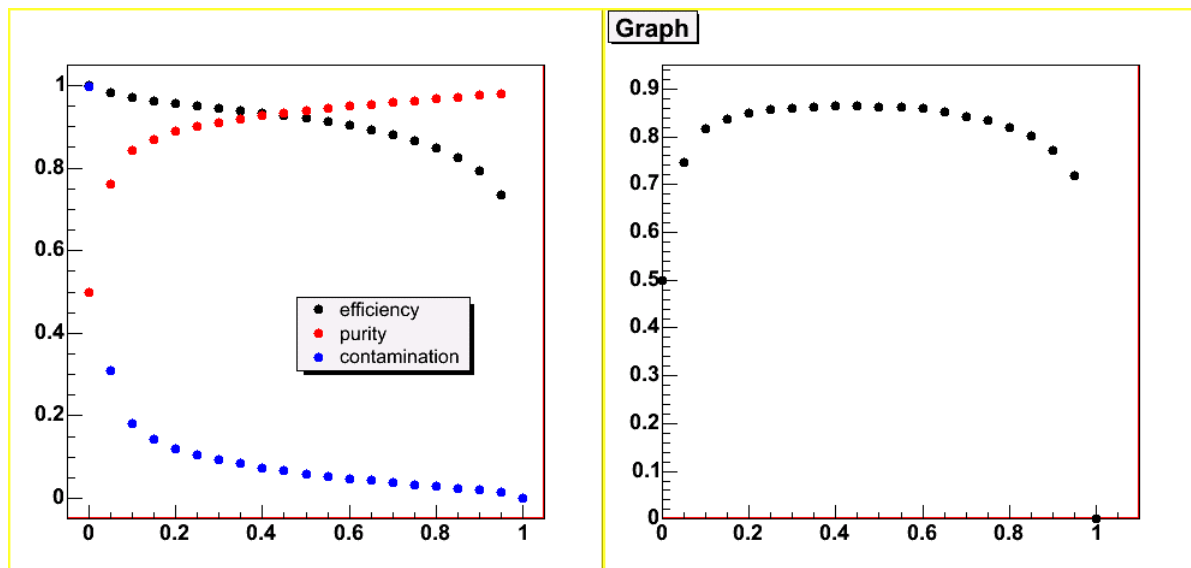
Το root-αρχείο της run υπ' αριθμόν 40783 περιέχει πληθυσμούς signal : background = 16647 : 24539. Την equal on equal εφαρμογή του (δηλαδή την εκπαίδευσή του με ίσους πληθυσμούς και την εφαρμογή του πάνω στο ίδιο training-set) τη βλέπουμε στις εικόνες 3.45α και 3.45β. Στις εικόνες 3.46α και 3.46β βλέπουμε την εφαρμογή στο πλήρες data-set.

Είναι εμφανής η βελτίωση των παραμέτρων τούτου του ANN σε σύγκριση με το προηγούμενο, που διαχώριζε ηλεκτρόνια από μη ηλεκτρόνια στα 0.2 GeV. Ο λόγος φυσικά είναι το πολύ μεγαλύτερο training-set, που επιτρέπει πληρέστερη εκπαίδευση, αλλά και η καλύτερη διαχωριστικότητα των μεταβλητών εκπαίδευσης.

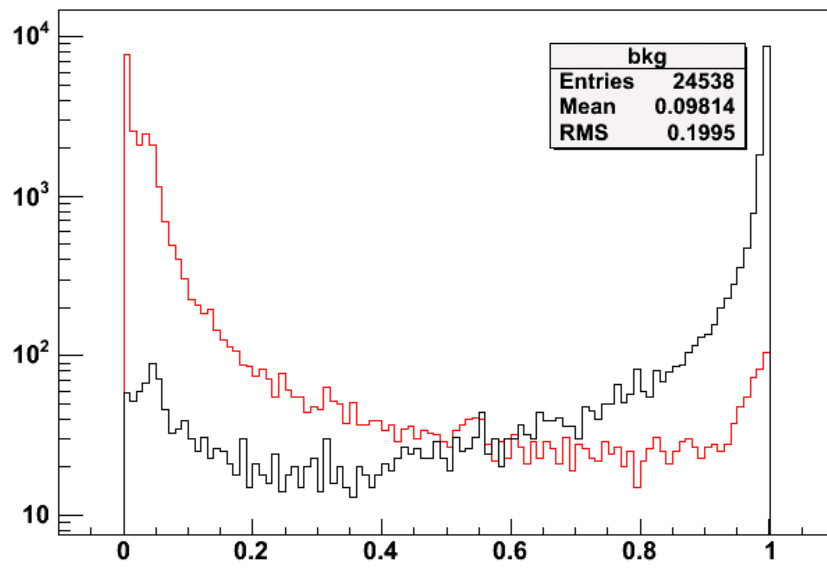
Το γεγονός ότι οι παράμετροι του ANN είναι σχεδόν απαράλλακτες μεταξύ των εφαρμογών equal on equal και equal on unequal, οφείλεται στο ότι το πλήρες data-set δεν είναι υπερβολικά δυσανάλογο, οπότε μοιάζει αρκετά με το training-set που περιέχει ίσους πληθυσμούς.



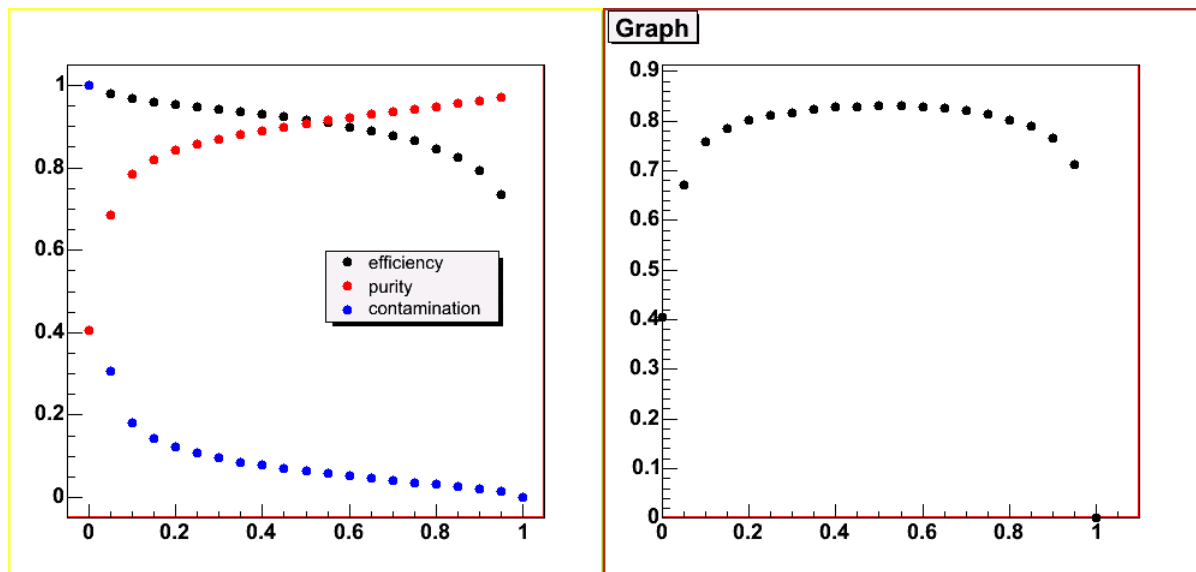
**Εικόνα 3.45α:** Το output-διάγραμμα (equal on equal) του ANN για ενέργεια 0.6 GeV.



**Εικόνα 3.45β:** Το parameters- και το area-διάγραμμα (equal on equal) του ANN για ενέργεια 0.6 GeV.



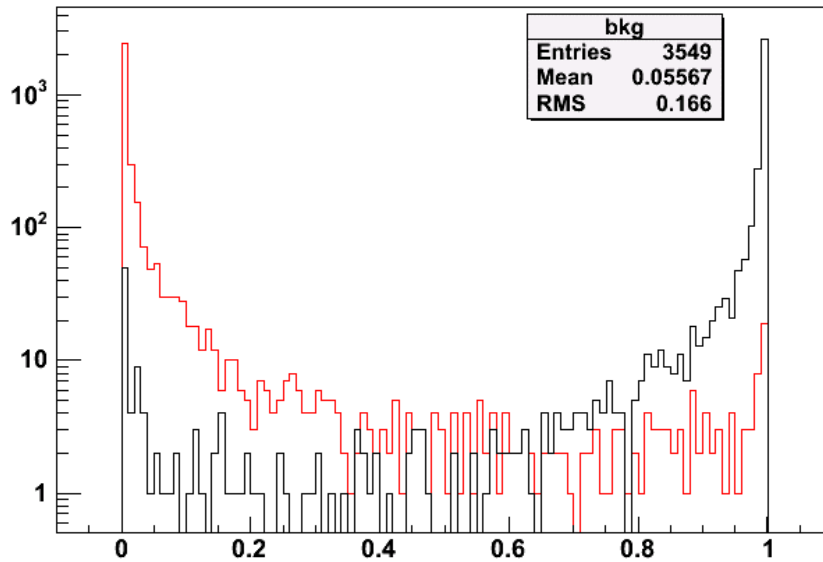
**Εικόνα 3.46α:** Το output-διάγραμμα (equal on unequal) του ANN για ενέργεια 0.6 GeV.



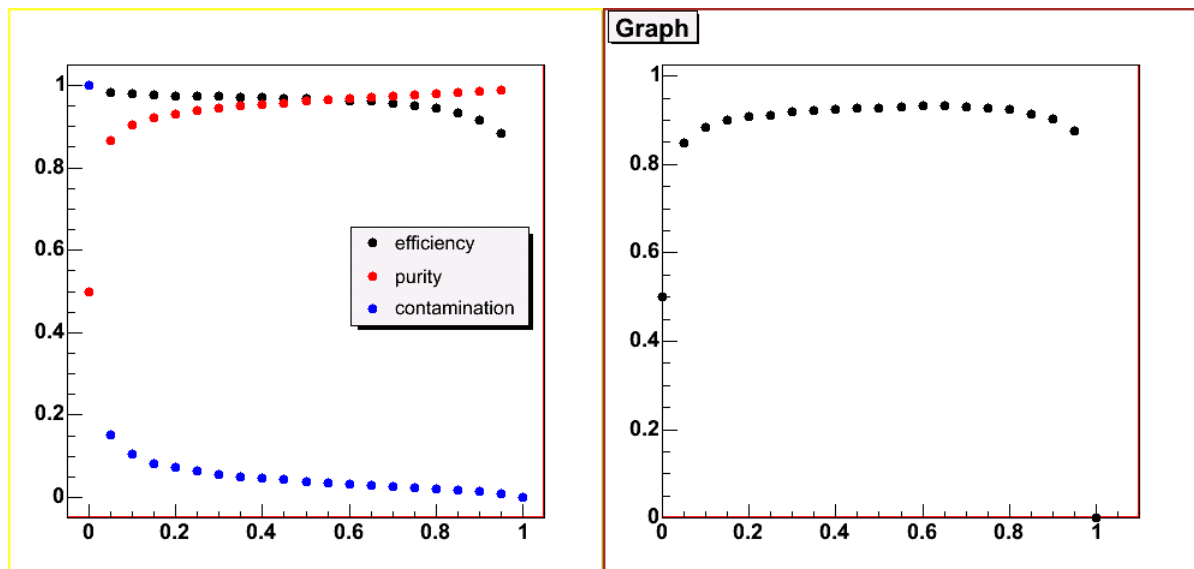
**Εικόνα 3.46β:** Το parameters- και το area-διάγραμμα (equal on unequal) του ANN για ενέργεια 0.6 GeV.

## Ενέργεια 1.2 GeV – run #40874

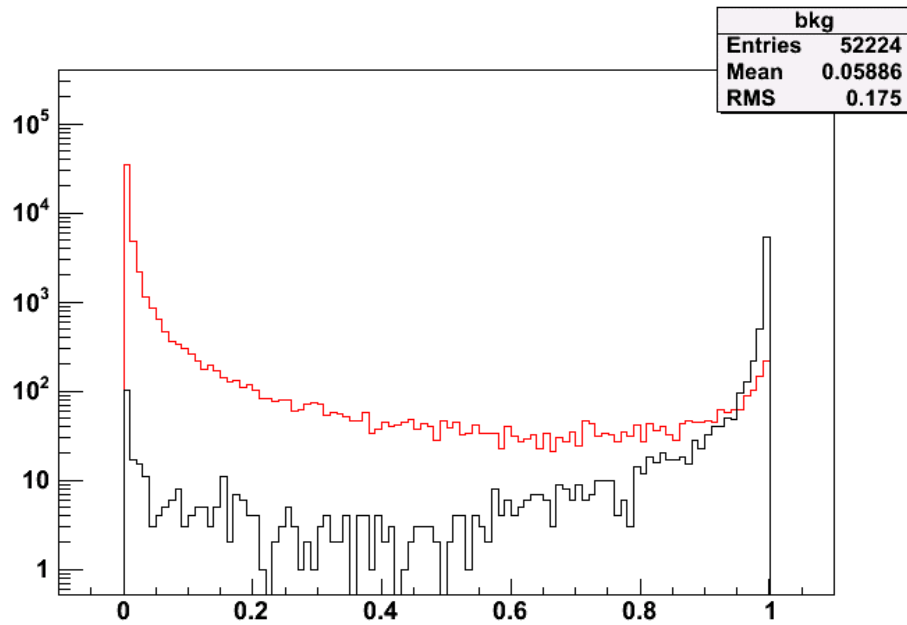
Η run #40874 είναι μια από τις πολύ δυσανάλογες runs, περιέχοντας στο root-αρχείο της πληθυσμούς signal : background = 7100 : 52225. Το πολύ μεγαλύτερο πλήθος background γεγονότων που περιέχει (μη ηλεκτρονίων) είναι ο λόγος της μείωσης του purity στην equal on unequal εφαρμογή.



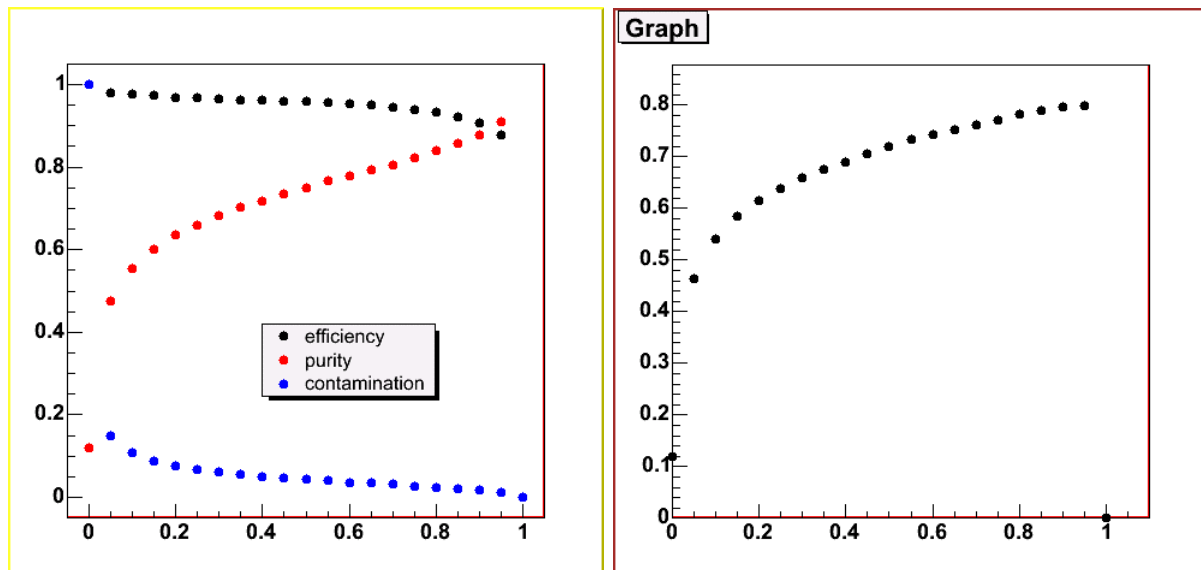
**Εικόνα 3.47α:** Το output-διάγραμμα (equal on equal) του ANN για ενέργεια 1.2 GeV.



**Εικόνα 3.47β:** Το parameters- και το area-διάγραμμα (equal on equal) του ANN για ενέργεια 1.2 GeV.



**Εικόνα 3.48α:** Το output-διάγραμμα (equal on unequal) του ANN για ενέργεια 1.2 GeV.



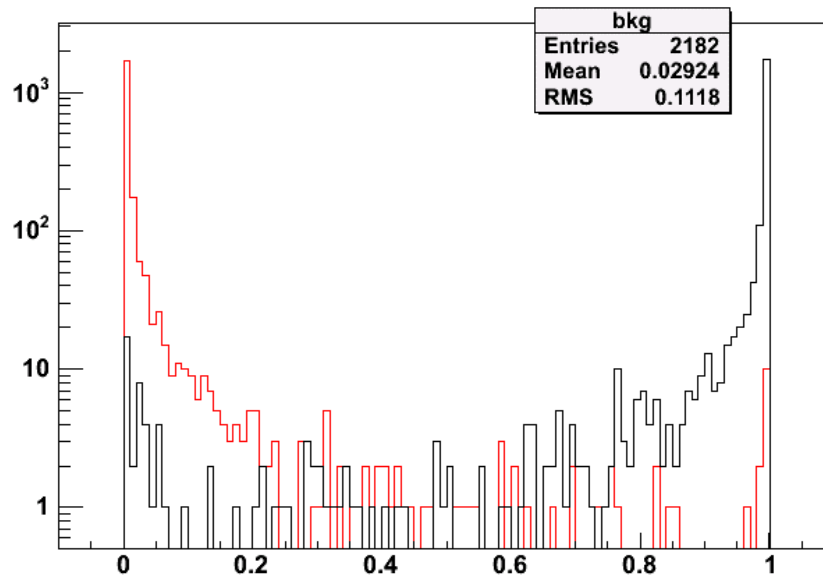
**Εικόνα 3.48β:** Το parameters- και το area-διάγραμμα (equal on unequal) του ANN για ενέργεια 1.2 GeV.

### Ενέργεια 2.4 GeV – runs #40415 και #40916

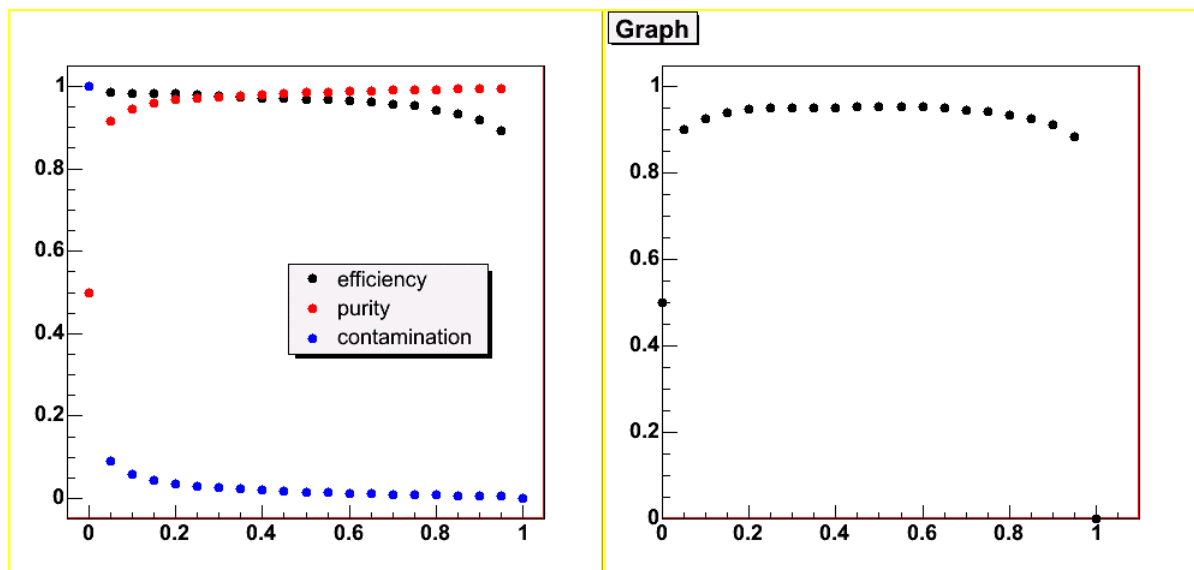
Σε αυτήν την ενέργεια, προκειμένου να αυξήσω το πλήθος των signal events, συνένωσα τις runs #40415 και #40916, που η καθεμιά διαδοχικά περιέχει signals : backgrounds = 3239 : 82697 και 1127 : 33885, δημιουργώντας ένα μεγαλύτερο data-set με signals : backgrounds = 4366 : 116582.

Η equal on unequal εφαρμογή της συνάρτησης του ANN θα γίνει στο data-set της run #40415, αλλά και της run #40914, που είναι επίσης σε ενέργεια 2.4 GeV. Η τελευταία περιέχει πληθυσμό signal : background = 1215 : 36064.

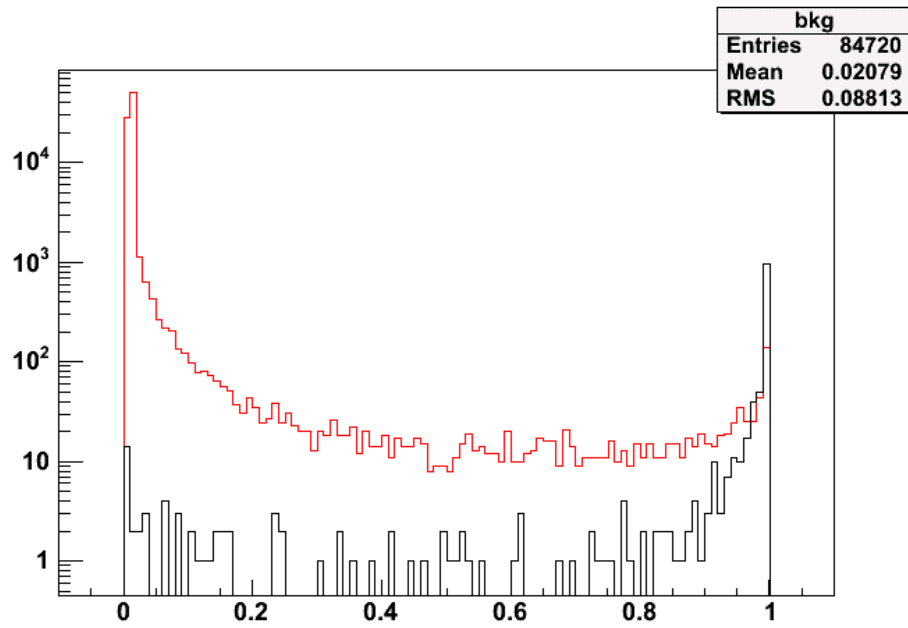




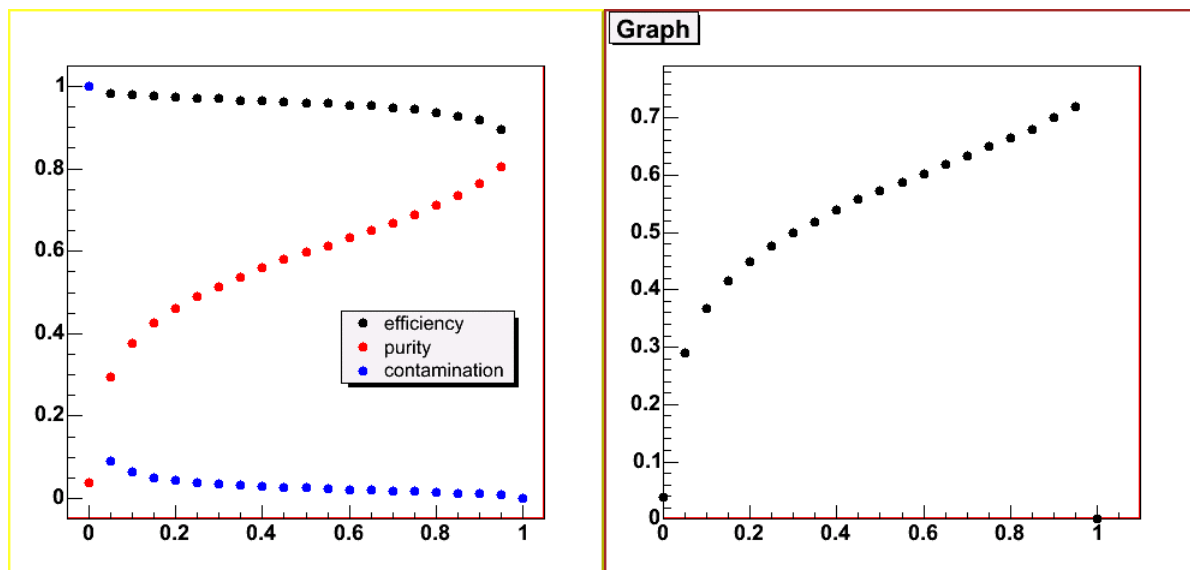
**Εικόνα 3.49α:** Το output-διάγραμμα (equal on equal) του ANN για ενέργεια 2.4 GeV.



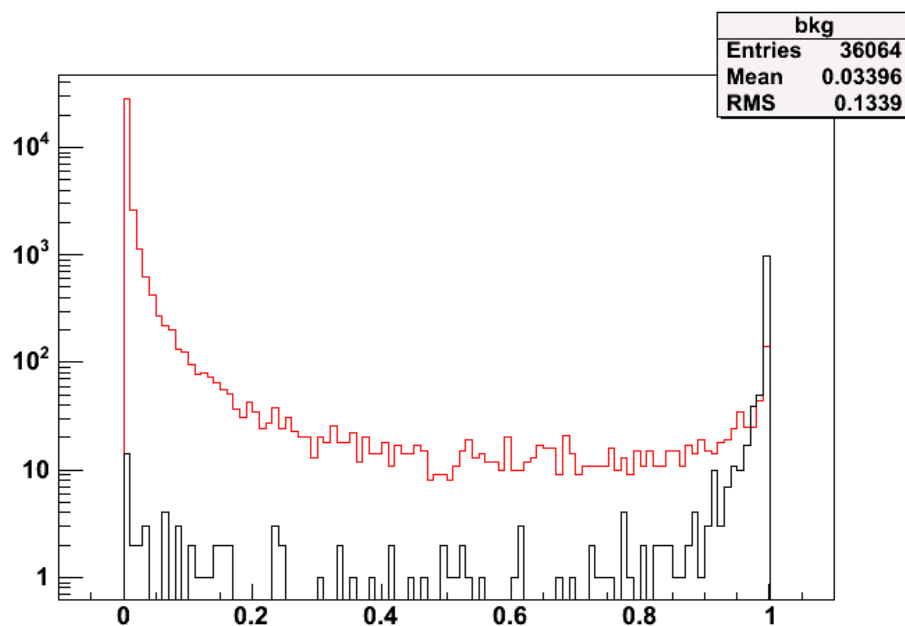
**Εικόνα 3.49β:** Το parameters- και το area-διάγραμμα (equal on equal) του ANN για ενέργεια 2.4 GeV.



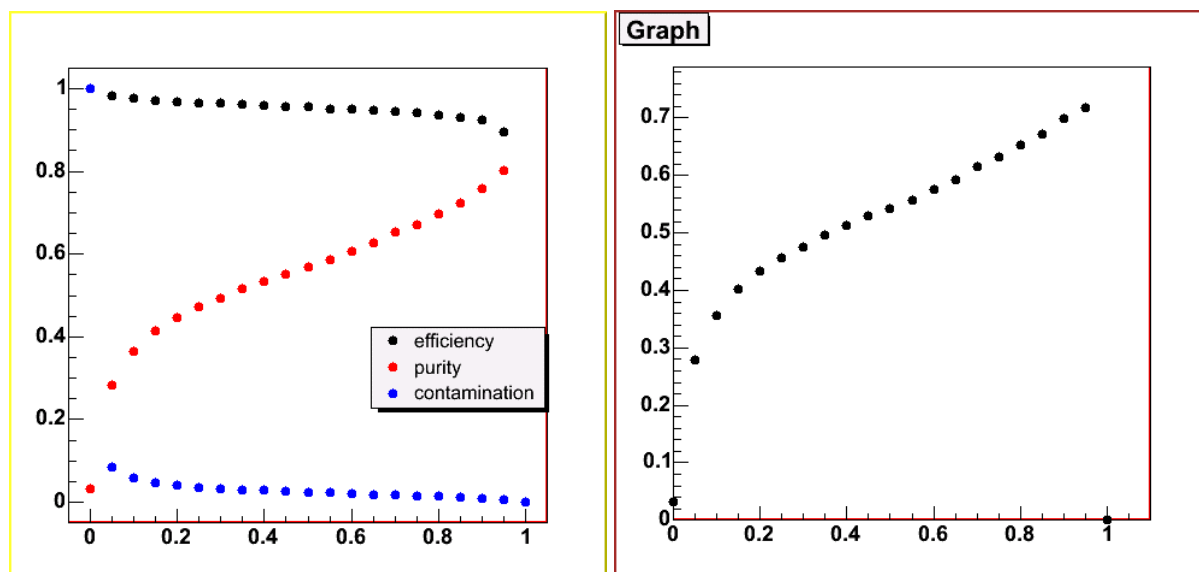
**Εικόνα 3.50α:** Το output-διάγραμμα (equal on unequal) του ANN για ενέργεια 2.4 GeV, όταν εφαρμόζεται στο πλήρες data-set της run #40415.



**Εικόνα 3.50β:** Το parameters- και το output-διάγραμμα (equal on unequal) του ANN για ενέργεια 2.4 GeV, όταν εφαρμόζεται στο πλήρες data-set της run #40415.



**Εικόνα 3.51α:** Το output-διάγραμμα (equal on unequal) του ANN για ενέργεια 2.4 GeV όταν εφαρμόζεται στο data-set της run #40914.



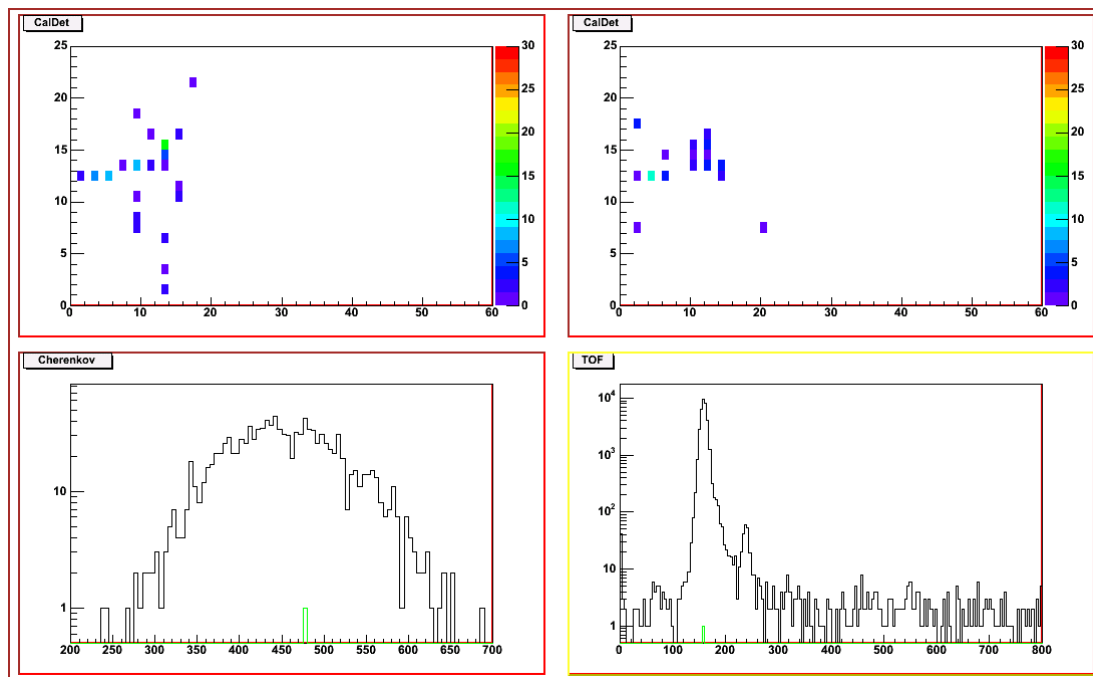
**Εικόνα 3.51β:** Το parameters- και το output-διάγραμμα (equal on unequal) του ANN για ενέργεια 2.4 GeV, όταν εφαρμόζεται στο πλήρες data-set της run #40914.

Είναι εντυπωσιακό αλλά και εύλογο το πόσο μοιάζουν τα output-διαγράμματα της equal on unequal εφαρμογής στις runs #40415 και #40914. Πάντως, σε περίπτωση που κανείς νομίζει ότι είναι πανομοιότυπα, μπορεί να πεισθεί ότι δεν είναι, κοιτώντας τα δύο-τρία πρώτα bins της κατανομής του output του background στις εικόνες 3.50α και 3.51α. Φυσικά, αυτό οφείλεται στο ότι όλα τα ηλεκτρονικά (και μη ηλεκτρονικά) events της ίδιας ενέργειας (2.4 GeV) έχουν τα ίδια χαρακτηριστικά, οπότε αναγκάζουν το ANN να δίνει την ίδια κατανομή του output.

Σε αυτό το σημείο αξίζει να αναφερθούμε στο τι γεγονότα είναι αυτά που, ενώ φαίνεται να είναι signals, δίνουν output  $\approx 0$  και εκείνα που, ενώ φαίνεται να είναι backgrounds, δίνουν

output  $\approx 1$ . Ένας έλεγχος των “backgrounds” που δίνουν output  $\approx 1$  έδειξε ότι είναι ηλεκτρονικά events τα οποία, λόγω inefficiency του ανιχνευτή Cerenkov, δεν έδωσαν ακτινοβολία Cerenkov, με αποτέλεσμα να δίνουν την ψευδή εντύπωση ότι είναι μη-ηλεκτρόνια. Βεβαίως, οι μορφολογικές μεταβλητές τους είναι όπως όλων των ηλεκτρονικών γεγονότων, οπότε το ANN ορθώς δεν ξεγελιέται και τα βλέπει ως ηλεκτρόνια, δίνοντας γι’ αυτά τα events output  $\approx 1$ .

Πιο αξιοπρόσεκτο είναι το πώς γίνεται και ορισμένα signals δίνουν output  $\approx 0$ . Χρησιμοποιήσαμε το πρόγραμμα DISPLAY, σε συνδυασμό με ένα άλλο μικρό πρόγραμμα που έφτιαξα ώστε να εντοπίζει την ταυτότητα (snarIno) των μυστήριων αυτών γεγονότων, προκειμένου να δούμε τη μορφή αυτών των γεγονότων.

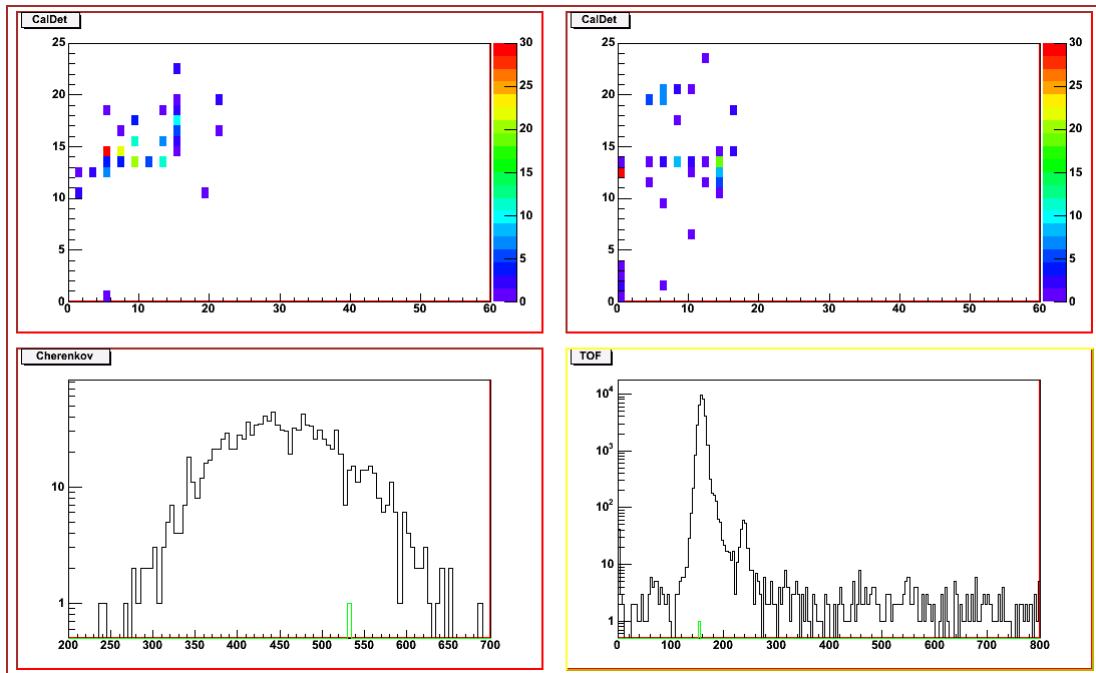


**Εικόνα 3.52α:** Παράδειγμα ενός δήθεν signal το οποίο ορθώς έδωσε output  $\approx 0$ . Μάλλον πρόκειται περί πιονίου στην πραγματικότητα.

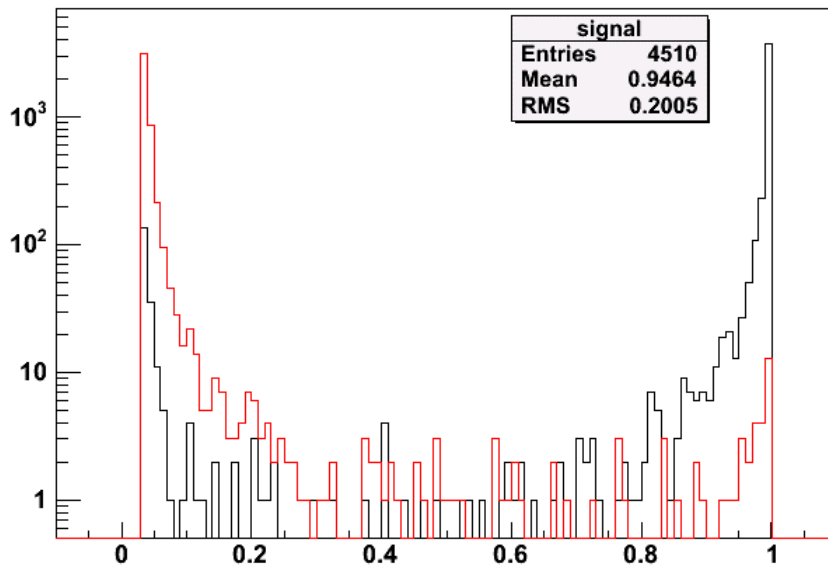
Στην εικόνα 3.52α και 3.52β φαίνονται δύο χαρακτηριστικά τέτοια γεγονότα. Το πρώτο (εικ. 3.52α) είναι εμφανές από την τοπολογία του ότι δεν είναι ηλεκτρόνιο, αλλά μάλλον πόνιο. Παρ’ όλα αυτά έχει δώσει ακτινοβολία Cerenkov για λόγο που δε μπορώ να γνωρίζω με βεβαιότητα. Στην εικόνα 3.52β έχουμε απ’ ό,τι φαίνεται μια περίπτωση σύμπτωσης δύο σωματιδίων στον ανιχνευτή. Το ένα ίσως ήταν ηλεκτρόνιο, οπότε έδωσε ακτινοβολία Cerenkov, αλλά λόγω και της παρουσίας του άλλου σωματιδίου η μορφολογία του γεγονότος έμοιαζε με μη ηλεκτρονικού γεγονότος και γι’ αυτό το ANN έδωσε output  $\approx 0$ .

### Ενέργεια 5.0 GeV – run #50557

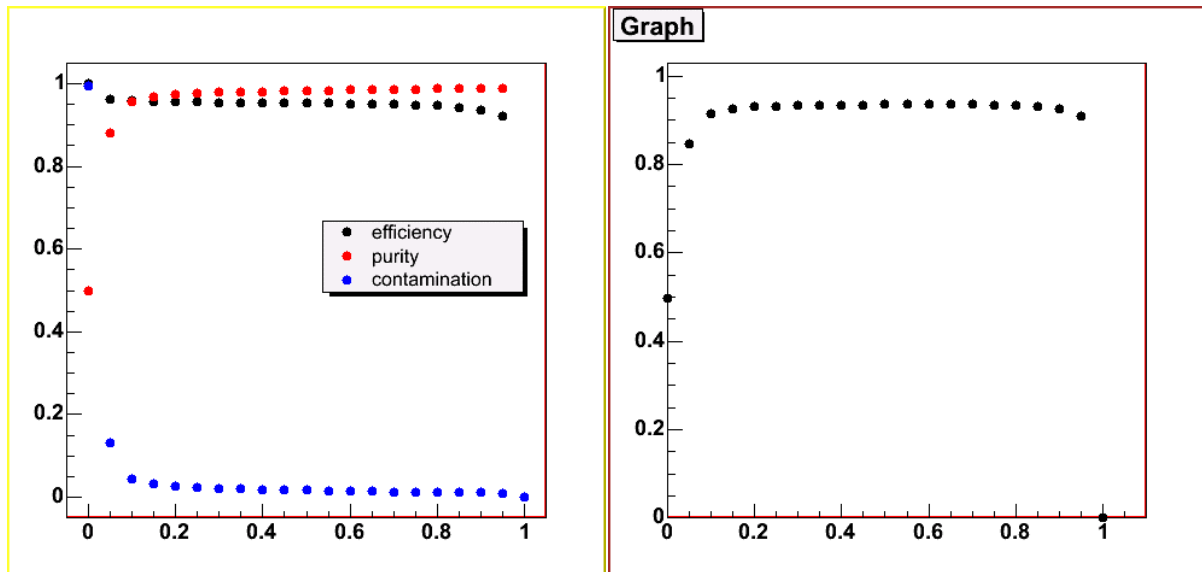
Στη run #50557 περιλαμβάνονται πληθυσμοί signal : background = 9049 : 76870. Η εκπαίδευση (equal on equal) φαίνεται στις εικόνες 3.53α και 3.53β, ενώ η εφαρμογή στο πλήρες data-set στις εικόνες 3.54α και 3.54β.



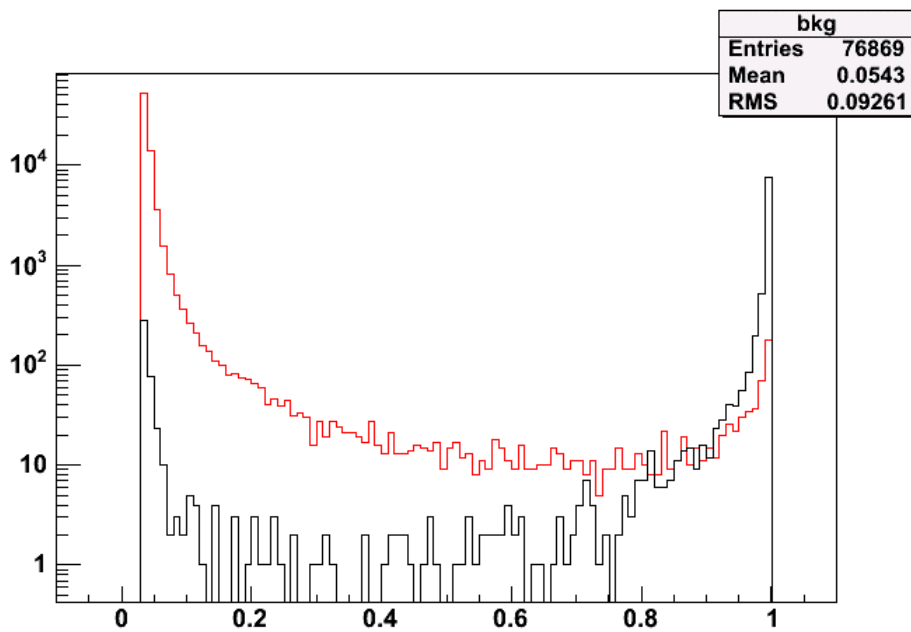
**Εικόνα 3.52β:** Παράδειγμα δήθεν ηλεκτρονίου και πάλι. Πρόκειται μάλλον περί συμπτώσεως δύο σωματιδίων εκ των οποίων το ένα έδωσε ακτινοβολία Cerenkov.



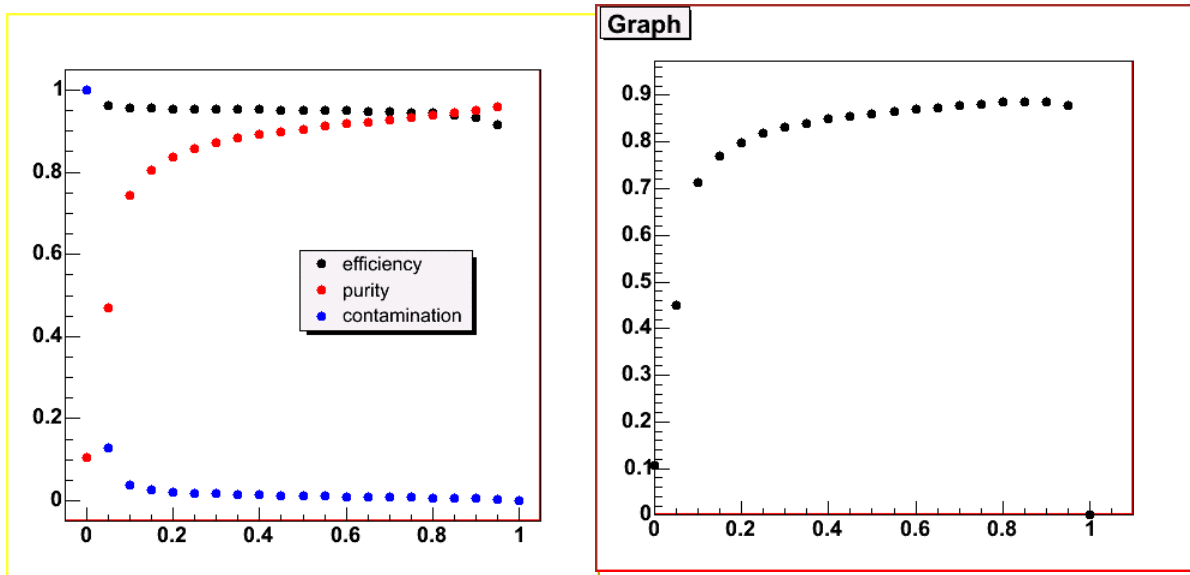
**Εικόνα 3.53α:** Το output-διάγραμμα (equal on equal) του ANN για ενέργεια 5.0 GeV.



**Εικόνα 3.53β:** Το parameters-και το area-διάγραμμα (equal on equal) του ANN για ενέργεια 5.0 GeV.

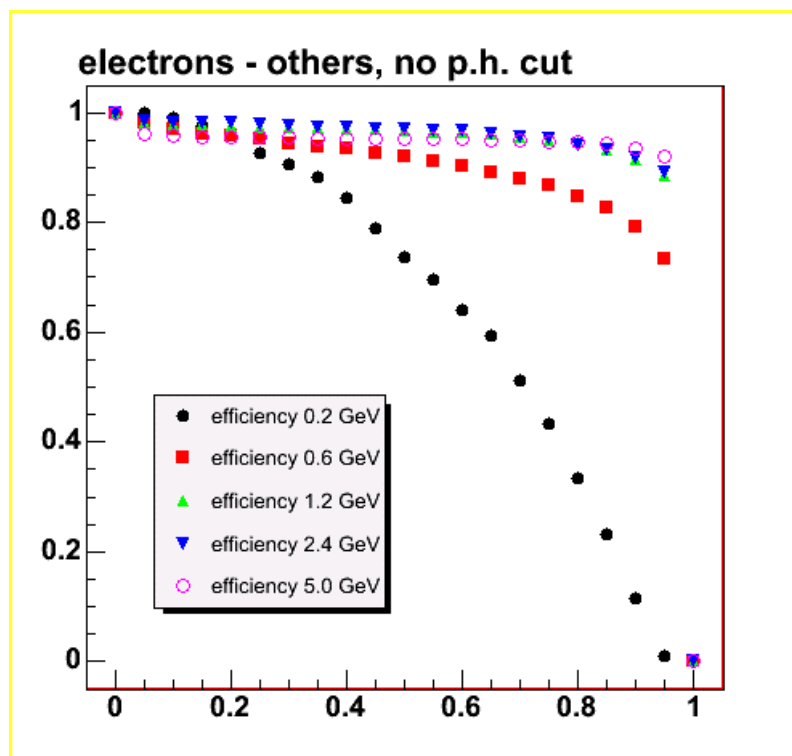


**Εικόνα 3.54α:** Το output-διάγραμμα (equal on unequal) του ANN για ενέργεια 5.0 GeV.

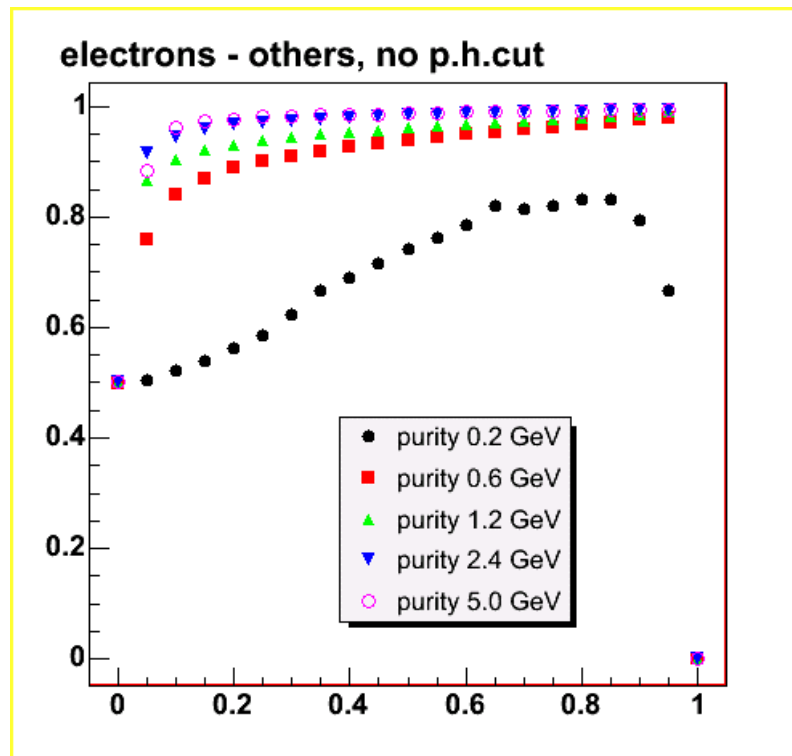


Εικόνα 3.54β: Το parameters- και το area-διάγραμμα (equal on unequal) του ANN για ενέργεια 5.0 GeV.

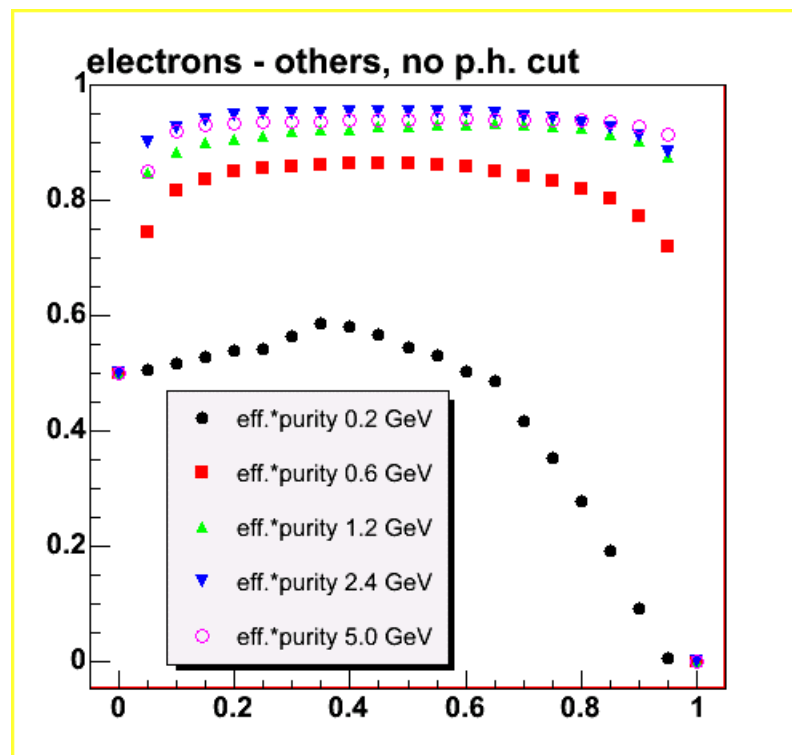
Παρατηρούμε ότι στα 5.0 GeV η efficiency και η purity είναι πολύ υψηλές, τόσο λόγω της υψηλής διαχωριστικότητας των μεταβλητών εκπαίδευσης, όσο και λόγω του επαρκούς πληθυσμού του training-set. Στις εικόνες 3.55α,β,γ βλέπουμε συγκριτικά τις παραμέτρους efficiency, purity και το γινόμενο αυτών για όλα τα παραπάνω ANNs.



Εικόνα 3.55α: Η efficiency (equal on equal) των ANNs στις 5 διαφορετικές ενέργειες.



**Εικόνα 3.55β:** Η purity (equal on equal) των ANNs στις 5 ενέργειες που μελετήσαμε.



**Εικόνα 3.55γ:** Το γινόμενο purity·efficiency (equal on equal) των ANNs στις 5 ενέργειες που μελετήσαμε.

Από τις γραφικές παραστάσεις των εικόνων 3.55α,β διαπιστώνουμε ότι η efficiency και η purity βελτιώνονται όσο μεγαλώνει η ενέργεια. Η βελτίωση από τα 0.6 GeV στα 2.4 GeV είναι πολύ σαφέστερη από τη βελτίωση από τα 2.4 GeV στα 5.0 GeV. Φαίνεται δηλαδή ότι, από μια ενέργεια και πάνω, η efficiency έχει βελτιωθεί τόσο που δεν επιδέχεται επιπλέον σα-



φή βελτίωση. Η αύξηση της efficiency και της purity με την αύξηση της ενέργειας έχει ως κύριο αίτιο τη μεγαλύτερη διαχωριστικότητα των μεταβλητών όσο αυξάνεται η ενέργεια, αφού όπως έχουμε πει η μορφολογία των γεγονότων είναι πιο ανεπτυγμένη και ευδιάκριτη σε υψηλότερες ενέργειες.

Δεν πρέπει να παραβλέπουμε ότι η σύγκριση των παραμέτρων (efficiency και purity) με μεταβλητή παράμετρο την ενέργεια ίσως είναι παραπαιστική και δεν πρέπει να υπερεκτιμείται. Ο λόγος είναι ότι, παρόλο που στις εικόνες 3.55α,β,γ δείχνουμε τις παραμέτρους αυτές πάντα κατά την εφαρμογή στο *ίσων* πληθυσμών training-set (δηλαδή equal on equal), δεν είναι σε όλες τις ενέργειες ίσα τα training-sets ούτε είναι εξίσου τέλεια η εκπαίδευση. Για παράδειγμα, ειδικά στην ενέργεια των 0.2 GeV (run #40771) το training-set είναι εξαιρετικά ολιγάριθμο συμβάλλοντας, σε συνδυασμό με τη χαμηλή διαχωριστικότητα των μεταβλητών εκπαίδευσης, στην χαμηλότερη αποδοτικότητα του ANN. Με άλλα λόγια, δεν είναι μόνο η ενέργεια που διαφοροποιεί τις παραμέτρους των διαφόρων ANNs, αλλά και άλλες συνθήκες.

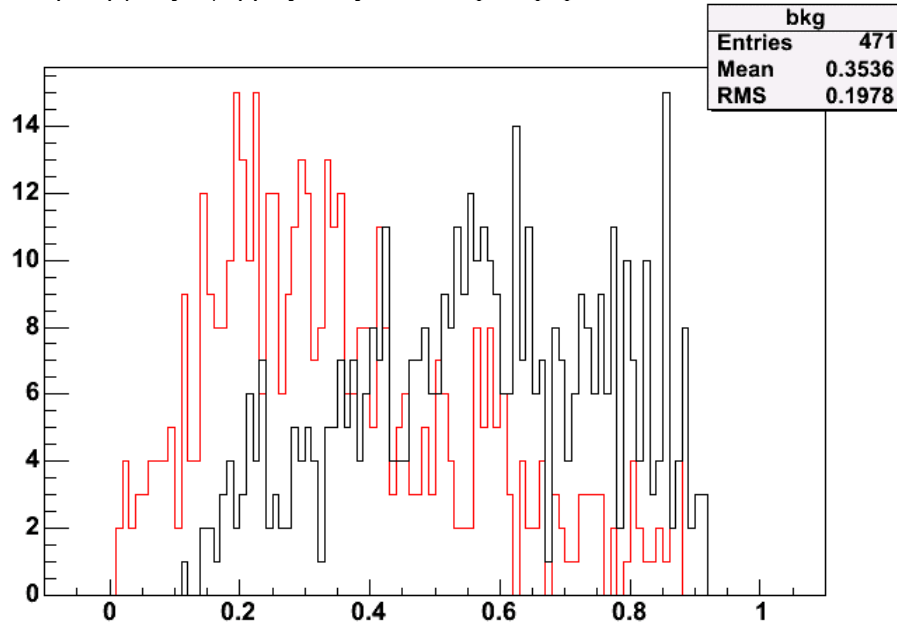
## 5. Αποτελέσματα του pulse height cut στα νευρωνικά δίκτυα

Τώρα που έχει γίνει η παρουσίαση των ANNs άνευ αφαίρεσης του cross-talk, είναι ενδιαφέρον να εξετάσουμε τα αποτελέσματα της αφαίρεσής του. Δοκιμάστηκε καθολική εφαρμογή του pulse height cut  $n_{pne} + n_{npe} > 2.0$ , δηλαδή απαιτούμε για να ληφθεί υπόψη ένα χτυπημένο strip να δίνει συνολικά και απ' τα δύο του άκρα τουλάχιστον παλμό που να ισοδυναμεί με δύο φωτοηλεκτρόνια. Κατόπιν επιλεκτικά δοκιμάσαμε το κατώφλι  $n_{pne} + n_{npe} > 5.0$ . Θα παρουσιάσουμε τις παραμέτρους των ANNs με τα δοκιμασμένα κατώφλια και στο τέλος θα επιχειρήσουμε να κάνουμε συγκρίσεις.

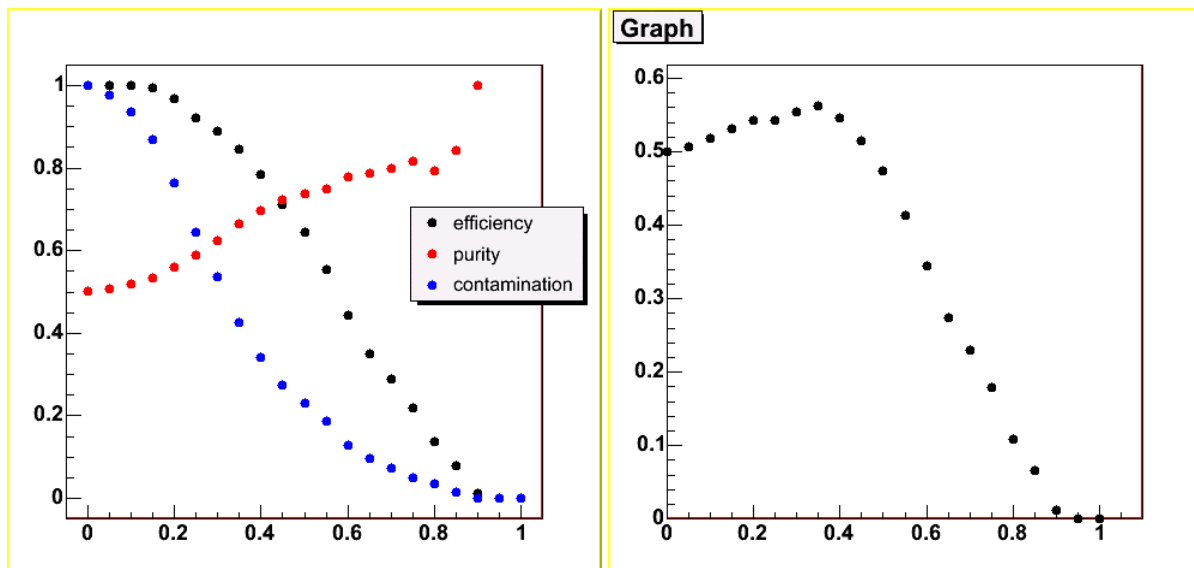
Για να γίνει εκπαίδευση και εφαρμογή των ANNs με εφαρμογή cross-talk cut απαιτείται ο επαναπροσδιορισμός ορισμένων εκ των μεταβλητών εκπαίδευσης ώστε να είναι σαφές το περιεχόμενό τους τώρα που παραλείπονται ορισμένες strips. Συγκεκριμένα, ορίζουμε

- Το `planes_mip[i]` ισούται με το άθροισμα της ενέργειας (mip) που αποτέθηκε στο επίπεδο *i* εξαιρώντας την ενέργεια των strips που δεν ξεπερνούν το κατώφλι που θέσαμε, διαιρεμένο με την ολική ενέργεια του γεγονότος, στην οποία συνολική ενέργεια συνυπολογίζεται και η ενέργεια των strips που δεν ξεπερνούν το κατώφλι. Ο λόγος που δεν παραλείπουμε από τον παρονομαστή τα strips του cross-talk είναι ότι και αυτά «κλέβουν» λίγη από την *πραγματική* ολική ενέργεια του γεγονότος.
- Το `strips_mip[i]` ορίζεται όμοια με το `planes_mip[i]`, μόνο που αντί για το επίπεδο *i* αναφέρεται σε strip υπ' αριθμόν *i*, φυσικά από 0 μέχρι και 23.
- Το `nhitstrips` είναι τώρα το άθροισμα των χτυπημένων strips που ξεπερνούν το τιθέμενο κατώφλι.
- Το `nhits` είναι το άθροισμα των hits (δηλαδή των σημάτων που λαμβάνονται ξεχωριστά απ' το κάθε άκρο μιας χτυπημένης strip) των strips οι οποίες ξεπερνούν το τιθέμενο κατώφλι. Δηλαδή, για παράδειγμα, αν μια strip χτυπηθεί και δώσει δύο hits, ένα με 0.4 φωτοηλεκτρόνια και ένα με 1.61 φωτοηλεκτρόνια, επειδή συνολικά έχουμε  $2.01 > 2$  θα καταμετρηθούν 2 hits, παρόλο που και οι δύο μεμονωμένα δεν ξεπερνούν το κατώφλι. Αν όμως μια strip δώσει δύο hits με ένταση 0.5 και 1.49 φωτοηλεκτρόνια, τότε επειδή  $1.99 < 2$  δε θα προσμετρηθεί κανένα hit στο σύνολο nhits.
- Το `nhitplanes` είναι το άθροισμα των χτυπημένων επιπέδων, αγνοώντας τις χτυπημένες strips που δεν ξεπερνούν το τιθέμενο κατώφλι.
- Το `totmip` είναι το άθροισμα της αποτιθέμενης ενέργειας του γεγονότος εξαιρουμένης αυτής που αποτέθηκε στο επίπεδο υπ' αριθμόν 0 και στις strips που δεν ξεπερνούν το τιθέμενο κατώφλι.
- Το `maxmip` είναι η ενέργεια του περισσότερο ενεργειακού hit, όπως και πριν, αλλά τώρα η σύγκριση γίνεται μόνο μεταξύ των hits που ανήκουν σε strips οι οποίες ξεπερνούν το τιθέμενο κατώφλι.

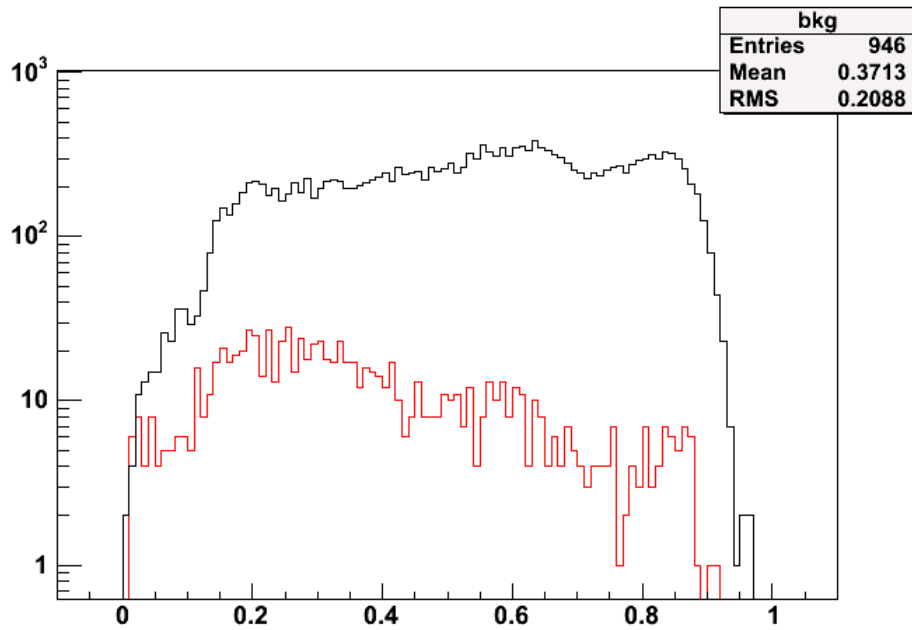
Με ελαφρώς τροποποιημένες μεταβλητές εκπαίδευσης εκπαιδεύονται νέα νευρωνικά με ίσους πληθυσμούς και εφαρμόζονται πρώτα στο training set και μετά στο πλήρες data set, ακριβώς όπως γινόταν και πριν θέσουμε κανένα pulse height cut. Ακολουθεί σειρά εικόνων όπου παρουσιάζονται τα output-διαγράμματα και οι παράμετροι των νευρωνικών δικτύων για τις 5 υπό μελέτη ενέργειες, εφαρμόζοντας το cut  $n_{pre} + p_{pre} > 2$ .



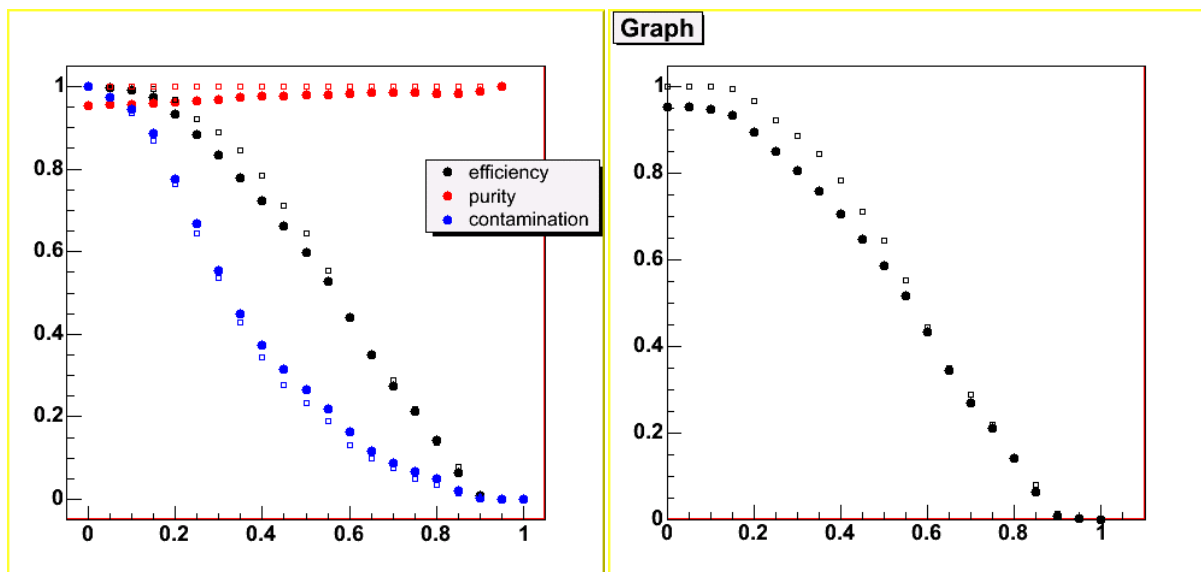
Εικόνα 3.56α: Το output-διάγραμμα (equal on equal) με  $n_{pre}+p_{pre}>2$  του ANN για ενέργεια 0.2 GeV.



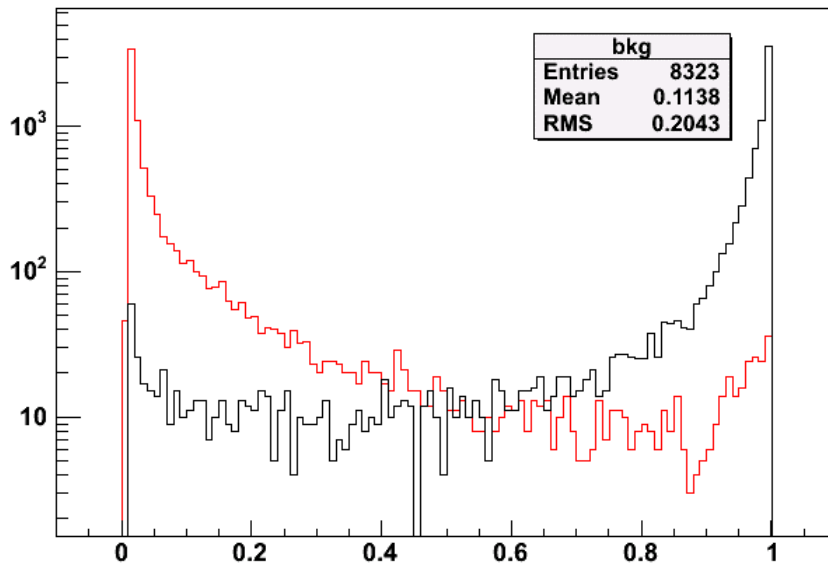
Εικόνα 3.56β: Το parameters- και το area-διάγραμμα (equal on equal) με  $n_{pre}+p_{pre}>2$  του ANN για ενέργεια 0.2 GeV.



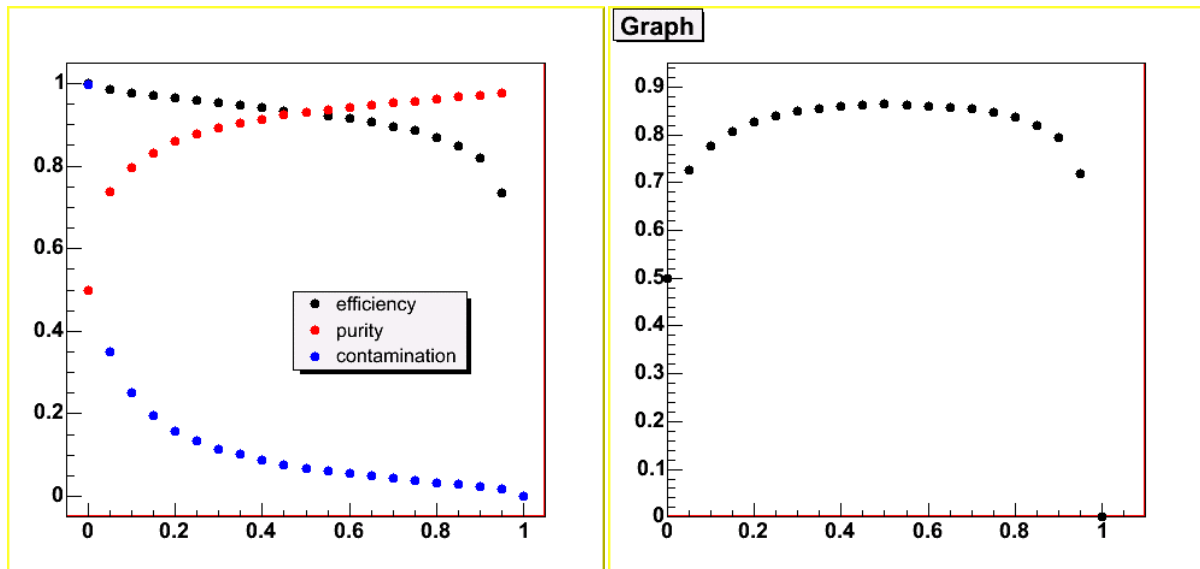
Εικόνα 3.57α: Το output-διάγραμμα (equal on unequal) με  $n_{pre}+p_{pre}>2$  του ANN για ενέργεια 0.2 GeV.



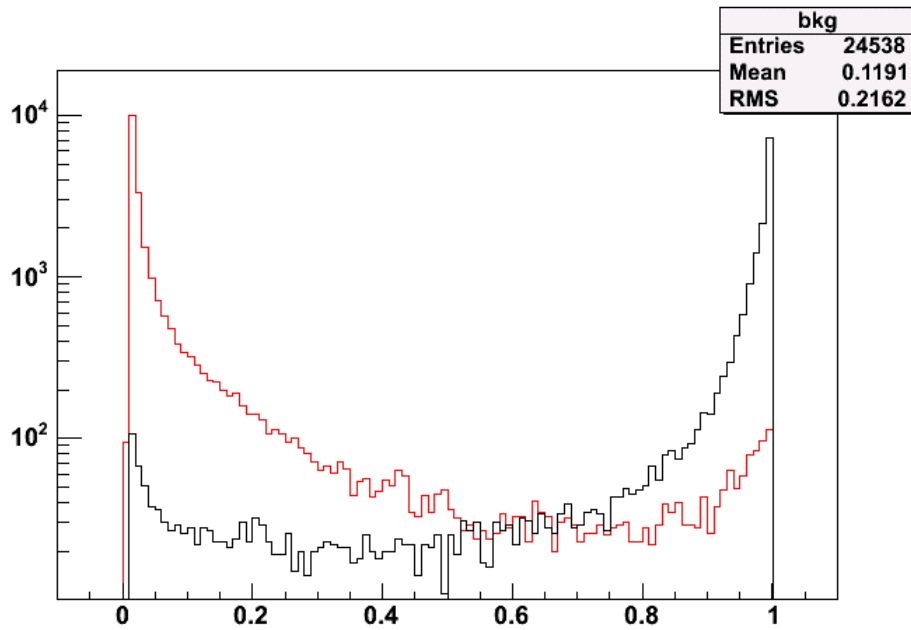
Εικόνα 3.57β: Το parameters- και το area-διάγραμμα (equal on unequal) με  $n_{pre}+p_{pre}>2$  του ANN για ενέργεια 0.2 GeV. Με τετράγωνα όμοιου χρώματος φαίνονται οι προβλεπόμενες τιμές των παραμέτρων από την equal on equal εφαρμογή.



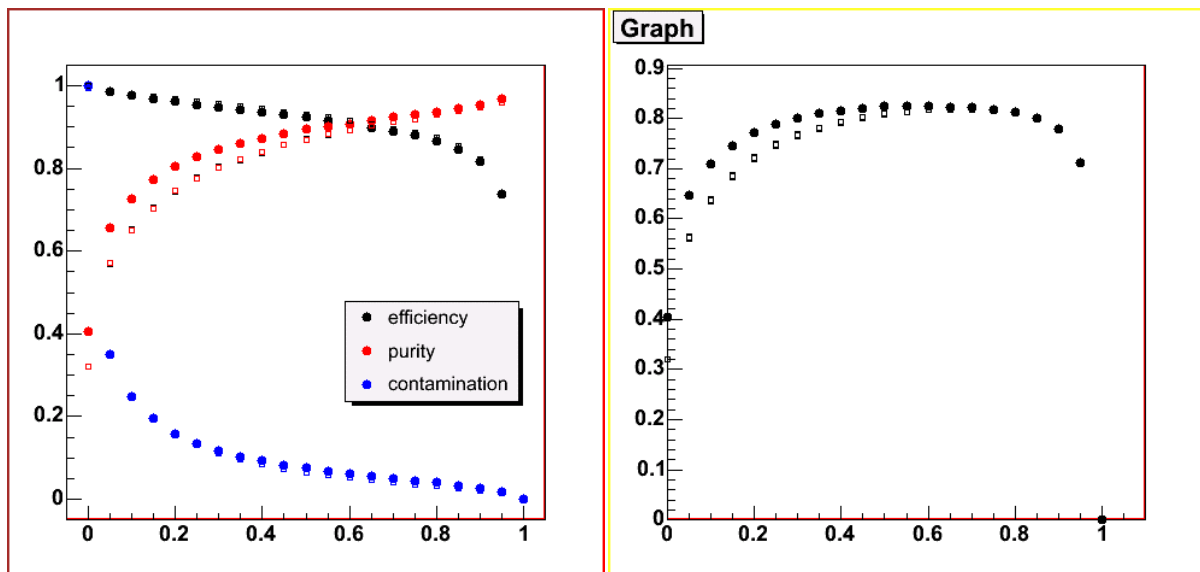
Εικόνα 3.58α: Το output-διάγραμμα (equal on equal) με  $n_{pre}+p_{pre}>2$  του ANN για ενέργεια 0.6 GeV.



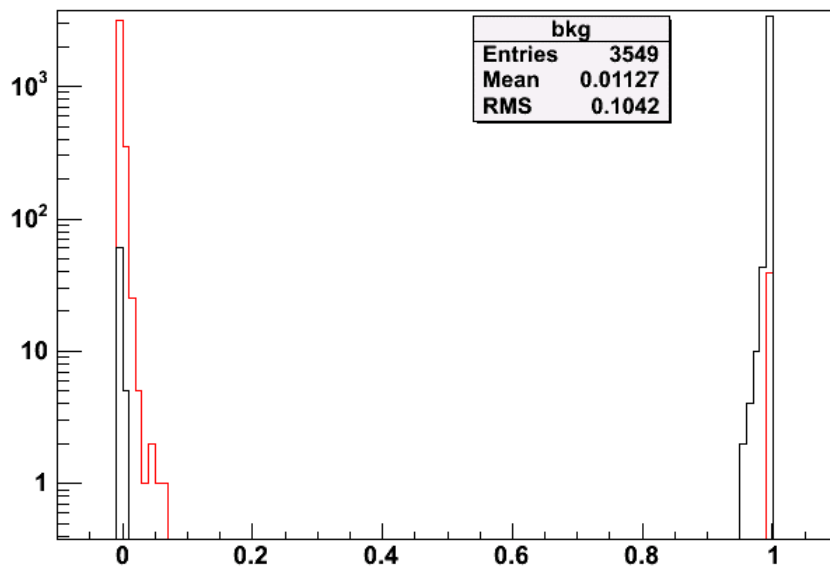
Εικόνα 3.58β: Το parameters- και το area-διάγραμμα (equal on equal) με  $n_{pre}+p_{pre}>2$  του ANN για ενέργεια 0.6 GeV.



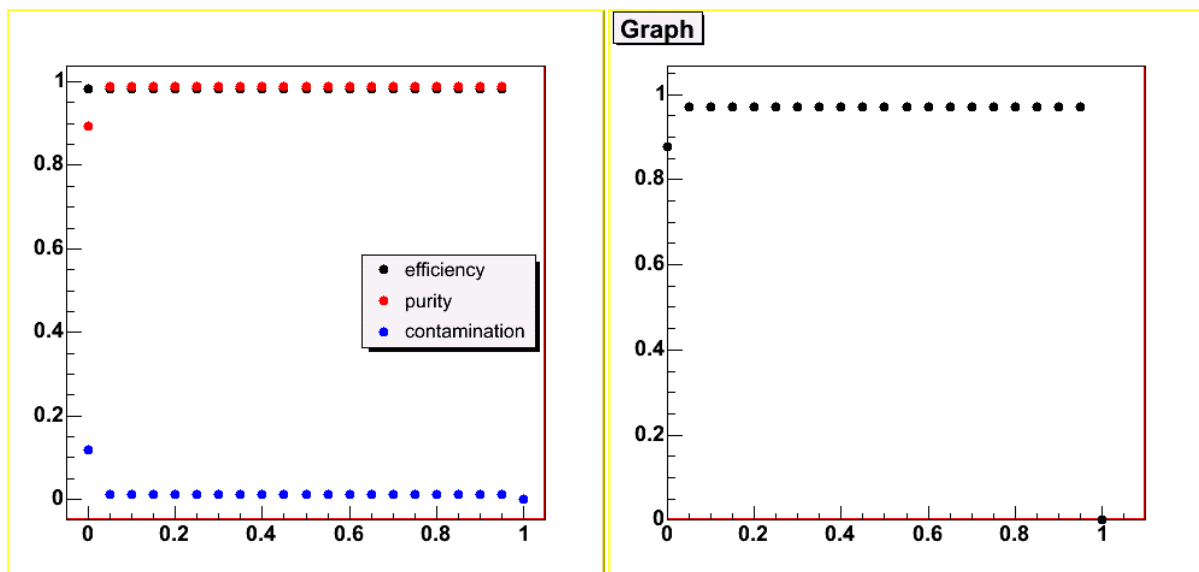
**Εικόνα 3.59α:** Το output-διάγραμμα (equal on unequal) με  $n_{pre}+p_{pre}>2$  του ANN για ενέργεια 0.6 GeV.



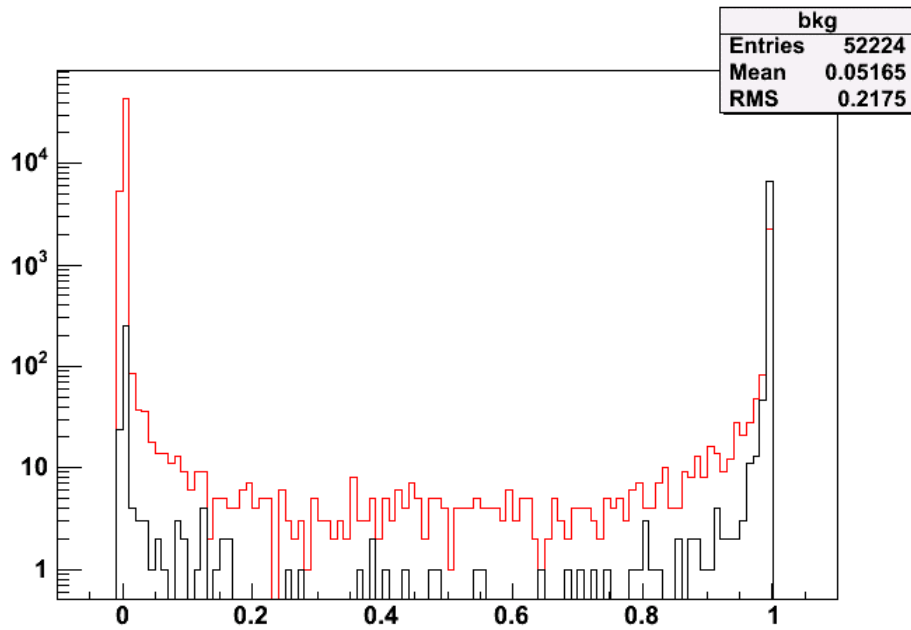
**Εικόνα 3.59β:** Το parameters- και το area-διάγραμμα (equal on unequal) με  $n_{pre}+p_{pre}>2$  του ANN για ενέργεια 0.6 GeV. Με τετράγωνα όμοιου χρώματος φαίνονται οι προβλεπόμενες τιμές των παραμέτρων από την equal on equal εφαρμογή.



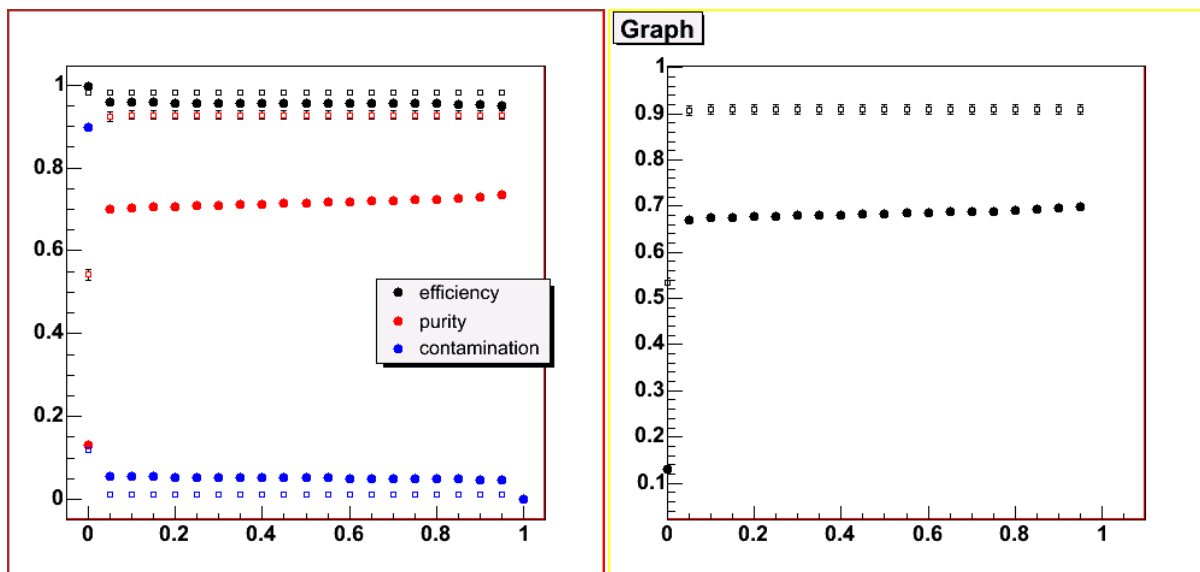
Εικόνα 3.60α: Το output-διάγραμμα (equal on equal) με  $n_{pre}+p_{pre}>2$  του ANN για ενέργεια 1.2 GeV.



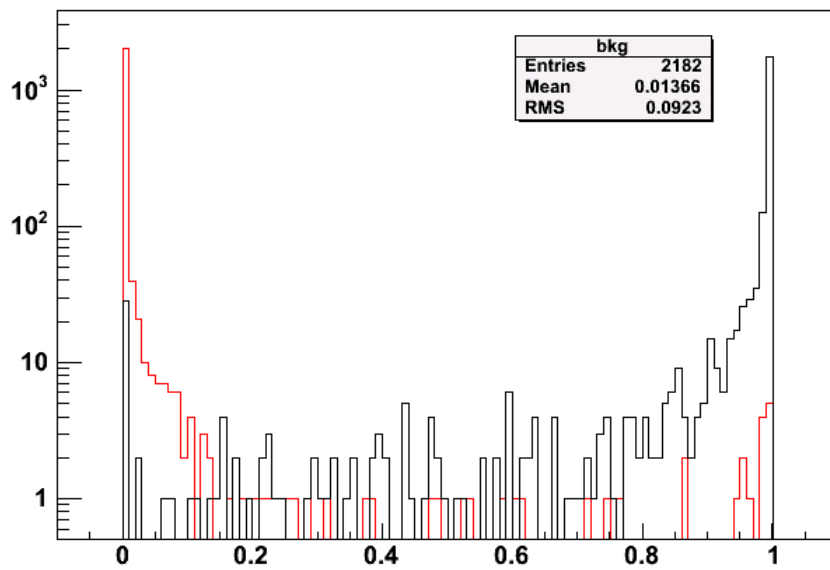
Εικόνα 3.60β: Το parameters- και το area-διάγραμμα (equal on equal) με  $n_{pre}+p_{pre}>2$  του ANN για ενέργεια 1.2 GeV.



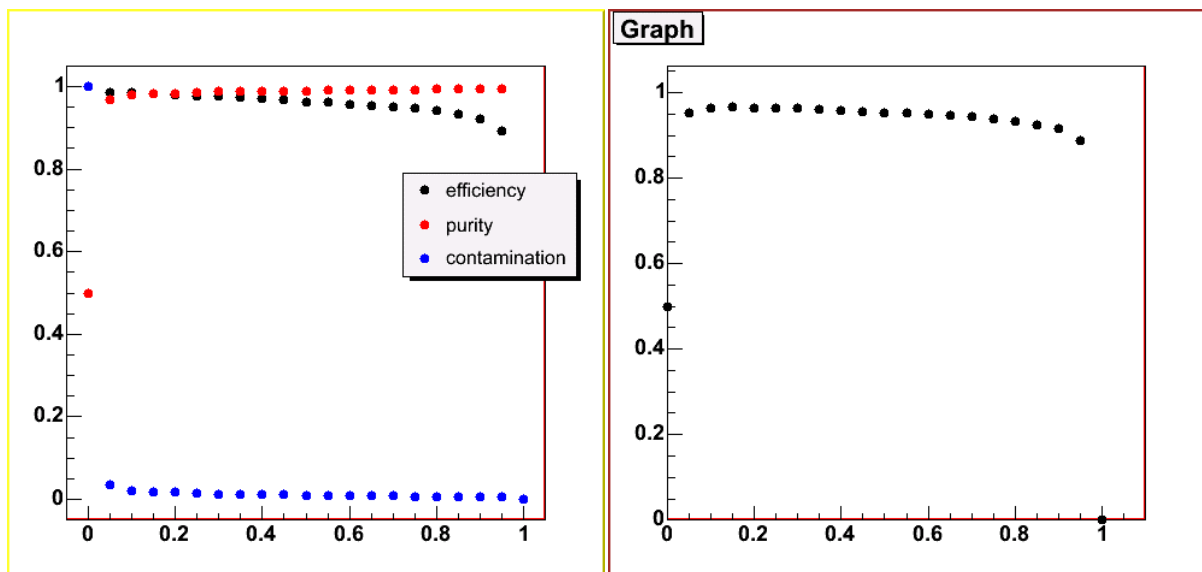
**Εικόνα 3.61α:** Το output-διάγραμμα (equal on unequal) με  $n_{pre}+p_{pre}>2$  του ANN για ενέργεια 1.2 GeV.



**Εικόνα 3.61β:** Το parameters- και το area-διάγραμμα (equal on unequal) με  $n_{pre}+p_{pre}>2$  του ANN για ενέργεια 1.2 GeV. Με τετράγωνα όμοιου χρώματος φαίνονται οι προβλεπόμενες τιμές των παραμέτρων από την equal on equal εφαρμογή.

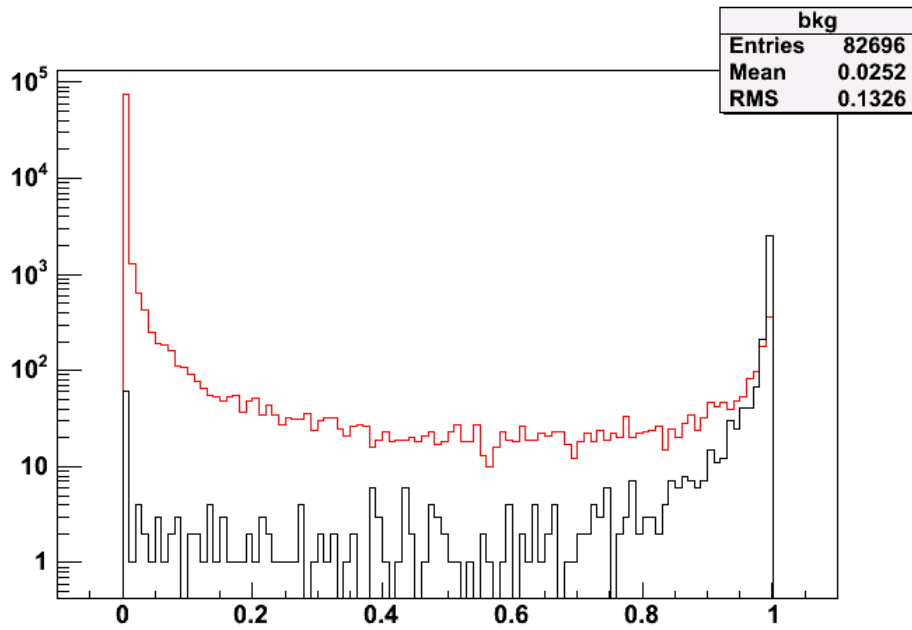


Εικόνα 3.62α: Το output-διάγραμμα (equal on equal) με  $n_{pre}+p_{pre}>2$  του ANN για ενέργεια 2.4 GeV.

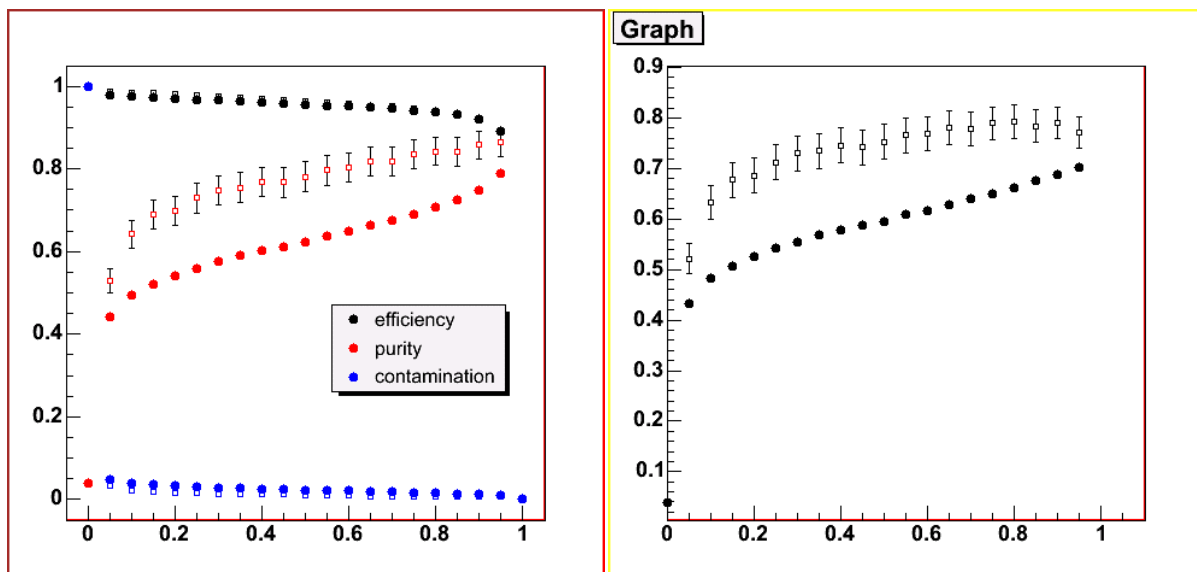


Εικόνα 3.62β: Το parameters- και το area-διάγραμμα (equal on equal) με  $n_{pre}+p_{pre}>2$  του ANN για ενέργεια 2.4 GeV.

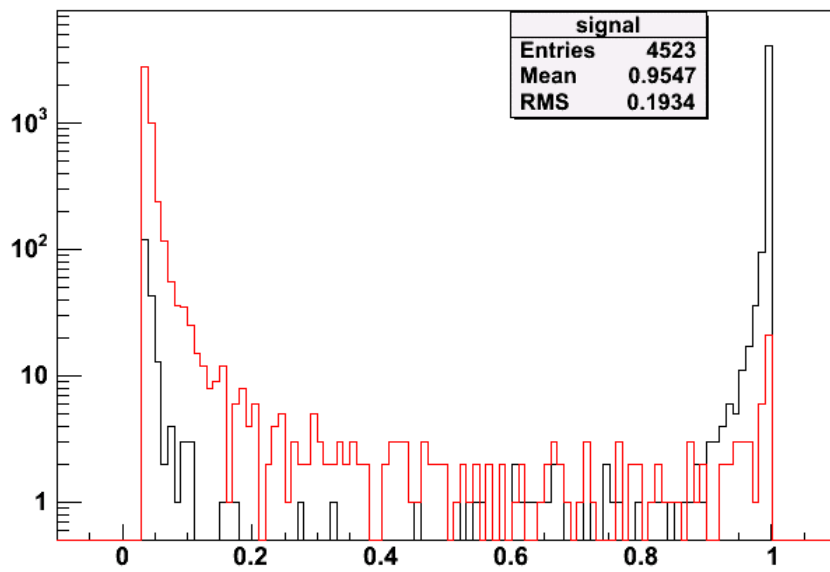




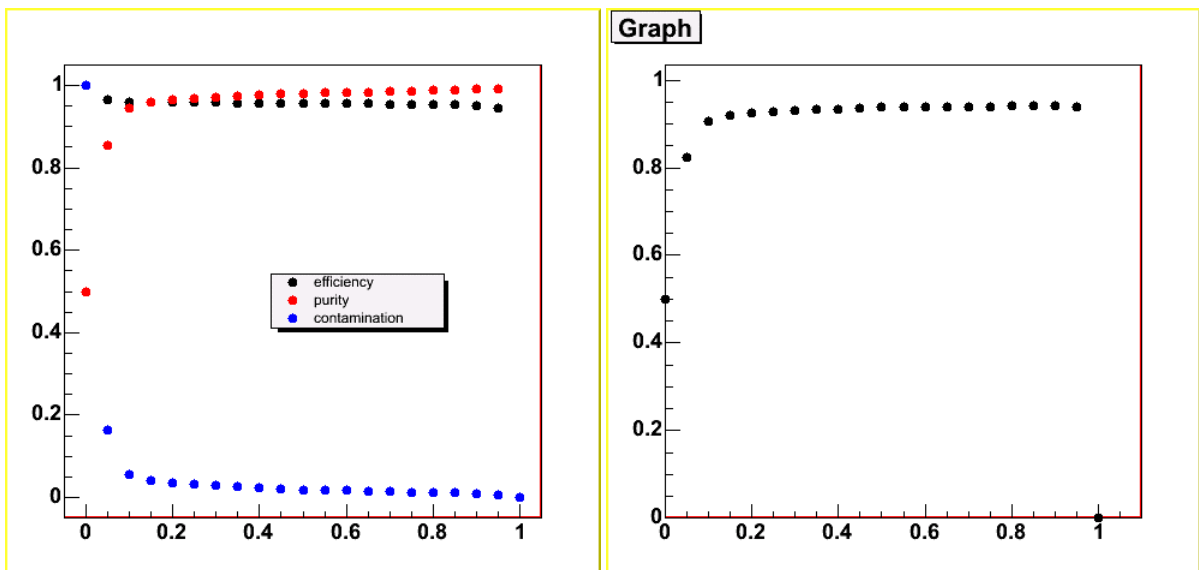
Εικόνα 3.63α: Το output-διάγραμμα (equal on unequal) με  $n_{\text{pre}}+r_{\text{pre}}>2$  του ANN για ενέργεια 2.4 GeV.



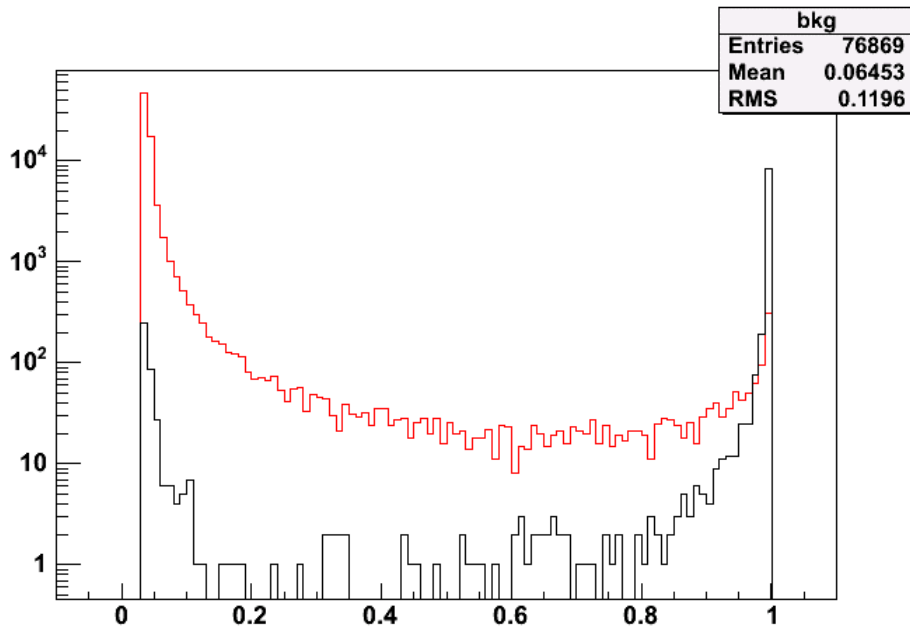
Εικόνα 3.63β: Το parameters- και το area-διάγραμμα (equal on unequal) στη run #40415 με  $n_{\text{pre}}+r_{\text{pre}}>2$  του ANN για ενέργεια 2.4 GeV. Με τετράγωνα όμοιου χρώματος φαίνονται οι προβλεπόμενες τιμές των παραμέτρων από την equal on equal εφαρμογή.



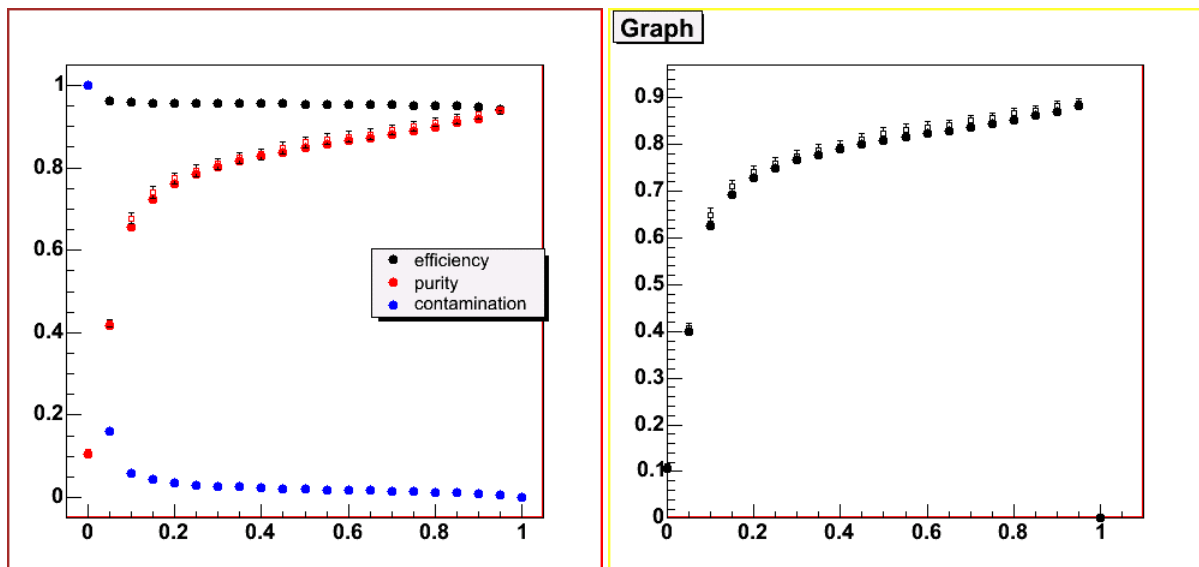
**Εικόνα 3.64α:** Το output-διάγραμμα (equal on equal) με  $n_{pre}+p_{pre}>2$  του ANN για ενέργεια 5.0 GeV.



**Εικόνα 3.64β:** Το parameters- και το area-διάγραμμα (equal on equal) με  $n_{pre}+p_{pre}>2$  του ANN για ενέργεια 5.0 GeV.

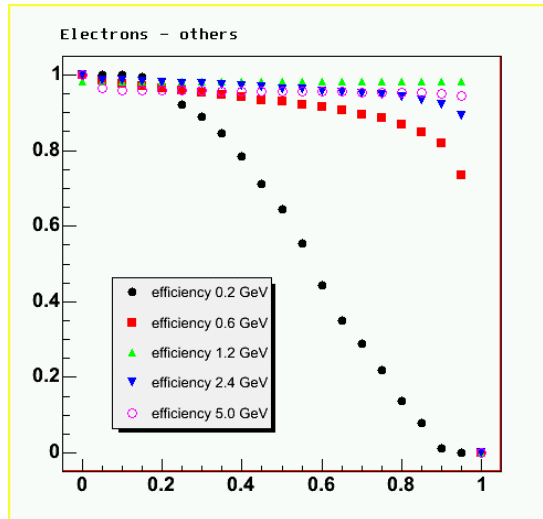


**Εικόνα 3.65α:** Το output-διάγραμμα (equal on unequal) με  $n_{pre}+p_{pre}>2$  του ANN για ενέργεια 5.0 GeV.

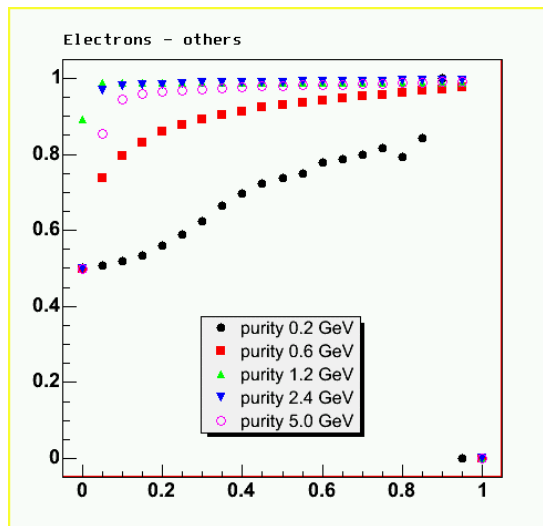


**Εικόνα 3.65β:** Το parameters- και το area-διάγραμμα (equal on unequal) με  $n_{pre}+p_{pre}>2$  του ANN για ενέργεια 5.0 GeV. Με τετράγωνα όμοιου χρώματος φαίνονται οι προβλεπόμενες τιμές των παραμέτρων από την equal on equal εφαρμογή.

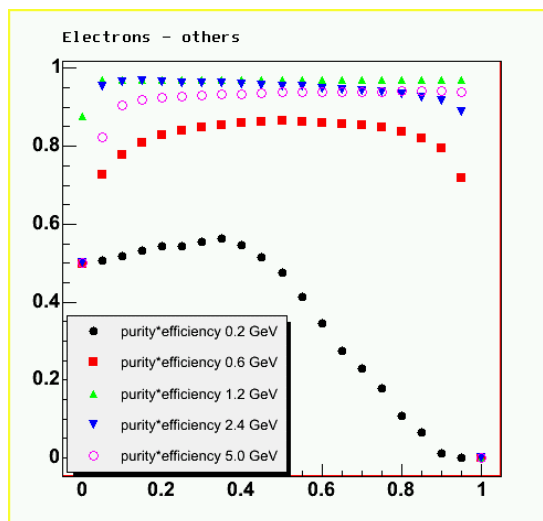
Συγκρίνοντας τις παραμέτρους των νευρωνικών όταν εφαρμόζονται σε ίσους πληθυσμούς (equal on equal) βλέπουμε ότι, όπως και όταν δεν αφαιρούσαμε το cross-talk, η efficiency βελτιώνεται όσο αυξάνεται η ενέργεια, με μόνη εξαίρεση την ενέργεια των 1.2 GeV, όπου η efficiency είναι εξαιρετικά υψηλή όπου και αν τοποθετηθεί η cut (βλ. εικόνα 3.66α). Στην εικόνα 3.66β βλέπουμε την purity όπως κυμαίνεται για τις 5 υπό εξέταση ενέργειες. Λόγω μικρού training set η ενέργεια 0.2 GeV μάλλον πρέπει να τίθεται εκτός συγκρίσεως. Εξαιρετική είναι δε η απόδοση του ANN για τα 1.2 GeV με το συγκεκριμένο cross-talk cut.



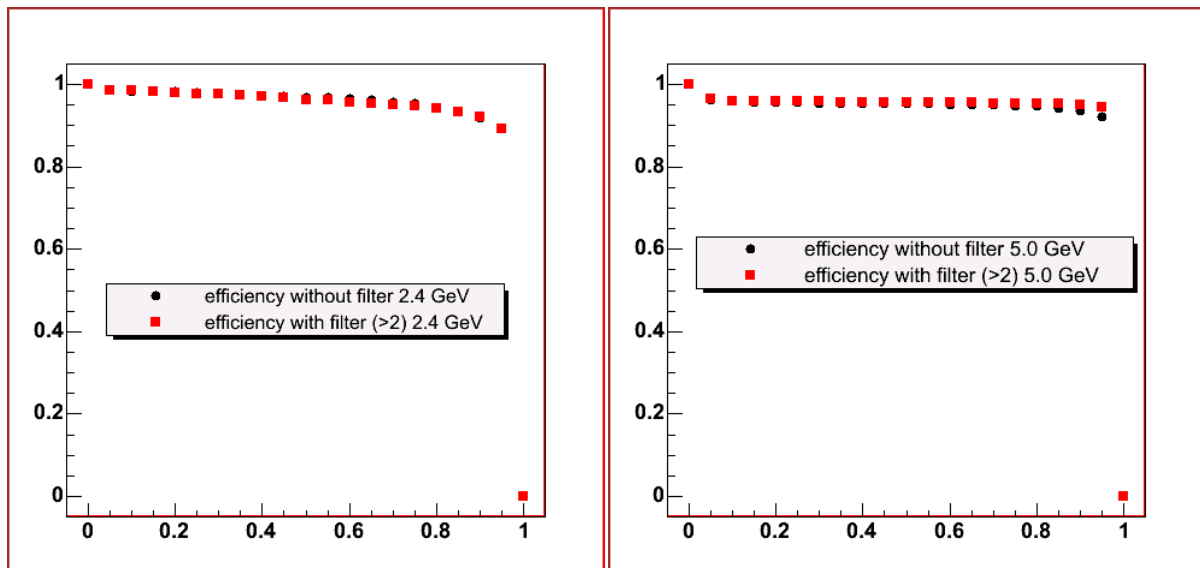
**Εικόνα 3.66α:** Η efficiency των ANNς (equal on equal) όταν επιβάλλουμε  $n_{pre}+p_{pre}>2.0$ .



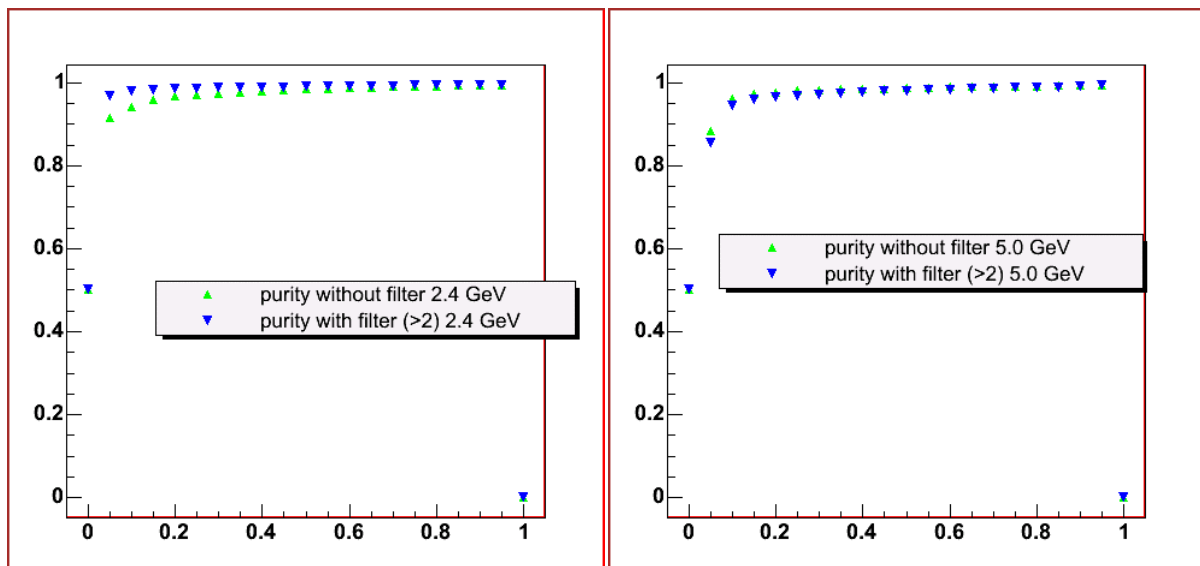
**Εικόνα 3.66β:** Η purity των ANNς (equal on equal) όταν επιβάλλουμε  $n_{pre}+p_{pre}>2.0$ .



**Εικόνα 3.66γ:** Efficiency·purity των ANNς (equal on equal) όταν επιβάλλουμε  $n_{pre}+p_{pre}>2.0$ .



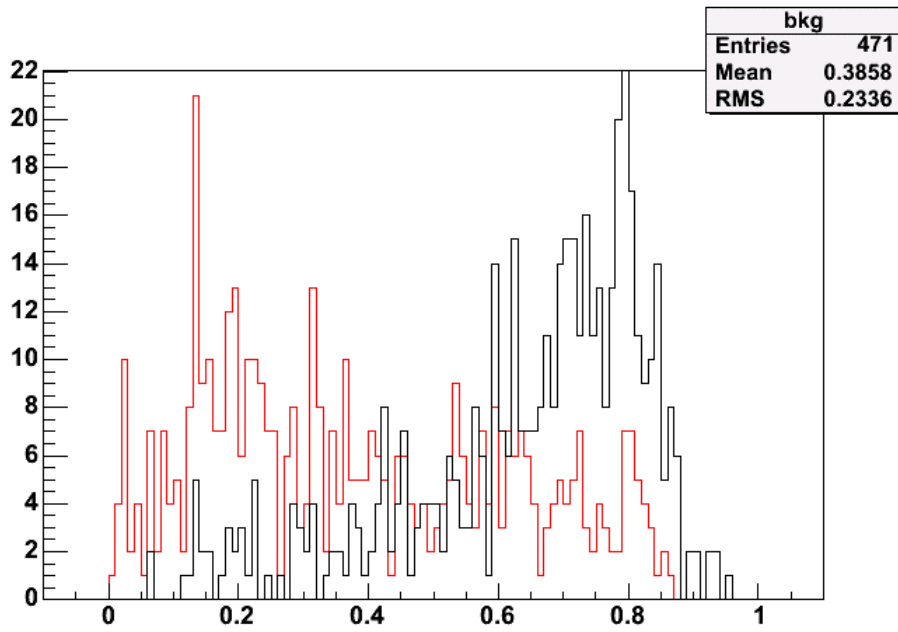
**Εικόνα 3.67α:** Σύγκριση της efficiency πριν και μετά την επιβολή του φίλτρου  $npre+nprer>2$  για την ενέργεια 2.4 GeV (αριστερά) και για 5.0 GeV (δεξιά).



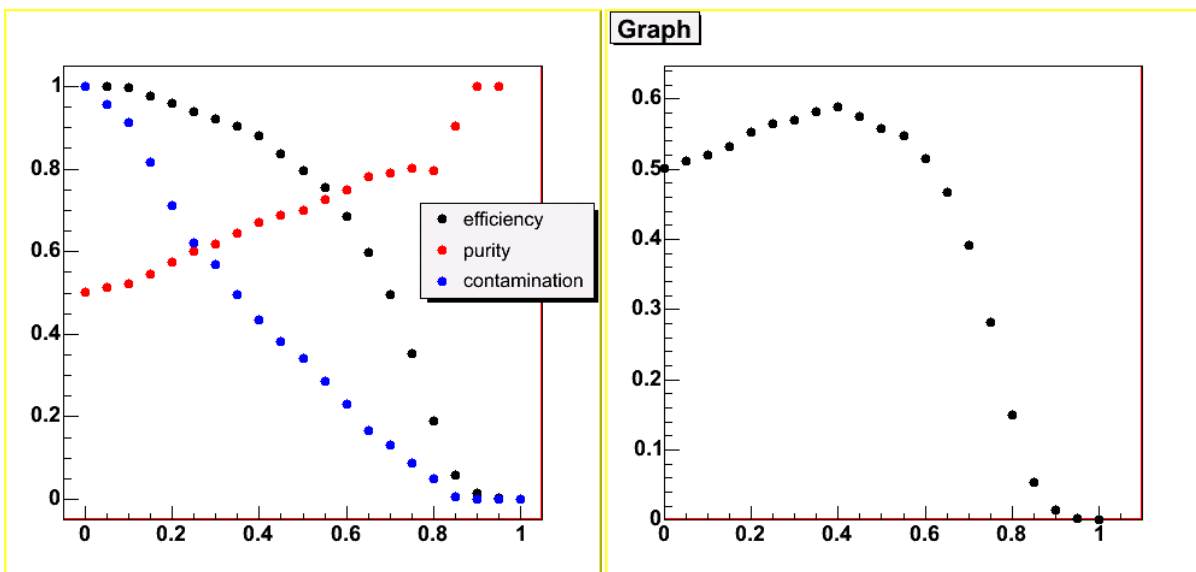
**Εικόνα 3.67β:** Σύγκριση της purity πριν και μετά την επιβολή του φίλτρου  $npre+nprer>2$  για την ενέργεια 2.4 GeV (αριστερά) και για 5.0 GeV (δεξιά).

Στις εικόνες 3.67α,β βλέπουμε το πόσο επηρεάστηκε η efficiency και η purity λόγω του φίλτρου  $npre+nprer>2$ , για ενέργεια 2.4 GeV και 5.0 GeV. Αυτό που παρατηρούμε είναι, αφ' ενός ότι η αλλαγή είναι πολύ μικρή (ειδικά στην efficiency σχεδόν δε φαίνεται) και είναι ακόμα μικρότερη στα 5.0 GeV, ενώ δεν είναι δυνατόν να διακρίνουμε εάν υπάρχει βελτίωση ή επιδείνωση. Για παράδειγμα, στην purity στα 2.4 GeV φαίνεται αισθητή βελτίωση μετά το φίλτρο, ενώ στα 5.0 GeV παρατηρείται οριακή επιδείνωση της purity.

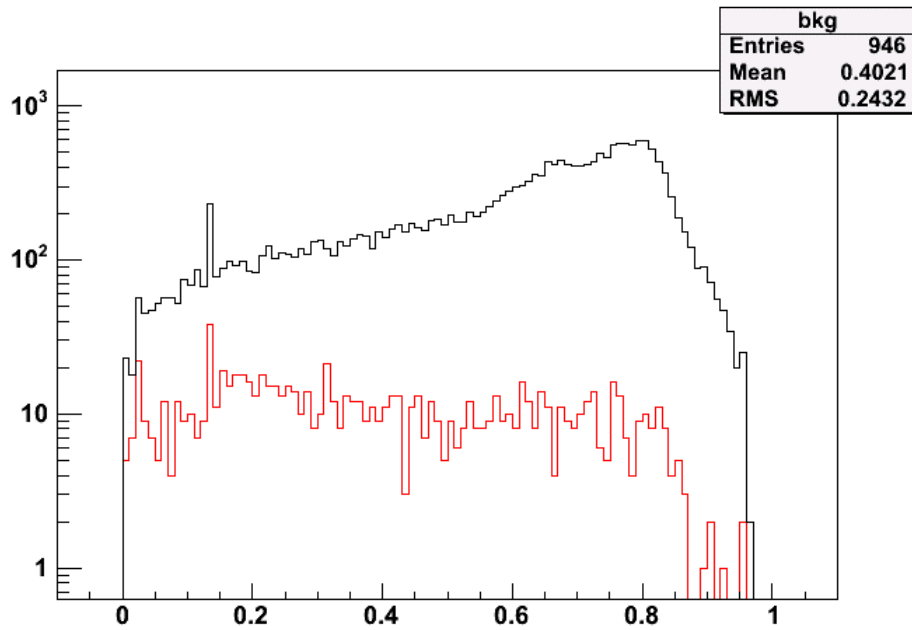
Στη συνέχεια, θα δοκιμάσουμε την εφαρμογή φίλτρου  $npre+nprer>5$ , επιλεκτικά μόνο σε δύο ενέργειες, στα 0.2 GeV (run #40771) και στα 2.4 GeV (run #40415 & #40916). Αυξάνοντας το τιθέμενο κατώφλι, αφαιρούμε μεν το cross-talk αλλά μαζί αφαιρούμε και strips που πιθανόν να χτυπήθηκαν πραγματικά από σωματίο. Όμως, αυτή η απώλεια πληροφορίας δεν επιδεινώνει απαραίτητως την αναγνωριστική δύναμη ενός ANN, όπως για παράδειγμα και ένας άνθρωπος μπορεί να αναγνωρίσει ένα πρόσωπο σε σκίτσο, ακόμα κι αν έχει χαθεί η πληροφορία του χρώματος του προσώπου ή άλλες λεπτομέρειες.



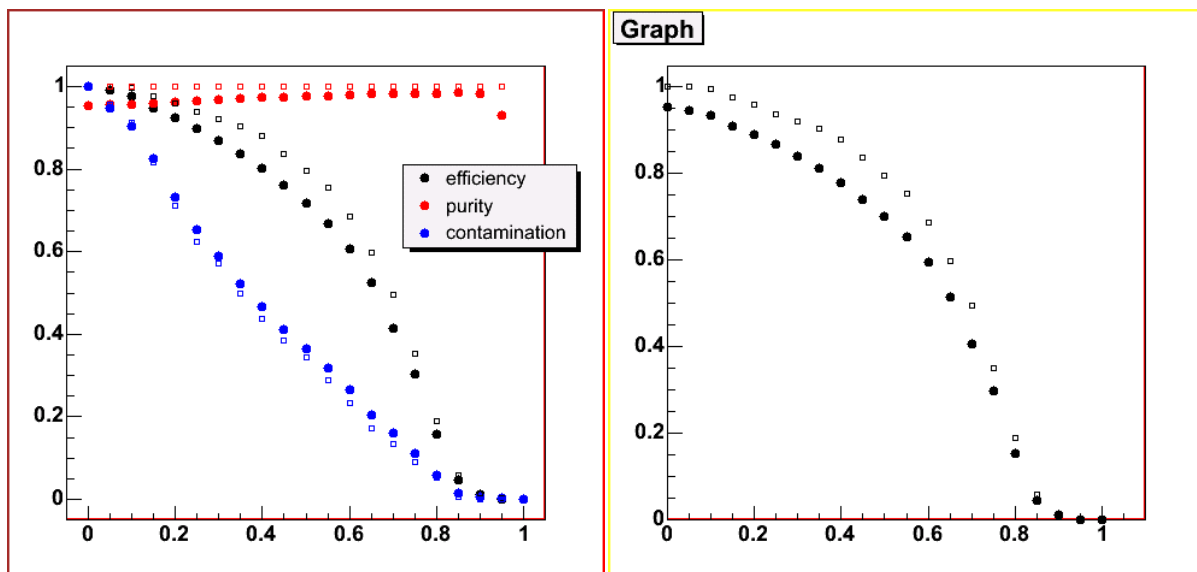
Εικόνα 3.68α: Το output-διάγραμμα (equal on equal) του ANN για ενέργεια 0.2 GeV.



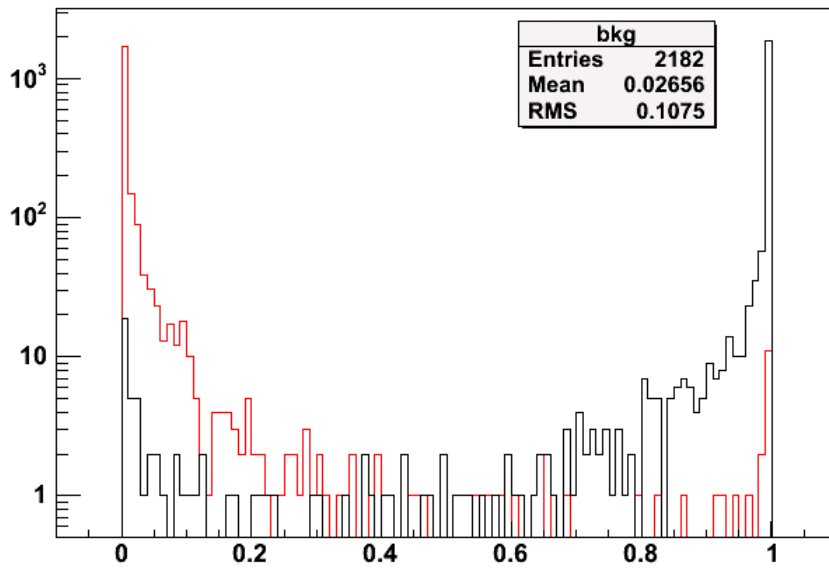
Εικόνα 3.68β: Το parameters- και του area-διάγραμμα (equal on equal) του ANN για ενέργεια 0.2 GeV.



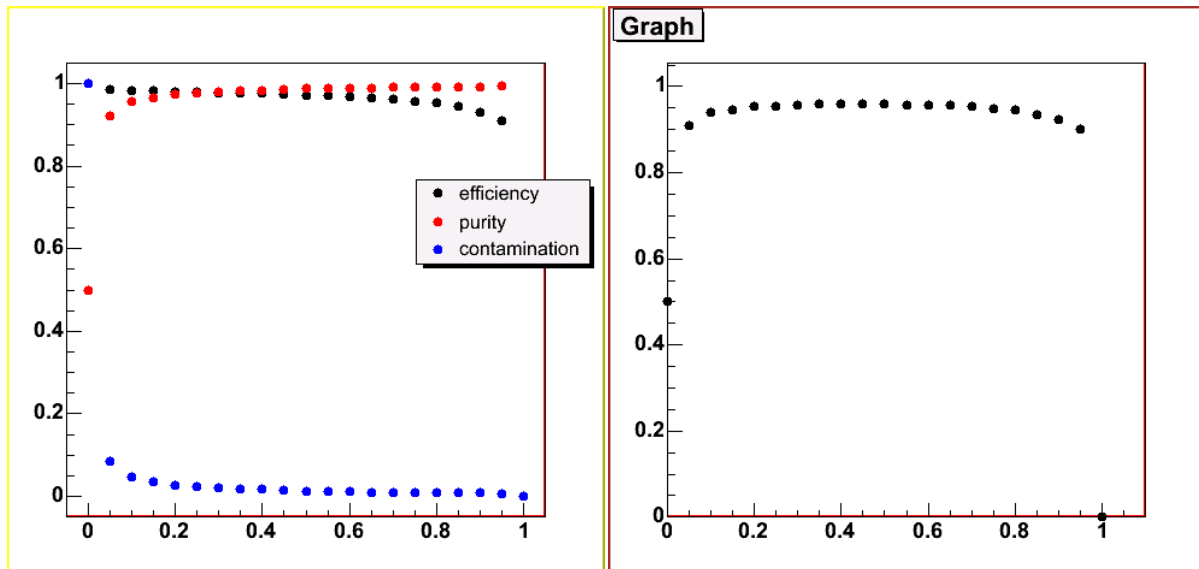
**Εικόνα 3.69α:** Το output-διάγραμμα (equal on unequal) του ANN για ενέργεια 0.2 GeV.



**Εικόνα 3.69β:** Το parameters- και το area-διάγραμμα (equal on unequal) του ANN για ενέργεια 0.2 GeV. Με όμοιου χρώματος τετράγωνα φαίνονται οι προβλεπόμενες τιμές των παραμέτρων, όπως υπολογίστηκαν από την εφαρμογή equal on equal.

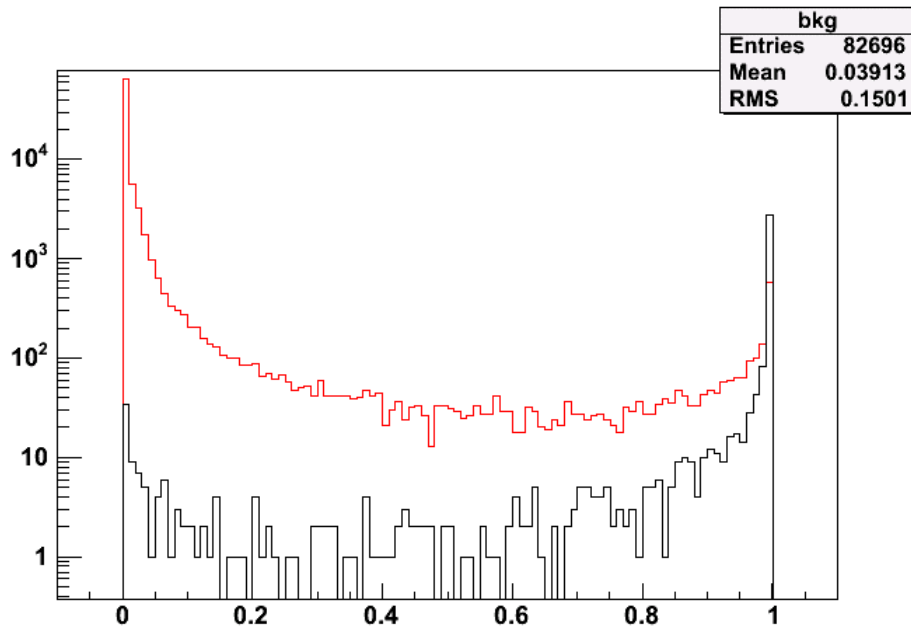


Εικόνα 3.70α: Το output-διάγραμμα (equal on equal) του ANN για ενέργεια 2.4 GeV.

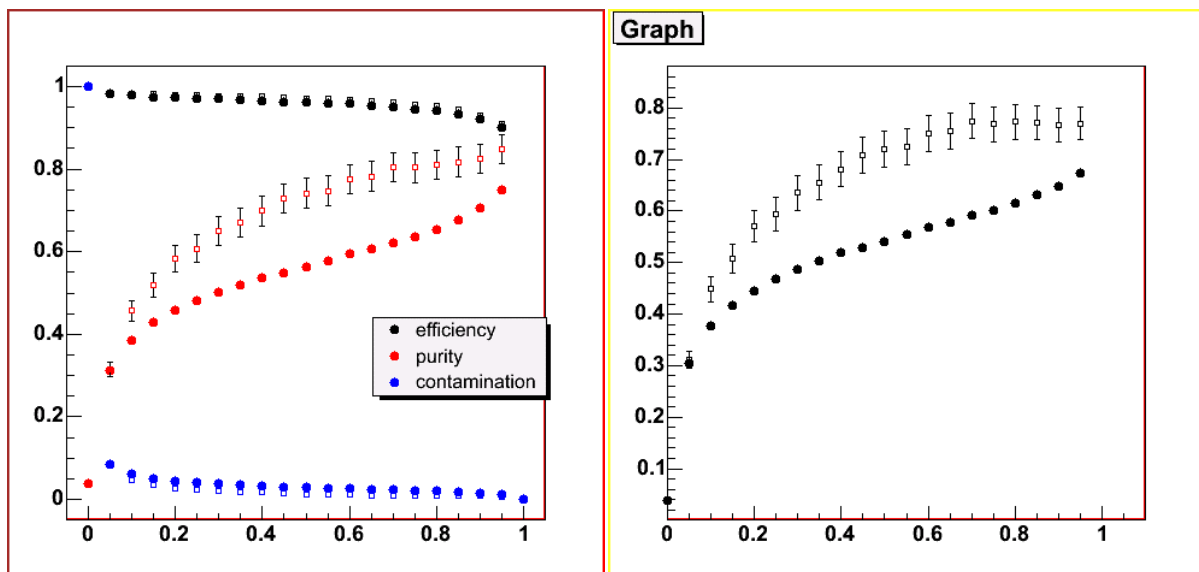


Εικόνα 3.70β: Το parameters- και του area-διάγραμμα (equal on equal) του ANN για ενέργεια 2.4 GeV.





**Εικόνα 3.71α:** Το output-διάγραμμα (equal on unequal) του ANN για ενέργεια 2.4 GeV.



**Εικόνα 3.71β:** Το parameters- και το area-διάγραμμα (equal on unequal) του ANN για ενέργεια 2.4 GeV. Με όμοιου χρώματος τετράγωνα φαίνονται οι προβλεπόμενες τιμές των παραμέτρων, όπως υπολογίστηκαν από την εφαρμογή equal on equal.

Συγκρίνοντας το κατώφλι των 5 φωτοηλεκτρονίων με το κατώφλι των 2, βλέπουμε ότι στα 2.4 GeV αύξησε ελαφρώς την efficiency, ενώ επιδείνωσε ελαφρώς την purity στις μικρές τιμές της cut. Στα 0.2 GeV, η purity αυξήθηκε για cut > 0.85 ενώ η efficiency βελτιώνεται ελαφρώς για cut  $\approx$  0.5 και επιδεινώνεται ελαφρώς για cut > 0.8. Και πάλι δεν υπάρχει καθολική και έντονη διαφοροποίηση λόγω της αύξησης του κατωφλίου.

## Τέταρτο Κεφάλαιο – Κατακλείδα

Στο τελευταίο αυτό κεφάλαιο της εργασίας θα συνοψίσουμε όσα αναπτύχθηκαν αναλυτικά στα προηγούμενα κεφάλαια και θα αναφερθούμε στο τι μπορεί να γίνει στο μέλλον ως συνέχεια.

Στο πρώτο κεφάλαιο έγινε εκτενής ανάπτυξη της θεωρίας που περιγράφει τις ταλαντώσεις νετρίνων. Εξετάσαμε τις ταλαντώσεις εν κενώ για 2 και για 3 γενεές νετρίνων, με και χωρίς υπολογιστικές προσεγγίσεις. Υπολογίσαμε ποια θα είναι η μορφή του ενεργειακού φάσματος των νετρίνων στο μακρινό ανιχνευτή εφόσον γίνονται ταλαντώσεις με ορισμένες παραμέτρους. Επιδείξαμε ότι το ταλαντωμένο φάσμα είναι εντονότερα εξαρτώμενο από την παράμετρο  $\theta_{13}$  και από τη διαφορά μάζας  $\Delta m_{32}^2$ . Κάνοντας convolution πιθανοτήτων υπολογίσαμε (χωρίς χρήση της μεθόδου Monte Carlo) το φάσμα που θα παρατηρούταν στο μακρινό ανιχνευτή λαμβάνοντας υπόψη την πεπερασμένη διακριτική ικανότητά του. Επίσης, έγινε διερεύνηση της δυνατότητας παρατήρησης της CP-παραβίασης και φάνηκε πόσο δύσκολη είναι η παρατήρησή της. Στο τελευταίο μέρος του πρώτου κεφαλαίου έγινε εκτεταμένη υπολογιστική και αναλυτική μελέτη των ταλαντώσεων νετρίνων παρουσία ύλης. Φάνηκε ότι είναι δυνατόν το πέρασμα ενός νετρίνου μέσα από διάφορες κατανομές πυκνότητας ηλεκτρονίων να επηρεάσει ριζικά τον τρόπο της μετέπειτα ταλάντωσής του. Για όλες τις παραπάνω μελέτες έχουν γραφτεί προγράμματα, κυρίως σε γλώσσα Mathematica, αλλά και σε C++, που επιτρέπουν την περαιτέρω διερεύνηση και τον πειραματισμό με διάφορες παραμέτρους και σενάρια.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάστηκαν συνοπτικά ορισμένα σημαντικά πειράματα για τη μελέτη των νετρίνων, ένα από κάθε μεγάλη συνομοταξία πειραμάτων. Δόθηκε ιδιαίτερη έμφαση στην παρουσίαση των λεπτομερειών του πειράματος MINOS και στους στόχους του. Επίσης, περιγράφηκε ο CalDet και η χρησιμότητά του.

Στο τρίτο κεφάλαιο περιγράφηκε η ανάλυση πραγματικών δεδομένων από τον CalDet, καθώς και τα περιφερειακά λογισμικά που ανέπτυξα για να διευκολύνει την ανάλυση. Συγκεκριμένα, περιέγραψα τα προγράμματα TOF και DISPLAY. Περιγράψαμε τη δομή δεδομένων με την οποία αποθηκεύεται η πληροφορία που λαμβάνεται από τον CalDet, στο βαθμό που χρειάστηκε για να γίνει κατανοητή η ανάλυση που κάναμε. Έγινε βαθμονόμηση της ηλεκτρομαγνητικής καλοριμετρικής απόκρισης του ανιχνευτή και βρήκαμε:

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\alpha}{\sqrt{E}} + \beta,$$

$$\alpha = (0.2020 \pm 0.0045) \text{ GeV}^{1/2}$$

με

$$\beta = (0.0090 \pm 0.0021)$$

Έγινε εκτεταμένη σύγκριση των events που παράγονται με Monte Carlo και των πραγματικών events του CalDet και διαπιστώσαμε ότι η συμφωνία δεν είναι απόλυτη, δηλαδή επιδέχεται σημαντική βελτίωση. Ποσοτικοποιώντας τη συμφωνία των διαφόρων κατανομών με την πιθανότητα Kolmogorov διαπιστώσαμε ότι στις διάφορες ενέργειες διαφέρουν οι μεταβλητές όπου το MC αποτυγχάνει περισσότερο.

Κατόπιν εξετάσαμε ποιες μεταβλητές είναι περισσότερο διαχωριστικές όταν θέλουμε να διαχωρίσουμε ηλεκτρόνια από μη ηλεκτρόνια. Καταλήξαμε σε ένα set 25 μεταβλητών, εκ των οποίων ορισμένες είναι έτοιμες στα root-αρχεία ενώ οι περισσότερες υπολογίζονται τοπικά. Οι μεταβλητές αυτές είναι οι: totmip, nhits, maxmip, nhits/nhitplanes, totmip/nhitplanes, planes\_mip[1,...,15], strips\_mip[9,...,13]. Αυτές δεν είναι οι μόνες διαχωριστικές μεταβλητές, ούτε είναι όλες διαχωριστικές σε όλες τις ενέργειες. Όμως, ως σύνολο, επιτρέπουν να διαχωρίζουμε ηλεκτρόνια από μη ηλεκτρόνια ικανοποιητικά ακόμα και σε μικρές ενέργειες (0.2 GeV) χωρίς να κάνουμε χρήση υπερβολικά μεγάλου πλήθους μεταβλη-

τών. Έγινε επίσης μελέτη της προσφορότερης αρχιτεκτονικής για το ANN και καταλήξαμε στην αρχιτεκτονική 25→10→5→1. Εξηγήθηκε και δικαιολογήθηκε το γεγονός ότι η πιο ενδεδειγμένη εκπαίδευση γίνεται με training set που περιέχει ίσο πλήθος signal και background patterns.

Παρουσιάστηκε ο τρόπος με τον οποίον αξιολογούνται τα διάφορα ANNs. Αναπτύχθηκε μια μέθοδος που επιτρέπει (υπό προϋποθέσεις) την πρόβλεψη των παραμέτρων ενός νευρωνικού όταν αυτό θα εφαρμοστεί σε ένα data set με γνωστό λόγο signal / background. Βασική προϋπόθεση αυτής της μεθόδου είναι ότι το output του signal και του background ακολουθούν σταθερές κατανομές που εξαρτώνται μόνο από την τελική μορφή του ANN. Αναγκαία συνθήκη για να λειτουργεί ικανοποιητικά η μέθοδος είναι να έχουμε στο training set ικανοποιητικά μεγάλο δείγμα ώστε να έχουμε καλό προσδιορισμό αυτών των κατανομών του output του ANN.

Παρατέθηκαν οι παράμετροι και οι χρησιμοποιούμενοι πληθυσμοί των ANNs που κατασκευάσαμε για διαχωρισμό ηλεκτρονίων από μη ηλεκτρόνια σε ενέργειες 0.2, 0.6, 1.2, 2.4 και 5.0 GeV. Στη συνέχεια εκπαίδευσαμε τα ίδια νευρωνικά εφαρμόζοντας pulse height threshold ίσο με 2 φωτοηλεκτρόνια και επανορίζοντας κατάλληλα τις μεταβλητές εκπαίδευσης. Επιλεκτικά εφαρμόσαμε σε 2 ενέργειες και το κατώφλι των 5 φωτοηλεκτρονίων. Παρατηρήσαμε και με τα δύο κατώφλια ότι δεν επέφεραν σαφή και καθολική η βελτίωση ή η επιδείνωση των παραμέτρων των νευρωνικών δικτύων. Δηλαδή οι παράμετροι ποιότητας βελτιώνονταν σε μια ενέργεια και επιδεινώνονταν σε μια άλλη, ή σε μια συγκεκριμένη ενέργεια μια παράμετρος βελτιωνόταν και άλλη επιδειωνόταν.

### **Προτάσεις για περαιτέρω μελέτη του θέματος**

Στο πλαίσιο μιας διπλωματικής εργασίας δε θα μπορούσε να καλυφθεί πλήρως η ανάλυση των data του CalDet. Όμως, από τη μέχρι αυτού του σημείου μελέτη μου θα μπορούσα να διακρίνω ορισμένες κατευθύνσεις στις οποίες θα έπρεπε να επεκταθεί η μελέτη. Συγκεκριμένα:

- Μπορεί να γίνει βαθμονόμηση της αδρονικής καλοριμετρικής απόκρισης και διακριτικής ικανότητας του ανιχνευτή. Για να γίνει αυτό θα υπάρχει μια επιπλέον δυσκολία, την οποία εγώ δε συνάντησα ασχολούμενος αποκλειστικά με ηλεκτρόνια: Λόγω της ποικιλίας και των μη αμελητέων τιμών των μαζών των σωματιδίων που απαρτίζουν τη δέσμη, η ορμή της δέσμης δε θα είναι απλώς ίση με την ενέργεια των σωματιδίων. Θα χρειαστεί με κάποιο κριτήριο να ξεχωρίζουμε τι είδους σωματίο είναι το καθένα (ηλεκτρόνιο, μόνιο, πόνιο κλπ) και να λαμβάνουμε υπόψη τη μάζα του στον υπολογισμό της ενέργειάς του. Αυτός ο διαχωρισμός θα μπορούσε να γίνει με τη χρήση νευρωνικών δικτύων που να κρίνουν με βάση τη μορφή των γεγονότων.
- Είναι σημαντικό να κατασκευαστούν νευρωνικά δίκτυα που να επεκτείνονται και σε διαχωρισμό άλλων σωματιδίων, εκτός από ηλεκτρονίων – μη ηλεκτρονίων. Συγκεκριμένα θα είναι χρήσιμο να διακρίνουμε πόνια, μόνια και ηλεκτρόνια, ώστε να μπορούμε να κάνουμε αναγνώριση των νετρίνων που θα ανιχνεύονται όταν θα λειτουργεί MINOS. Για να γίνει κατασκευή νευρωνικών που να διαχωρίζουν πόνια από μόνια θα πρέπει να βασιστεί κανείς σχεδόν αποκλειστικά σε δεδομένα παραγόμενα με Monte Carlo, διότι στα data είναι εξαιρετικά δύσκολος ο διαχωρισμός τους. Προϋπόθεση, όμως, για να είναι χρήσιμα τέτοια νευρωνικά, αποτελεί το να συμφωνεί όσο γίνεται περισσότερο το Monte Carlo με την πραγματικότητα.
- Όταν αρχίσει να λειτουργεί ο MINOS, τότε τα λεπτόνια και τα αδρόνια δε θα εισέρχονται στον ανιχνευτή από το κέντρο του και με γνωστή ορμή, όπως συμβαίνει στον CalDet. Γι' αυτό είναι σημαντικό το να αναπτυχθούν ANNs που να διακρίνουν σωματίδια, όχι μόνο ποικίλων ενεργειών, αλλά και προσανατολισμών. Πιθανόν κάποιος αλγόριθμος να πρέπει να εντοπίζει, από την ανάπτυξη των showers και των tracks, την αρχική κατεύθυνση του σωματίου και να εκφράζει όλες τις μορφολογικές μεταβλητές συναρτήσει αυτού του άξονα και όχι του σταθερού άξονα του ανιχνευτή.

- Σχετικά με την απομάκρυνση του cross-talk θα ήταν καλό να γίνει περισσότερο συστηματική προσπάθεια, μελετώντας ξεχωριστά σε κάθε ενέργεια το ύψος του κατωφλίου που ενδείκνυται. Είναι εύλογο, εφόσον για διαφορετικές ενέργειες σωματιδίων αποτίθεται διαφορετική ενέργεια στις strips του ανιχνευτή, να αλλάζει και το μέγεθος της ενέργειας που λοξοδρομεί δημιουργώντας το cross-talk. Επομένως, το να θέτουμε κατώφλι 2 φωτοηλεκτρονίων, για παράδειγμα, ανεξαρτήτως της ενέργειας της δέσμης, είναι κάπως εξαπλουστευτικό.
- Κάτι ακόμα που θα μπορούσε να γίνει είναι να βρεθεί ένας ακριβέστερος τρόπος πρόβλεψης των παραμέτρων ενός νευρωνικού δικτύου όταν αυτό πρόκειται να εφαρμοστεί σε άνισους πληθυσμούς signal και background. Το σημείο στο οποίο πάσχει η μέθοδος που εφάρμοσα είναι ότι προϋποθέτει καλή γνώση των κατανομών του output του signal και του background. Όταν, όμως, το training set περιέχει σχετικά μικρό πληθυσμό events, τότε υπάρχουν και bins στο output-διάγραμμα της equal on equal εφαρμογής που είναι κενές. Όταν εφαρμόζεται το ANN σε ένα μεγάλο δείγμα γεγονότων, τότε βρίσκονται γεγονότα που δίνουν output το οποίο γεμίζει και αυτές τις κενές bins, αλλάζοντας την κατανομή του output κατά τρόπο που δε μπορεί να προβλεφθεί σωστά πολλαπλασιάζοντας απλώς το ύψος όλων των bins με μια σταθερά. Μια σκέψη για μια βελτιωμένη μέθοδο είναι η εξής: Αντί να γίνεται εφαρμογή equal on equal και μετά να πολλαπλασιάζονται με τον κατάλληλο λόγο τα ύψη των bins που έχουν περιεχόμενο στο output-διάγραμμα, θα ήταν ίσως προτιμότερο να γίνεται πρώτα fit μιας πολυωνμικής συνάρτησης στο output-διάγραμμα της equal on equal εφαρμογής και στη συνέχεια να πολλαπλασιάζεται η κατανομή αυτή κατά τον κατάλληλο συντελεστή προκειμένου να προβλέψουμε το output-διάγραμμα της equal on unequal εφαρμογής. Το όφελος αυτής της μεθόδου θα ήταν ότι ακόμα και μια κενή bin, που αν πολλαπλασιάζαμε με οποιονδήποτε λόγο θα παρέμενε κενή, θα λάμβανε μια τιμή κατά το fit του πολυωνύμου, έστω και μικρότερη από 1, οπότε πολλαπλασιάζοντας κατόπιν με τον κατάλληλο συντελεστή δε θα παρέμενε κενή. Ίσως με αυτόν τον τρόπο να προβλέπεται καλύτερα το output-διάγραμμα της equal on unequal εφαρμογής.

## Παράρτημα 1 – Νευρωνικά δίκτυα

### Εισαγωγή

Τα νευρωνικά δίκτυα είναι μια τεχνολογία που γεννήθηκε και αναπτύχθηκε μέσα στον 21<sup>ο</sup> αιώνα, η οποία αποσκοπεί στη δημιουργία συστημάτων που να μιμούνται τη λειτουργία του εγκεφάλου και να εμφανίζουν νοημοσύνη. Αν και η μέχρι σήμερα ανάπτυξη δεν έχει φτάσει, ούτε καν πλησιάζει, τη συμπεριφορά του ανθρώπινου εγκεφάλου, έχουν συντελεστεί σημαντικές πρόοδοι και τα τεχνητά νευρωνικά δίκτυα χρησιμοποιούνται ήδη σε πλήθος εφαρμογών.

Σε επίπεδο αρχών, το νευρωνικό δίκτυο είναι ένας μαθηματικός τελεστής στον οποίο εισάγονται σήματα, αυτά επιδέχονται μια επεξεργασία εξαρτώμενη από τη μορφή του δικτύου και τελικά λαμβάνεται στην έξοδο του δικτύου ένα σήμα εξόδου. Ως τελεστής, το νευρωνικό δίκτυο δεν είναι απαραίτητο να έχει υλική υπόσταση, αλλά η λειτουργία του μπορεί να υπολογισθεί με αναλυτικές πράξεις. Όμως, όταν ως μαθηματική οντότητα υλοποιείται, είτε ως ηλεκτρονικός μηχανισμός, είτε ως ένα πρόγραμμα σε ηλεκτρονικό υπολογιστή, τότε η λειτουργία του μπορεί να γίνει ταχύτερη και έτσι να φανεί χρήσιμο σε τεχνολογικές ή ερευνητικές εφαρμογές.

Το βασικό χαρακτηριστικό που εμφανίζουν τα νευρωνικά δίκτυα και τα διαφοροποιεί από οποιονδήποτε άλλου είδους μαθηματικό τελεστή είναι η προσαρμοστικότητά τους. Όπως θα δούμε αργότερα, αν και η αρχιτεκτονική ενός νευρωνικού δικτύου είναι σταθερή, οι μεταβλητές που λαμβάνουν μέρος στον υπολογισμό του σήματος εξόδου αλλάζουν, τροποποιώντας έτσι τη λειτουργία του νευρωνικού δικτύου. Δηλαδή το νευρωνικό δίκτυο λειτουργεί ως ένας ρυθμιζόμενος τελεστής. Το ενδιαφέρον που παρουσιάζουν τα νευρωνικά δίκτυα έγκειται στο ότι είναι δυνατόν να εκπαιδευτούν, δηλαδή να προσαρμόσουν τη λειτουργία τους ώστε να επιτελούν ένα συγκεκριμένο έργο, εφόσον τούς το επιτρέπει η αρχιτεκτονική τους, χωρίς να είναι εξ αρχής ρυθμισμένα ώστε να το επιτελούν. Δηλαδή, το ίδιο νευρωνικό δίκτυο, με παράλλαξη αρχιτεκτονική, κατόπιν διαφορετικής εκπαίδευσης μπορεί να προσαρμοστεί στο να εκτελεί διαφορετικές λειτουργίες. Κατόπιν καλής εκπαίδευσης εμφανίζει μια περιορισμένη αλλά πολλές φορές χρήσιμη δυνατότητα γενίκευσης που, σε συνδυασμό με τη δυνατότητα μάθησης, παραπέμπει σε μια πρώιμη τεχνητή νοημοσύνη.

Τα δομικά στοιχεία ενός νευρωνικού δικτύου είναι αρκετά απλή. Αυτά είναι α) οι νευρώνες και β) οι συνάψεις. Οι νευρώνες λειτουργούν ως υπολογιστικές μονάδες, ο καθένας ανεξάρτητα από τους άλλους, και αυτό που κάνουν είναι να συλλέγουν ορισμένα σήματα εισόδου, να δρουν σε αυτά με μια προκαθορισμένη και αμετάβλητη συνάρτηση και να παράγουν ένα σήμα εξόδου. Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται *συνάρτηση δραστηριοποίησης (activation function)*. Οι συνάψεις είναι τα όργανα που μεταφέρουν τα διάφορα σήματα από νευρώνα σε νευρώνα. Όπως οι νευρώνες φέρουν μια χαρακτηριστική συνάρτηση, έτσι και κάθε σύναψη φέρει έναν αριθμό που λέγεται βάρος. Το βάρος, όμως, σε αντίθεση με τη συνάρτηση του νευρώνα, είναι μεταβλητό. Ο ρόλος του βάρους είναι ότι κάθε σήμα που μεταφέρει μια σύναψη πολλαπλασιάζεται με αυτό πριν φτάσει στον προορισμό του.

Όταν μιλάμε για την «αρχιτεκτονική» του νευρωνικού δικτύου εννοούμε το πόσους νευρώνες περιλαμβάνει, με τι τρόπο είναι συνδεδεμένοι μέσω των συνάψεων και τι συναρτήσεις φέρουν. Η αρχιτεκτονική είναι ένα χαρακτηριστικό του δικτύου που δε μεταβάλλεται. Το μόνο που αλλάζει σε ένα δίκτυο είναι τα βάρη με τα οποία πολλαπλασιάζουν οι διάφορες συνάψεις τα σήματα που μεταδίδουν. Οι δυνατότητες ενός νευρωνικού δικτύου περιορίζονται από την αρχιτεκτονική του. Δηλαδή, αν η αρχιτεκτονική ενός δικτύου είναι φτωχή, είναι αδύνατον, όσο καλά και αν το εκπαιδεύσουμε, να παίξει το ρόλο ενός πολύπλοκου τελεστή. Αν από την άλλη ένα δίκτυο είναι υπερβολικά πολύπλοκης αρχιτεκτονικής και επιθυμούμε να το εκπαιδεύσουμε για να τελεί μια απλή λειτουργία, τότε η εκπαίδευση καθίσταται περίσσια χρονοβόρα και δύσκολη, ενώ ο τελικός σκοπός μπορεί και να μην επιτευχθεί, λόγω κάποιας επιπλοκής στην εκπαίδευση.

Εφόσον το μόνο που αλλάζει σε ένα νευρωνικό δίκτυο είναι τα βάρη, ευνόητο είναι με τον όρο «εκπαίδευση» να εννοούμε τη ρύθμιση των βαρών μέσω ενός εκπαιδευτικού αλγορίθμου. Υπάρχουν δύο βασικά είδη εκπαίδευσης, εκ των οποίων το πρώτο μόνο θα μας απασχολήσει: α) η επιβλεπόμενη εκπαίδευση και β) η εκπαίδευση άνευ διδασκάλου. Για τη δεύτερη θα περιοριστούμε στο να αναφέρουμε ότι πρόκειται για την αυτοεκπαίδευση του δικτύου ώστε να βρίσκει καλύτερους τρόπους να κάνει μια δουλειά. Για παράδειγμα, έστω ένα ρομπότ που κατευθύνεται από ένα αυτοεκπαιδευόμενο νευρωνικό δίκτυο. Στην αρχή το ρομπότ δεν ξέρει ποια είναι τα όρια του δωματίου στο οποίο βρίσκεται, οπότε προσκρούει συχνά σε εμπόδια. Μέσω της αυτοεκπαίδευσης, μετά από αρκετές δοκιμές, το ρομπότ «μαθαίνει» που βρίσκονται τα όρια στα οποία μπορεί να κινείται και καταφέρνει να πηγαίνει από σημείο σε σημείο χωρίς να χτυπά πάνω σε εμπόδια. Αντιλαμβάνεται κανείς το πόσο σημαντικό επίτευγμα είναι η κατασκευή αυτοεκπαιδευόμενων συστημάτων, αφού και τα έμβια όντα σε μεγάλο βαθμό αυτοεκπαιδούνται μέχρι να αποκτήσουν τις περισσότερες ικανότητές τους, όπως για παράδειγμα το περπάτημα.

Η μέθοδος εκπαίδευσης που θα περιγράψουμε λεπτομερώς είναι η λεγόμενη επιβλεπόμενη εκπαίδευση, η οποία ακολουθεί τη μέθοδο της διδασκαλίας δια των παραδειγμάτων. Αυτή η μορφή εκπαίδευσης είναι η καταλληλότερη για τη δουλειά που ονομάζεται *αναγνώριση προτύπων* (pattern recognition). Κεντρική ιδέα αυτού του τύπου διδασκαλίας είναι ότι προμηθεύω στο αρχικά ανεκπαιδευτο νευρωνικό δίκτυο ένα σύνολο εισόδων που συνοδεύονται από την σωστή-επιθυμητή έξοδο του νευρωνικού. Κάθε φορά που το νευρωνικό βλέπει ένα τέτοιο παράδειγμα συγκρίνει την έξοδό του με την επιθυμητή έξοδο και προσαρμόζει τα βάρη του ανάλογα με το πόσο απέχει η απάντησή του από τη σωστή. Ο τρόπος με τον οποίο ρυθμίζονται τα βάρη είναι αρκετά πολύπλοκος και αποτελεί ένα ευφύεστατο αλγόριθμο που ονομάζεται back-propagation.

Όσον αφορά στην αρχιτεκτονική, έχουν αναπτυχθεί ποικίλες δομές νευρωνικών δικτύων. Ένα κοινό χαρακτηριστικό όλων σχεδόν των σχεδίων είναι ότι οι νευρώνες είναι διατεταγμένοι κατά στρώματα. Αυτή η δομή είναι εμπνευσμένη από τη λειτουργία του ανθρώπινου εγκεφάλου, όπου τα σήματα φαίνεται να διαβιβάζονται από φλοιό σε φλοιό. Κάθε στρώμα περιέχει ένα πλήθος νευρώνων που όλοι ταυτόχρονα δέχονται τα σήματα εισόδου τους, κάνουν παράλληλα την επεξεργασία αυτών και ταυτόχρονα εξάγουν τα αποτελέσματά τους προς το επόμενο στρώμα. Δηλαδή σε κάθε στρώμα του νευρωνικού δικτύου συντελείται αυτό που ονομάζεται παράλληλη επεξεργασία (parallel processing).

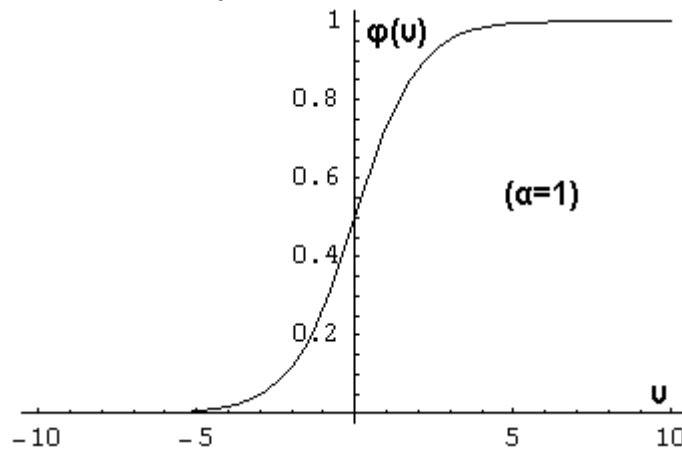
Κατά κανόνα υπάρχει ένα στρώμα το οποίο αποτελείται από αδρανείς νευρώνες, δηλαδή νευρώνες που εξάγουν ανέπαφο το εισαγόμενο σήμα, και χρησιμοποιείται ως στρώμα εισόδου του νευρωνικού. Δηλαδή, σε κάθε νευρώνα του στρώματος εισόδου φτάνει ένα σήμα εισόδου και κατόπιν όλα αυτά τα σήματα διαδίδονται μέσω συνάψεων στο επόμενο στρώμα του δικτύου. Υπάρχουν περιπτώσεις δικτύων όπου υπάρχει ανάδραση στην είσοδο, δηλαδή στο στρώμα εισόδου φτάνουν σήματα εξόδου κάποιων επόμενων νευρώνων. Τέτοιες αρχιτεκτονικές αλλά και άλλες ακόμα πιο πολύπλοκες δε θα μας απασχολήσουν στην παρούσα εργασία.

Επίσης, κατά κανόνα υπάρχει σε κάθε νευρωνικό δίκτυο ένα στρώμα εξόδου. Από αυτό εξέρχεται η απάντηση του δικτύου στο σήμα που έλαβε από μέσω του στρώματος εισόδου. Στο στρώμα εξόδου μπορεί να περιλαμβάνονται πολλοί νευρώνες που η έξοδοί τους να συναποτελούν έναν μονόστηλο πίνακα. Αλλά συνήθως η απάντηση που περιμένουμε από ένα δίκτυο μπορεί να εκφραστεί από έναν μόνο αριθμό, για παράδειγμα από ένα λογικό ΝΑΙ ή ΟΧΙ που να αντιστοιχεί σε 1 ή 0 αντίστοιχα, ή σε έναν αριθμό πχ 1, 2 ή 3, ανάλογα με το σε ποια κατηγορία ταιριάζει καλύτερα το pattern που εισάγαμε στο δίκτυο.

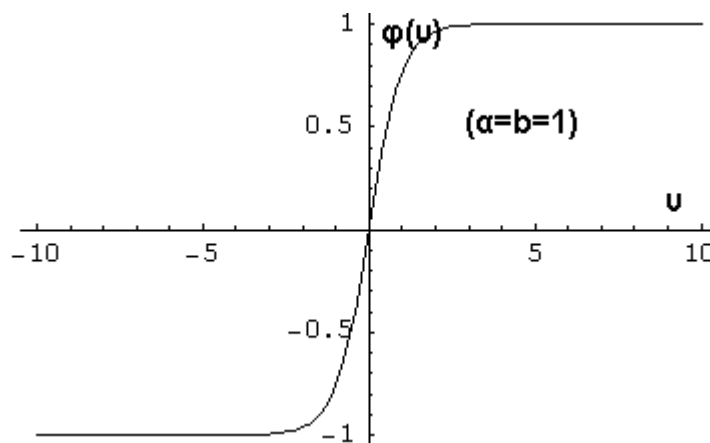
Για να μη ρισκινδυνεύσουμε την καλή λειτουργία και τη σωστή εκπαίδευσή του νευρωνικού, πρέπει να ορίσουμε στους νευρώνες του συναρτήσεις που να έχουν δύο βασικά χαρακτηριστικά: α) Να είναι παντού παραγωγίσιμες και β) να ενισχύουν τη δράση των μικρών σημάτων και να μειώνουν τη δράση των ισχυρών σημάτων. Όταν περιγράψουμε τον αλγόριθμο που κάνει την εκπαίδευση, θα γίνει αντιληπτή η σημασία αυτών των δύο προϋποθέσεων. Ουσιαστικά, η (α) είναι η απαιτούμενη προϋπόθεση, αλλά η (β) είναι επιθυμητή συνθήκη προκειμένου ο αλγόριθμος της εκπαίδευσης να συγκλίνει. Πολλές συναρτήσεις ικανοποιούν

αυτούς τους δύο όρους, αλλά δύο είναι αυτές που χρησιμοποιούνται συχνότερα: α) η λογιστική συνάρτηση και β) η συνάρτηση υπερεφαπτομένης. Ίδου η μορφή αυτών των συναρτήσεων:

$$\phi(u) = \frac{1}{1 + e^{-\alpha u}} \quad \text{όπου } \alpha \text{ μια θετική σταθερά.} \quad (\text{Π1.1})$$



$$\phi(u) = \alpha \tanh(bu) \quad \text{όπου } (\alpha, b) > 0 \quad (\text{Π1.2})$$



## Perceptron

Η πρώτη και απλούστερη μορφή νευρωνικού δικτύου εμφανίστηκε γύρω στο 1958, από τον Rosenblatt, και ονομάστηκε *perceptron*. Το perceptron αποτελείται από ένα μόνο νεύρο στο οποίο εισέρχεται ένα πλήθος σημάτων μέσω ρυθμιζόμενων συνάψεων. Στην είσοδο αυτού του νεύρου λαμβάνεται το άθροισμα μετά βαρών των σημάτων εισόδου. Δηλαδή, αν όλα μαζί τα σήματα εισόδου  $x_i$  σχηματίζουν ένα μονόστηλο πίνακα  $\mathbf{x}$  και τα βάρη  $w_i$  σχηματίζουν ένα μονόστηλο  $\mathbf{w}$ , τότε το σήμα που καλείται να επεξεργαστεί το μοναδικό νεύρο του δικτύου είναι:  $u = \mathbf{x}^T \mathbf{w} = \sum_{i=1}^n w_i x_i$ . Η συνάρτηση δραστηριοποίησης του perceptron είναι η συνάρ-

τηση προσήμου (signum function) που ισούται με +1 για θετικό όρισμα και με -1 για αρνητικό όρισμα. Οπότε η έξοδος του perceptron είναι:  $\text{signum}(\mathbf{x}^T \mathbf{w})$ .

Η εκπαίδευση του perceptron γίνεται με επίβλεψη (supervised learning) που σημαίνει ότι γίνεται μέσω ενός συνόλου παραδειγμάτων με δεδομένη την επιθυμητή απάντηση εκ μέρους του δικτύου. Ο αλγόριθμος που ακολουθείται είναι αρκετά απλός και αποτελεί μια πρώτη

προσέγγιση του αλγόριθμου back-propagation που θα παρουσιάσουμε αργότερα και που έχει πρακτική χρησιμότητα. Την εκπαίδευση του perceptron θα περιγράψουμε στις επόμενες παραγράφους.

Για να έχουμε μια γεωμετρική αίσθηση της λειτουργίας του δικτύου, ας φανταστούμε τα μονόστηλα  $x$  και  $w$  σαν ανύσματα που ορίζουν σημεία στους ευκλείδειους διανυσματικούς χώρους των σημάτων και των βαρών αντίστοιχα. Σκοπός της εκπαίδευσης είναι να ξεκινήσουμε από ένα τυχαίο σημείο  $w$  και να καταλήξουμε σε ένα σημείο στο χώρο των βαρών όπου η λειτουργία του δικτύου θα είναι η καλύτερη δυνατή. Για να ορίσουμε τι σημαίνει «καλή λειτουργία» ορίζουμε το *σφάλμα (error)* που είναι:  $e(n)=[d(n) - y(n)]$ , όπου  $d(n)$  είναι η ορθή απάντηση και  $y(n)$  είναι η εξαγόμενη από το δίκτυο απάντηση όταν σε αυτό εισάγουμε το  $x(n)$  και στο δίκτυο έχουμε τα βάρη  $w(n)$ . Είναι ευνόητο ότι το  $n$  συμβολίζει τον αύξοντα αριθμό του εκπαιδευτικού παραδείγματος που χρησιμοποιείται.

Έστω δύο κλάσεις σημείων στο χώρο των  $x$ ,  $C_1$  και  $C_2$ , και επιθυμούμε το perceptron να απαντά σωστά στο ερώτημα «σε ποια από τις δύο κλάσεις ανήκει το  $x$ ; Αν ανήκει στην  $C_1$  να δώσεις την απάντηση 1, ενώ αν ανήκει στην  $C_2$  να δώσεις την απάντηση  $-1$ ». Αν οι δύο κλάσεις πληρούν ορισμένες τοπολογικές προϋποθέσεις που θα εξηγήσουμε παρακάτω, τότε είναι δυνατό να εκπαιδευσουμε το perceptron ακολουθώντας τα εξής απλά βήματα:

**1<sup>ο</sup> βήμα:** Πάρε, ω perceptron, ένα  $x(n)$  από το σύνολο των εκπαιδευτικών παραδειγμάτων και υπολόγισε την απάντηση που δίνεις με τα βάρη  $w(n)$  που διαθέτεις αυτή τη στιγμή. Η απάντηση είναι:

$$y(n)=\text{signus}(x^T w)$$

**2<sup>ο</sup> βήμα:** Διόρθωσε το  $w(n)$  ως εξής:

$$w(n+1)=w(n)+\eta e(n) x(n), \text{ όπου } e(n)=[d(n) - y(n)] \text{ και } \eta \in (0,1)$$

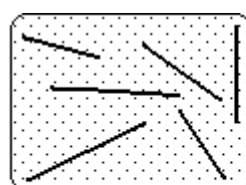
Το  $\eta$  ονομάζεται *συντελεστής της εκπαίδευσης*. Επομένως, αν στο βήμα 1 είχε δοθεί σωστή απάντηση, τότε  $e(n)=0$  και το  $w$  μένει ανέπαφο. Αν όμως στο βήμα 1 δόθηκε λάθος απάντηση τότε το  $w$  μετακινείται προς την κατεύθυνση αυτή που τείνει να διορθώσει το λάθος. Συγκεκριμένα,

- αν  $d(n)=1$  και  $y(n)=-1$  τότε  $e(n)=+2$ , οπότε το  $w$  θα αυξηθεί κάνοντας το δίκτυο να δίνει με μεγαλύτερη ευκολία  $y=+1$  από τούδε και στο εξής.
- αν  $d(n)=-1$  και  $y(n)=+1$  τότε  $e(n)=-2$ , οπότε το  $w$  θα μειωθεί κάνοντας το δίκτυο να δίνει με μεγαλύτερη ευκολία  $y=-1$  στο εξής.

Όπως αποδείχθηκε πολύ αυστηρά από τους Minsky και Selfridge το 1969, το perceptron μπορεί να ήταν μια απλή και ελκυστική ιδέα, αλλά δε θα μπορούσε ποτέ να λύσει ορισμένα προβλήματα που παρουσιάζουν ιδιαίτερη απλότητα. Για παράδειγμα δε θα μπορούσε ποτέ το perceptron να εκπαιδευθεί ώστε να λειτουργεί σαν μια XOR πύλη, δηλαδή να δίνει:

Είσοδος ( $x$ )	Έξοδος ( $y$ )
(1,0)	1
(0,1)	1
(0,0)	0
(1,1)	0

Ο λόγος είναι ότι για να εκπαιδευθεί το perceptron πρέπει οι κλάσεις που διαχωρίζει να είναι *απλά συνεκτικές*. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να μπορεί κανείς να ενώσει οποιαδήποτε δύο σημεία της κλάσης με ευθεία γραμμή που να περιέχεται εξ ολοκλήρου στην ίδια κλάση. Για παράδειγμα, στο παρακάτω σχήμα φαίνεται μια απλά συνεκτική κλάση και μια μη απλά συνεκτική.



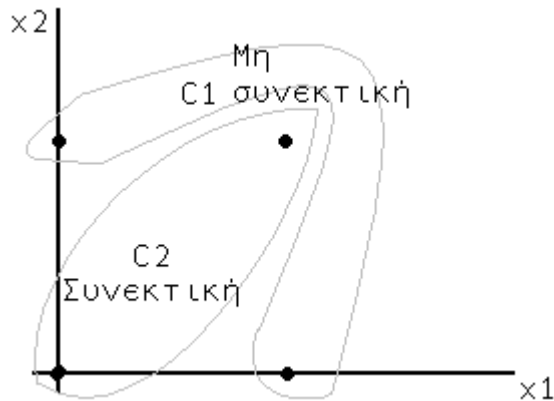
Απλά  
συνεκτική



Μη απλά  
συνεκτική



Στην περίπτωση της XOR, η  $C_1$  περιλαμβάνει τα σημεία του 2-διάστατου χώρου  $\{(1,0),(0,1)\}$  και η  $C_2$  περιλαμβάνει τα σημεία  $\{(0,0),(1,1)\}$ . Αυτές οι δύο κλάσεις δε μπορεί να είναι και οι δύο απλά συνεκτικές ταυτόχρονα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχέδιο:



Η δικαιολογία για το ότι το perceptron δεν ανταποκρίνεται σε αυτή τη δοκιμασία της XOR μπορεί να γίνει κατανοητή με έναν πιο απλό τρόπο. Από την περιγραφή του perceptron γίνεται αντιληπτό ότι γίνεται διαχωρισμός του 2-διάστατου χώρου των  $x$  σε δύο ημιεπίπεδα. Για σημεία που βρίσκονται στο ένα ημιεπίπεδο η απάντηση είναι  $y=1$ , για τα άλλα η απάντηση είναι  $y=-1$ . Η διαχωριστική ευθεία αυτών των δύο ημιεπιπέδων ορίζεται από την εξίσωση:  $w^T x = 0$ , η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων του συστήματος  $(x_1, x_2)$ . Αν θέλουμε να έχουμε την ελευθερία να ορίζουμε ευθείες που δε διέρχονται απαραίτητα από την αρχή των αξόνων, μπορούμε να προσθέσουμε στο νεύρο και ένα σταθερό σήμα  $b$ , που να προστίθεται στην είσοδο  $v$ , οπότε η διαχωριστική ευθεία γράφεται:

$$w_1 x_1 + w_2 x_2 + b = 0 \quad (\text{Π1.3})$$

Για τη συγκεκριμένη τοπολογία είναι προφανές ότι είναι αδύνατο να βρεθεί μια κατάλληλη διαχωριστική ευθεία που να απομονώνει από τη μία μεριά μόνο τα  $x$  της  $C_1$  και από την άλλη μόνο τα  $x$  της  $C_2$ . Το ίδιο ισχύει και για χώρους  $x$  με περισσότερες διαστάσεις, όπου το ρόλο της διαχωριστικής ευθείας θα τον παίξει ένα διαχωριστικό υπερεπίπεδο. Για να μπορεί να βρεθεί κατάλληλο υπερεπίπεδο (δηλαδή κατάλληλο  $w$  και  $b$ ) πρέπει οι κλάσεις να είναι απλά συνεκτικές.

Η εγγενής ανεπάρκεια του perceptron στο συγκεκριμένο και σε άλλα απλούστατα προβλήματα οδήγησε την επιστημονική κοινότητα στο να εγκαταλείψει σχεδόν την έρευνα περί νευρωνικών δικτύων με απογοήτευση. Όλοι γνώριζαν ότι ο τοπολογικός περιορισμός που διατυπώθηκε παραπάνω θα μπορούσε να ξεπεραστεί μόνο από δίκτυα με περισσότερα του ενός στρώματα. Ο λόγος είναι απλός: Αν κάθε νευρώνας του δικτύου λειτουργεί σαν ένας perceptron και ορίζει μια διαχωριστική ευθεία, τότε βάζοντας τα αποτελέσματα  $m$  ανεξάρτητων perceptrons σε έναν νευρώνα εξόδου και ορίζοντας συνθήκες για το άθροισμα των εξόδων τους, μπορούμε να απομονώσουμε ένα  $m$ -πλευρο στον  $x$ -χώρο που τα σημεία του εσωτερικού του να δίνουν π.χ.  $+1$ . Αυτό το  $m$ -πλευρο δεν είναι απαραίτητα απλά συνεκτικό. Όσο περισσότερα στρώματα έχει ένα νευρωνικό δίκτυο τόσο πιο πολύπλοκες τοπολογίες μπορεί να διαχωρίζει. Όμως, αν και ήταν αποδεδειγμένο ότι τα πολυστρωματικά δίκτυα θα ξεπερνούσαν τα μπόδια όπου σταματούσε ο perceptron, κανείς δε γνώριζε πώς να εκπαιδεύσει ένα τέτοιο πολύπλοκο σύστημα. Αυτό συνέβαινε μέχρι το 1986, που οι Rumelhard και McClelland εισήγαγαν τη μέθοδο οπισθο-διάδοσης του σφάλματος ή συντομότερα *back-propagation*.

### **Back-propagation**

Η μέθοδος back-propagation έχει ονομαστεί έτσι, διότι η πληροφορία του σφάλματος που παράγει το νευρωνικό δίκτυο στην έξοδό του μεταδίδεται όπισθεν, προς το στρώμα εισόδου, προκειμένου να βελτιώσει όλα τα βάρη στρώμα προς στρώμα. Ουσιαστικά η λογική της διόρθωσης των βαρών δε διαφέρει από αυτήν που χρησιμοποιείται στην εκπαίδευση του per-

perptron, αλλά γίνεται μια γενίκευση αυτής προκειμένου να εφαρμόζεται και στα *κρυμμένα* στρώματα, αυτά δηλαδή που βρίσκονται ανάμεσα στο στρώμα εισόδου και στο στρώμα εξόδου, για τα οποία δε γνωρίζουμε ποια είναι η επιθυμητή τους απάντηση ώστε να τα εκπαιδεύσουμε δια του παραδειγματισμού.

Ας φανταστούμε ένα από τα νεύρα του στρώματος εξόδου του πολυστρωματικού δικτύου. Συμβολίζουμε το σφάλμα της εξόδου του νεύρου  $j$  στην  $n$ -οστή εκτέλεση ως εξής:

$$e_j(n) = d_j(n) - y_j(n) \quad (\text{Π1.4})$$

Το μέγεθος αυτό, που ονομάζεται *στιγμιαία ενέργεια σφάλματος* (*instantaneous error energy*), είναι είτε θετικό είτε αρνητικό, οπότε για να έχουμε μια αθροιστική έκφραση του λάθους που κάνει το δίκτυο πρέπει να προσθέσουμε τα  $e_j^2$  για όλα τα νεύρα του στρώματος εξόδου. Ορίζουμε λοιπόν το μέγεθος που λέγεται *ολική ενέργεια σφάλματος* (*total error energy*), ως εξής:

$$E(n) = \frac{1}{2} \sum_{j=\text{output layer}} e_j^2(n) \quad (\text{Π1.5})$$

Μπορεί όμως, να είμαστε τυχεροί στην  $n$ -οστή εκτέλεση και να πάρουμε μια πολύ καλή απάντηση από το δίκτυο, δηλαδή να έχουμε μικρό  $E(n)$ . Ίσως από την άλλη να είμαστε εξαιρετικά άτυχοι σε ένα παράδειγμα που θα δώσουμε στο δίκτυο και να λάβουμε μια ασυνήθιστα λάθος απάντηση, οπότε να έχουμε ένα υπερβολικά μεγάλο  $E(n)$ . Επειδή λοιπόν δε μπορούμε να ξέρουμε αν το δίκτυο είναι καλά εκπαιδευμένο κρίνοντας από μεμονωμένες εκτελέσεις, ορίζουμε έναν μέσο όρο των  $E(n)$  επί του συνόλου των εκπαιδευτικών παραδειγμάτων που διαθέτουμε (δηλαδή του training set). Αυτό το μέγεθος το ονομάζουμε *μέση ενέργεια τετραγωνισμένου σφάλματος* (*average squared error energy*):

$$E_{av} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N E(n) \quad (\text{Π1.6})$$

όπου προφανώς το  $N$  είναι το πλήθος των παραδειγμάτων που διαθέτουμε στο training set. Σκοπός της εκπαίδευσης είναι να μειώσει το  $E_{av}$ . Όμως, όπως θα δούμε αργότερα, δεν είναι ωφέλιμο το να μειώσουμε υπερβολικά το  $E_{av}$ , διότι τότε υπερεκπαιδεύουμε το δίκτυο (*over-training*) και αναγνωρίζει καλά μόνο τα συγκεκριμένα παραδείγματα του training set, δηλαδή χάνει την ικανότητα γενίκευσης.

Ας φανταστούμε τώρα ότι σε κάθε νεύρο  $j$  του στρώματος εξόδου καταλήγουν  $m$  συνάψεις, από  $m$  νευρώνες που βρίσκονται στο αμέσως προηγούμενο στρώμα. Τότε, σύμφωνα με όσα έχουμε ήδη πει, η είσοδος που θα λαμβάνει το  $j$  νεύρο του στρώματος εξόδου θα είναι:

$$v_j(n) = \sum_{i=1}^m w_{ji}(n) y_i(n) \quad (\text{Π1.7})$$

όπου  $y_i$  είναι η έξοδος που έδωσε το  $i$  νεύρο του προτελευταίου στρώματος.

Αν συμβολίσουμε με  $\phi_j$  την activation function του  $j$  νευρώνα του στρώματος εξόδου, τότε η έξοδος που θα δώσει αυτός ο νευρώνας είναι:

$$y_j(n) = \phi_j(v_j(n)) \quad (\text{Π1.8})$$

Η διόρθωση  $\Delta w_{ji}(n)$  που θα γίνει στο βάρος  $w_{ji}$  είναι ανάλογη της παραγώγου  $\partial E(n) / \partial w_{ji}(n)$ , που ονομάζεται *παράγων ευαισθησίας* (*sensitivity factor*). Αυτό δεν είναι πρωτόγνωρο, αλλά μοιάζει με τη λογική που χρησιμοποιείται στο perceptron: αν το σφάλμα αυξάνει με την αύξηση του  $w_{ji}$ , τότε ελάττωσε το  $w_{ji}$ , ενώ αν το σφάλμα μειώνεται με την αύξηση του  $w_{ji}$ , τότε αύξησε το  $w_{ji}$ . Αυτήν την παράγωγο μπορούμε να τη γράψουμε ως εξής:

$$\frac{\partial E(n)}{\partial w_{ji}(n)} = \frac{\partial E(n)}{\partial e_j(n)} \frac{\partial e_j(n)}{\partial y_j(n)} \frac{\partial y_j(n)}{\partial v_j(n)} \frac{\partial v_j(n)}{\partial w_{ji}(n)} \quad (\text{Π1.9})$$

Κάνουμε στη συνέχεια ορισμένες χρήσιμες παραγωγίσεις:

$$(\text{Π1.5}) \Rightarrow \frac{\partial E(n)}{\partial e_j(n)} = e_j(n) \quad (\text{Π1.10})$$

$$(Π1.4) \Rightarrow \frac{\partial e_j(n)}{\partial y_j(n)} = -1 \quad (Π1.11)$$

$$(Π1.8) \Rightarrow \frac{\partial y_j(n)}{\partial v_j(n)} = \phi'_j(v_j(n)) \quad (Π1.12)$$

$$(Π1.7) \Rightarrow \frac{\partial v_j(n)}{\partial w_{ji}(n)} = y_i(n) \quad (Π1.13)$$

Αντικαθιστώντας αυτές τις παραγώγους στη σχέση (Π1.9) παίρνουμε:

$$\frac{\partial E(n)}{\partial w_{ji}(n)} = -e_j(n) \phi'_j(v_j(n)) y_i(n) \quad (Π1.14)$$

Η διόρθωση που κάνουμε στο  $w_{ji}$  κατόπιν της  $n$ -οστής εκτέλεσης είναι:

$$\Delta w_{ji}(n) = -\eta \frac{\partial E(n)}{\partial w_{ji}(n)} \quad (Π1.15)$$

Χρησιμοποιώντας την (Π1.14) η (Π1.15) γράφεται:

$$\Delta w_{ji}(n) = \eta \delta_j(n) y_i(n) \quad (Π1.16)$$

όπου η τοπική κλίση  $\delta_j(n)$  ορίζεται:

$$\begin{aligned} \delta_j(n) &= -\frac{\partial E(n)}{\partial v_j(n)} = -\frac{\partial E(n)}{\partial e_j(n)} \frac{\partial e_j(n)}{\partial y_j(n)} \frac{\partial y_j(n)}{\partial v_j(n)} \\ &= e_j(n) \phi'_j(v_j(n)) \end{aligned} \quad (Π1.17)$$

Άρα, μέχρι εδώ τα πράγματα δεν είναι ιδιαίτερα δύσκολα. Έχουμε τον τρόπο να διορθώσουμε τα βάρη των συνάψεων που καταλήγουν στο στρώμα εξόδου, γνωρίζοντας την έξοδο του νευρωνικού δικτύου και την παράγωγο της activation function των νευρώνων εξόδου.

Το θαυμαστό βήμα που έγινε με τον αλγόριθμο back-propagation φαίνεται στον τρόπο που θα διορθώσουμε τα βάρη που καταλήγουν σε εσωτερικά στρώματα:

Έστω λοιπόν ότι το  $j$  νεύρο δεν ανήκει στο στρώμα εξόδου, αλλά σε ένα κρυμμένο στρώμα, όπως για παράδειγμα αυτό που είναι αμέσως πριν το στρώμα εξόδου. Το πρόβλημα σε αυτήν την περίπτωση είναι ότι δεν έχουμε γνώση κάποιου  $d_j(n)$ , ώστε να υπολογίσουμε το σφάλμα  $e_j(n)$  και στη συνέχεια το  $\Delta w_{ji}(n)$ . Ο τρόπος με τον οποίον ξεφεύγουμε από αυτόν το σκόπελο είναι να γράψουμε την τοπική κλίση  $\delta_j(n)$  με τον εξής εναλλακτικό τρόπο:

$$\begin{aligned} \delta_j(n) &= -\frac{\partial E(n)}{\partial v_j(n)} = -\frac{\partial E(n)}{\partial y_j(n)} \frac{\partial y_j(n)}{\partial v_j(n)} \\ &= -\frac{\partial E(n)}{\partial y_j(n)} \phi'_j(v_j(n)) \end{aligned} \quad (Π1.18)$$

όπου το  $E(n)$  το υπολογίζουμε όπως και πριν, χρησιμοποιώντας τα  $e(n)$  του στρώματος εξόδου. Για να μη γίνει σύγχυση, τους νευρώνες του στρώματος εξόδου θα τους αριθμούμε με το δείκτη  $k$ :

$$E(n) = \frac{1}{2} \sum_{k=(\text{output layer})} e_k^2(n) \quad (Π1.19)$$

Υπολογίζουμε την παράγωγο που εμφανίζεται στη σχέση (Π1.18):

$$\frac{\partial E(n)}{\partial y_j(n)} = \sum_k e_k \frac{\partial e_k(n)}{\partial y_j(n)} \quad (Π1.20)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial E(n)}{\partial y_j(n)} = \sum_k e_k(n) \frac{\partial e_k(n)}{\partial v_k(n)} \frac{\partial v_k(n)}{\partial y_j(n)} \quad (Π1.21)$$

Εφόσον  $e_k(n) = d_k(n) - y_k(n)$ , ισχύει:

$$\frac{\partial e_k(n)}{\partial v_k(n)} = -\phi'_k(v_k(n)) \quad (\text{Π1.22})$$

Επίσης, σύμφωνα με τη σχέση (Π1.7), ισχύει:

$$v_k(n) = \sum_{k=1}^m w_{kj}(n)y_j(n) \quad (\text{Π1.23})$$

Επομένως,

$$\frac{\partial v_k(n)}{\partial y_j(n)} = w_{kj}(n) \quad (\text{Π1.24})$$

Αντικαθιστώντας τις (Π1.24) και (Π1.22) στην (Π1.21), παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(n)}{\partial y_j(n)} &= -\sum_k e_k(n) \phi'_k(v_k(n)) w_{kj}(n) \\ &= -\sum_k \delta_k(n) w_{kj}(n) \end{aligned} \quad (\text{Π1.25})$$

όπου στην τελευταία έκφραση χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό του  $\delta(n)$  της σχέσης (Π1.17).

Βλέπουμε λοιπόν ότι δεν είναι αδύνατον να υπολογίσουμε το  $\Delta w_{kj}$ , αλλά είμαστε αναγκασμένοι να σαρώσουμε το επόμενο στρώμα, το στρώμα εξόδου, σύμφωνα με τη σχέση (Π1.25). Αν το νεύρο  $j$  δεν ανήκει στο προτελευταίο στρώμα, δηλαδή αμέσως πριν το στρώμα εξόδου, αλλά είναι ακόμα πιο βαθιά κρυμμένο, τότε θα πρέπει πάλι να εφαρμόσουμε τη σχέση (Π1.25) και κατόπιν τη (Π1.18), όμως, για να κάνουμε σάρωση του προτελευταίου στρώματος θα χρειαστούν πολλαπλές σαρώσεις του στρώματος εξόδου. Γίνεται δηλαδή αντιληπτό ότι μπορούμε να υπολογίσουμε ένα  $\Delta w_{iv}$  όσο βαθιά κρυμμένο κι αν είναι ένα στρώμα, αλλά θα χρειαστεί να απευθυνθούμε στα  $e(n)$  του στρώματος εξόδου πολλές φορές, κατόπιν στα  $\delta(n)$  του στρώματος που βρίσκεται στο προτελευταίο στρώμα, μετά στα  $\delta(n)$  του παραπροηγούμενου στρώματος κ.ο.κ.

## Η διαδικασία της εκπαίδευσης

Υπάρχουν πολλές παράμετροι που επηρεάζουν την έκβαση της εκπαιδευτικής διαδικασίας.

Το  $\eta$ , ο συντελεστής της εκπαίδευσης επηρεάζει το μέγεθος της διόρθωσης των βαρών. Δεν είναι εύκολο να διευκρινιστεί ποια τιμή ενδείκνυται για το  $\eta$ . Αν είναι υπερβολικά μεγάλο, τότε οι διορθώσεις είναι πολύ έντονες και είναι πιθανό ο αλγόριθμος εκπαίδευσης να καταστεί ασταθής. Δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι σκοπός της εκπαίδευσης είναι το  $w$  να λάβει την τιμή όπου το σφάλμα ελαχιστοποιείται. Αν τα βήματα είναι «χοντροκομμένα» μπορεί το  $w$  να περιφέρεται γύρω από το επιθυμητό σημείο ελαχίστου, ή και να ξεφύγει εντελώς από την περιοχή του.

Από την άλλη, αν το  $\eta$  είναι υπερβολικά μικρό, δηλαδή πολύ κοντά στο μηδέν, η διόρθωση του  $w$  γίνεται πολύ αργά, άρα και η εκμάθηση προχωρά αργά. Ειδικά όταν το νευρωνικό δίκτυο έχει πολλά στρώματα και πολλά νεύρα, ο χρόνος εκπαίδευσης γίνεται σημαντικός και πρέπει να φροντίσουμε να είναι σύμφωνος. Επιπλέον, υπάρχει και άλλος ένας κίνδυνος όταν μικρύνει υπερβολικά το  $\eta$ . Μπορεί στην πορεία που ακολουθεί το  $w$  προς το σημείο ολικού ελαχίστου να παγιδευτεί σε ένα σημείο τοπικού ελαχίστου και να μην απομακρύνεται απ' αυτό, οπότε η εκπαίδευση δεν είναι η καλύτερη δυνατή.

Υπάρχουν αλγόριθμοι που δε χρησιμοποιούν μια σταθερή τιμή για το  $\eta$  αλλά το ορίζουν διαφορετικά για κάθε βάρος, δηλαδή χρησιμοποιούν ένα  $\eta_{ij}$ . Για παράδειγμα, μπορεί ένα συγκεκριμένο  $\eta_{ij}$  να οριστεί ίσο με μηδέν, οπότε, κατά την εκπαίδευση, το βάρος  $w_{ij}$  παραμένει σταθερό. Συνήθως, στα τελευταία στρώματα η τοπική βαθμίδα είναι μεγαλύτερη απ' ότι στα πρώτα, οπότε είναι σκόπιμο να ορίζουμε μικρότερο  $\eta$  για τα τελευταία στρώματα και μεγαλύτερο  $\eta$  για τα πρώτα, ώστε όλα τα νεύρα να εκπαιδεύονται όσο πιο συγχρονισμένα γίνεται. Το πώς αποφασίζονται οι τιμές των  $\eta_{ij}$  και οι λεπτομέρειες αυτών των εκπαιδευτικών αλγορίθμων είναι θέματα αρκετά εξεζητημένα και δε θα αναφερθούμε περισσότερο σε αυτά.

Για να εκπαιδεύσουμε το νευρωνικό δίκτυο, όπως είπαμε, χρειαζόμαστε ένα σύνολο εκπαιδευτικών παραδειγμάτων, το training set. Υπάρχουν όμως δύο τρόποι με τους οποίους μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε:

α) Ο πρώτος τρόπος ονομάζεται *διαδοχικός (sequential mode)*. Κατ' αυτόν τον τρόπο το νευρωνικό επεξεργάζεται ένα σήμα εισόδου από ένα παράδειγμα και κατόπιν δέχεται μια διόρθωση στα βάρη του. Στη συνέχεια επαναλαμβάνει τη διαδικασία με το επόμενο παράδειγμα, αφού έχει πρώτα διδαχθεί από το προηγούμενο. Όταν χρησιμοποιήσει όλα τα παραδείγματα του training set, δηλαδή συμπληρώσει μια *περίοδο (epoch)*, τότε αναδιατάσσουμε τυχαία τα παραδείγματα μέσα στο training set και τα ξαναδίνουμε στο νευρωνικό δίκτυο για να συνεχίσει την εκπαίδευσή του βλέποντάς τα ένα προς ένα και μαθαίνοντας από το καθένα σειριακά.

β) Ο δεύτερος τρόπος ονομάζεται *μαζικός (batch mode)*. Κατ' αυτόν τον τρόπο η διόρθωση των βαρών γίνεται *αφότου* ολοκληρωθεί μια περίοδος εκπαίδευσης. Δηλαδή, το δίκτυο εκτελεί όλα τα παραδείγματα του training set και μετά υπολογίζεται το  $E_{av}$ :

$$E_{av} = \frac{1}{2N} \sum_{n=1}^N \sum_{j(\text{output layer})} e_j^2(n) \quad (\text{Π1.26})$$

Κατόπιν, η διόρθωση του  $w_{ji}$  υπολογίζεται ως:

$$\Delta w_{ji} = -\eta \frac{\partial E_{av}}{\partial w_{ji}} = -\frac{\eta}{N} \sum_{n=1}^N e_j(n) \frac{\partial e_j(n)}{\partial w_{ji}} \quad (\text{Π1.27})$$

Μεταξύ των δύο τρόπων, δημοφιλέστερος τρόπος εκπαίδευσης είναι ο sequential. Οι λόγοι είναι αρκετοί: (α) Ο αλγόριθμος είναι απλούστερος προγραμματιστικά και εξοικονομείται μνήμη, αφού δε χρειάζεται να αποθηκεύονται τα  $e$  όλων των παραδειγμάτων για να αθροιστούν στο τέλος της περιόδου. (β) Μπορεί να εκμεταλλευθεί ακόμα και παραδείγματα που βρίσκονται στο training set και είναι πανομοιότυπα. Εφόσον μεταξύ δύο πανομοιότυπων παραδειγμάτων μεσολαβούν άλλα, διαφορετικά παραδείγματα, και τα δύο θα εκπαιδεύσουν επικοδομητικά το δίκτυο.

Κάτι ακόμα που επηρεάζει σοβαρά τη διαδικασία της εκπαίδευσης είναι το αρχικό  $w$ . Παρατηρώντας τις συναρτήσεις (Π1.1) και (Π1.2) βλέπουμε ότι για πολύ μεγάλα ορίσματα η παράγωγος τείνει στο μηδέν, που σημαίνει ότι ο όρος  $\phi'(\cdot)$  τείνει στο μηδέν, άρα τείνει στο μηδέν και η διόρθωση  $\Delta w_{ji}$ . Αυτό λέγεται *κορεσμός* του δικτύου (*saturation*). Δηλαδή, αν βάλουμε πολύ μεγάλες αρχικές τιμές στα βάρη, τότε το  $w$  θα διορθώνεται πολύ αργά. Από την άλλη, αν αρχικά το  $w$  είναι πολύ κοντά στο  $\mathbf{0}$ , δημιουργούνται διαφορετικά προβλήματα. Οπότε, καλό είναι να επιλέγεται ένα αρχικό  $w$  μακριά από τα άκρα.

Κάτι που βοηθά στο να γίνει γρήγορα και αποδοτικά η εκπαίδευση είναι το να περιλαμβάνονται ενδιαφέροντα παραδείγματα στο training set. Αυτό σημαίνει ότι τα παραδείγματα πρέπει να καλύπτουν ποικίλες περιπτώσεις, να μην είναι όλα παρόμοια. Έτσι το δίκτυο θα έχει γνωρίσει, όσο είναι δυνατό, κάθε ενδεχόμενο σήμα εισόδου. Πρέπει ταυτόχρονα να ελέγχεται με μεγάλη προσοχή το training set, γιατί ακόμα κι αν ένα παράδειγμα συνοδεύεται από λάθος επιθυμητή απάντηση, το δίκτυο μπορεί να εκπαιδευτεί λανθασμένα.

Η ικανότητα γενίκευσης που θα διαθέτει ένα νευρωνικό δίκτυο μετά την εκπαίδευσή του είναι συνάρτηση τριών βασικά παραγόντων: (α) του μεγέθους του training set, (β) της αρχιτεκτονικής του δικτύου, και (γ) της φυσικής δυσκολίας του διαπραγματευόμενου προβλήματος. Τον τρίτο παράγοντα δε μπορούμε να τον ρυθμίσουμε, μπορούμε όμως να λάβουμε ορισμένα μέτρα για τους δύο πρώτους.

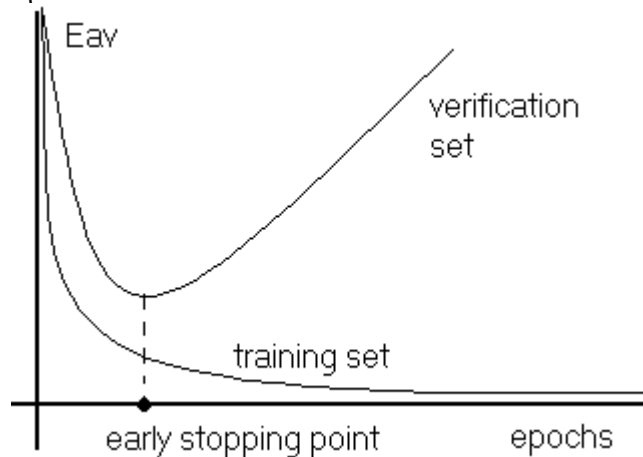
Είναι εξαιρετικά δύσκολο να γνωρίζουμε ποια προβλήματα αδυνατεί να αντιμετωπίσει ένα δίκτυο δεδομένης αρχιτεκτονικής. Μόνο σε απλούστατες περιπτώσεις όπως αυτή του perceptron ήταν δυνατόν κάτι τέτοιο. Αυτό που εμπειρικά συνιστάται για μια δεδομένη αρχιτεκτονική και αφορά στο μέγεθος του training set είναι ότι το πλήθος  $N$  των παραδειγμάτων πρέπει να είναι της τάξης του  $(W/\epsilon)$ , όπου  $W$  είναι το πλήθος των ρυθμιζόμενων παραμέτρων, δηλαδή των βαρών, και  $\epsilon$  είναι το ποσοστό λάθους που θέλουμε τελικά να κάνει το δίκτυο. Για παράδειγμα, αν ένα δίκτυο έχει 20 βαθμούς ελευθερίας και θέλουμε τελικά να κάνει λά-

θος μόνο στο 10% των εκτελέσεων, πρέπει να εκπαιδευθεί με ένα training set μεγέθους  $N \sim (20/0.1) = 200$ .

Άλλο ένα κεντρικής σημασίας ερώτημα είναι το πότε είναι η κατάλληλη στιγμή να σταματήσουμε την εκπαίδευση ενός νευρωνικού δικτύου, δηλαδή μετά από πόσες περιόδους. Όσο αφήνουμε το δίκτυο να εκπαιδεύεται το  $E_{av}$  θα μειώνεται συνεχώς, στην αρχή ραγδαία και στη συνέχεια πολύ αργά. Όμως, από ένα σημείο και πέρα το δίκτυο υπερεξειδικεύεται (*overtraining*) στο συγκεκριμένο training set και χάνει την ικανότητα να απαντά σωστά για σήματα που δεν περιέχονται σε αυτό. Δηλαδή χάνει την ικανότητα γενίκευσης που επιθυμούμε να διαθέτει.

Μια πολύ χρήσιμη μέθοδος που μας δείχνει το πότε πρέπει να σταματήσουμε την εκπαίδευση είναι η μέθοδος *έγκαιρης διακοπής* (*early stopping method*). Σε αυτήν τη μέθοδο δεσμεύουμε ένα μέρος των παραδειγμάτων που έχουμε και τα βάζουμε σε ένα άλλο σύνολο, που το λέμε *σύνολο ελέγχου* (*validation set*). Εκπαιδεύουμε το δίκτυο κατά τον γνωστό τρόπο χρησιμοποιώντας τα υπόλοιπα παραδείγματα που έχουν παραμείνει στο training set. Μετά από κάθε ορισμένο αριθμό περιόδων (πχ 2 ή 3), λέμε στο δίκτυο να κρατήσει το  $w$  σταθερό και να τρέξει όλα τα παραδείγματα του validation set. Εφόσον και για το validation set γνωρίζουμε τις σωστές απαντήσεις, μπορούμε να ελέγξουμε πόσο καλά τα πήγε το δίκτυο σε αυτό, που δεν το χρησιμοποίησε για την εκπαίδευσή του. Κατά κανόνα, το  $E_{av}$  στο validation set είναι μεγαλύτερο από το  $E_{av}$  στο training set. Όμως, και τα δύο φθίνουν αρχικά που σημαίνει ότι και στα άγνωστα παραδείγματα, το δίκτυο βελτιώνει την επίδοσή του.

Μετά από ορισμένες περιόδους βλέπουμε ότι ενώ το σφάλμα στο training set εξακολουθεί να μειώνεται, το σφάλμα στο verification set αρχίζει να αυξάνεται. Αυτό σημαίνει ότι αρχίζουμε να έχουμε υπερεξειδικευση του δικτύου. Τότε είναι η κατάλληλη στιγμή να σταματήσουμε την εκπαίδευση.



## Παράρτημα 2 – Kolmogorov test

Το Kolmogorov test είναι ένα καθιερωμένο στατιστικό test που εξετάζει κατά πόσο μια μετρούμενη κατανομή  $s(x)$  είναι συμβατή με μια υποτιθέμενη κατανομή  $f(x)$ .

Μια από τις μετεξελιξίες του Kolmogorov test είναι το λεγόμενο Kolmogorov-Smirnof test, που συγκρίνει κατά πόσο δύο μετρούμενες κατανομές είναι συμβατές, δηλαδή προέρχονται από την ίδια θεωρητική κατανομή.

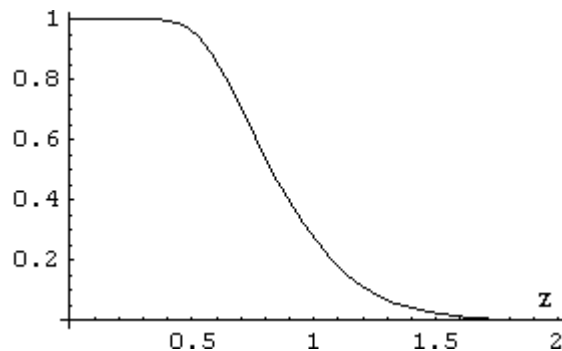
Για να εφαρμοστεί η μέθοδος Kolmogorov ορίζουμε την απόκλιση των δύο κατανομών  $s(x)$  και  $f(x)$  με cumulative probabilities  $S(x)$  και  $F(x)$ . Αφού έχουμε κάνει τις δύο κατανομές με ίδιο μέγεθος bin, συγκρίνουμε το περιεχόμενο των  $S(x)$  και  $F(x)$  σε κάθε bin. Ορίζουμε την απόκλιση ως:

$$D = \max |S(x) - F(x)|$$

Αποδεικνύεται ότι, αν  $N$  είναι ο πληθυσμός της  $s(x)$ ,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P(\sqrt{ND} > z) = 2 \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} e^{-2(rz)^2}$$

Ακολουθεί το διάγραμμα της παραπάνω πιθανότητας ως συνάρτησης του  $z$ .



$$2 \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} e^{-2(rz)^2} \text{ συναρτήσεϊ του } z$$

Για παράδειγμα, αν βρω την απόκλιση μιας κατανομής  $s$  σε σχέση με μια υπόθεση  $f$ , τότε, αν όντως η  $s$  προέρχεται από την  $f$ , η πιθανότητα να βρω  $\sqrt{ND} > 1$  είναι 0.27, ενώ να βρω  $\sqrt{ND} > 2$  είναι  $6.7 \times 10^{-4}$ .

Όταν εφαρμόζουμε το Kolmogorov-Smirnof test για να δούμε αν δύο κατανομές  $s$  και  $g$  προέρχονται και οι δύο από την ίδια κατανομή (είναι δηλαδή συμβατές), κάνουμε τα εξής:

Υπολογίζουμε την απόκλιση  $D$  αυτών των δύο πειραματικών κατανομών με cumulative probabilities  $S$  και  $G$ , ως

$$D = \max |S(x) - G(x)|$$

Τότε, αν οι  $s$  και  $g$  είναι ίδιες (με την έννοια ότι του δείγματος τείνοντος στο άπειρο, οι  $s(x)$  και  $g(x)$  τείνουν να ταυτισθούν), ισχύει:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P\left(\sqrt{\frac{NM}{N+M}} D > z\right) = 2 \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} e^{-2(rz)^2}$$

όπου  $N$  και  $M$  είναι οι πληθυσμοί των κατανομών  $s$  και  $g$ .

Δηλαδή, αν οι  $s$  και  $g$  είναι ίδιες, τότε  $p_k$  είναι πολύ απίθανο να βρω  $\sqrt{\frac{NM}{N+M}}D > 2$ .

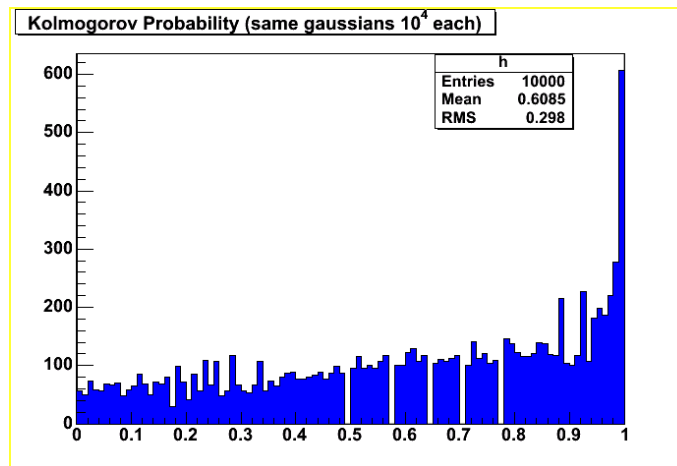
Όταν χρησιμοποιώ όμως το test για να μάθω αν οι  $s$  και  $g$  είναι ίδιες γίνεται το εξής:

Υπολογίζω το  $d = \sqrt{\frac{NM}{N+M}}D$  και κατόπιν το  $k = 2 \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} e^{-2(rd)^2}$ . Το  $k$  εκφράζει

την πιθανότητα να κάνω λάθος απορρίπτοντας τη συμβατότητα των  $s$  και  $g$ . Για παράδειγμα, αν το  $k$  προκύψει ίσο με 2, η πιθανότητα να κάνουμε λάθος απορρίπτοντας την ομοιότητα  $s$  και  $g$  είναι 0.67%. Αν  $k < 0.5$ , τότε η πιθανότητα να είναι λάθος η απόρριψη της ομοιότητας είναι σχεδόν 1. Αυτό είναι λογικό, αφού μικρό  $k$  σημαίνει μικρή απόκλιση, οπότε είναι επισφαλές να τις απορρίψουμε σαν ανόμοιες.

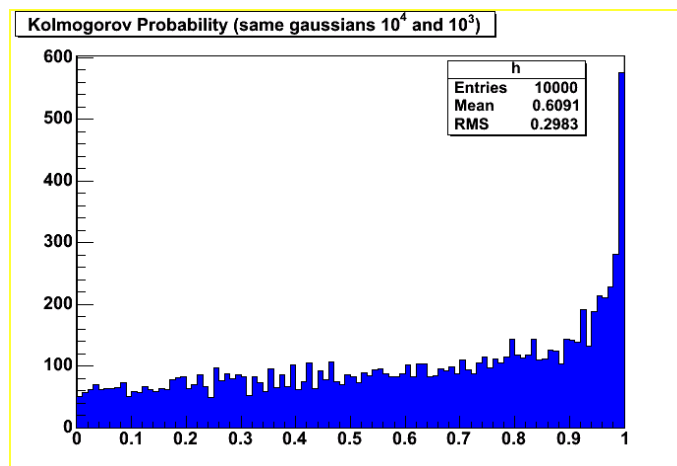
Κάναμε τέσσερις δοκιμές του Kolmogorov test που υπάρχει στο πακέτο ανάλυσης ROOT, που είναι μετάφραση σε C++ της συνάρτησης που υπήρχε και προηγουμένως στο CERLIB.

**1<sup>η</sup> δοκιμή:** Παίρνουμε  $10^4$  αριθμούς κατανεμημένους σύμφωνα με την γκαουσιανή κέντρου 0 και τυπικής απόκλισης 1. Παίρνουμε άλλους  $10^4$  αριθμούς προερχόμενους από την ίδια κατανομή πιθανότητας. Εκτελούμε το Kolmogorov test και το  $k$  το αποθηκεύουμε. Αυτό επαναλαμβάνεται  $10^4$  φορές, οπότε στο τέλος έχουμε μια κατανομή των  $10^4$   $k$  που υπολογίσθηκαν, για δύο κατανομές που εκ κατασκευής είναι (στο όριο του απείρου) ίδιες.



Εικόνα 1: Κατανομή της πιθανότητας Kolmogorov στην 1<sup>η</sup> δοκιμή.

2<sup>η</sup> δοκιμή: Ακριβώς ίδια με την 1<sup>η</sup>, αλλά αντί να έχουν και οι δύο συγκρινόμενες κατανομές πληθυσμό  $10^4$  έχουν η μία  $10^4$  και η άλλη  $10^3$ . Το αποτέλεσμα διαφέρει ελάχιστα.

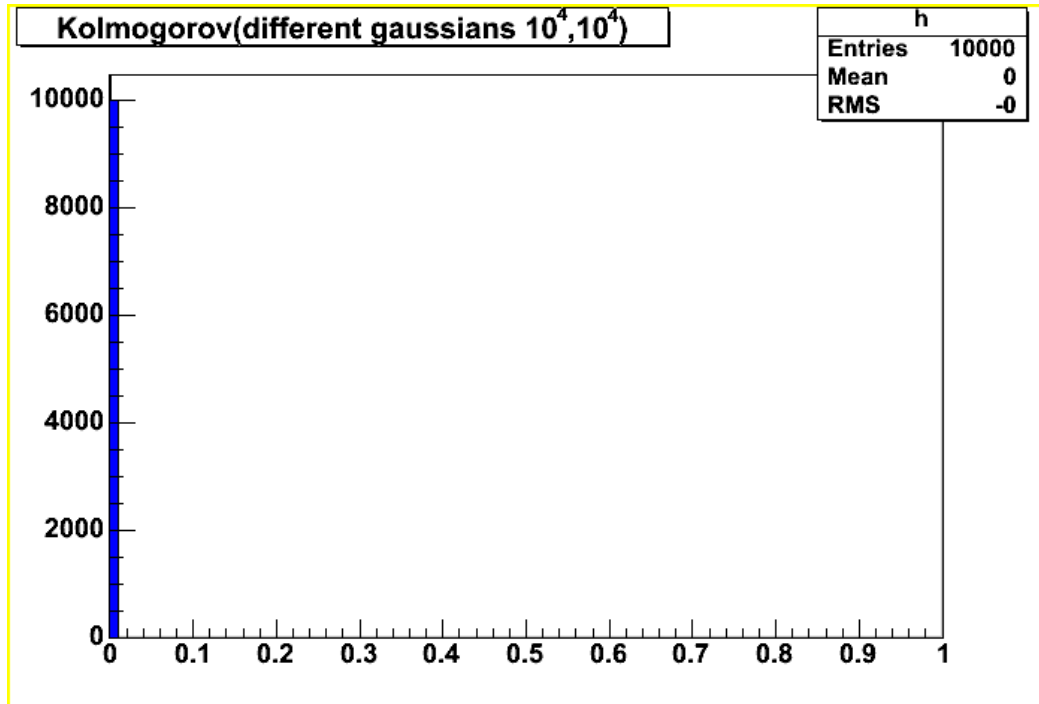


Εικόνα 2: Κατανομή της πιθανότητας Kolmogorov στην 2<sup>η</sup> δοκιμή.



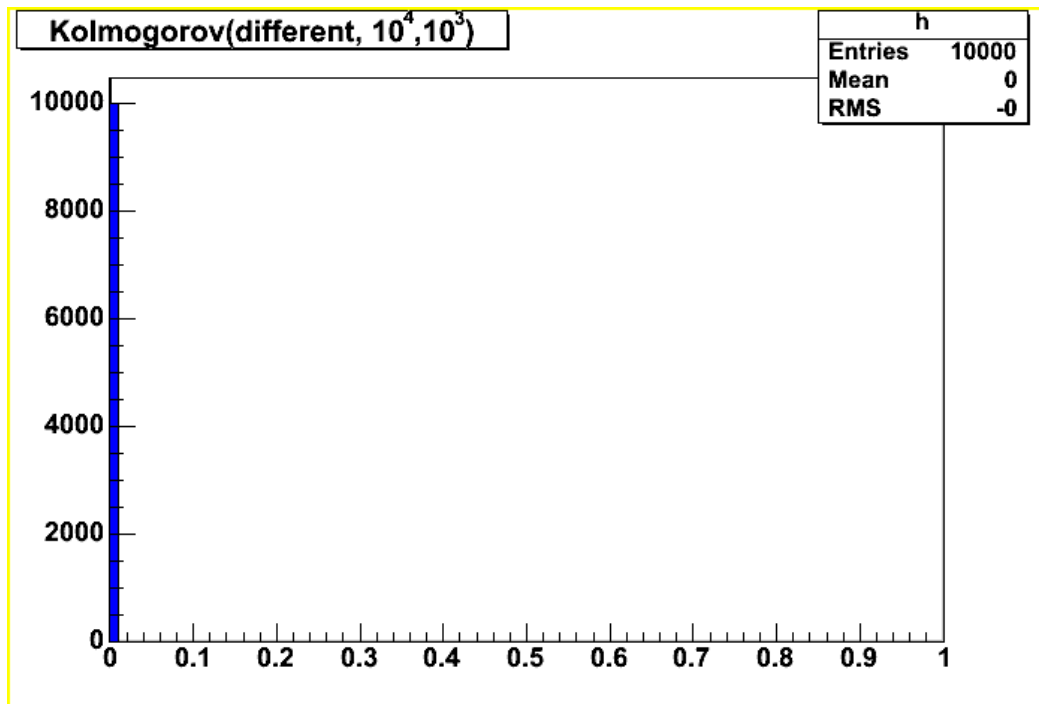
Βλέπουμε ότι ενώ οι συγκρινόμενες κατανομές είναι ίδιες, δίνουν και  $k \ll 1$ , ακόμα και κοντά στο 0. Ο λόγος είναι ότι το Kolmogorov test δεν είναι σε θέση να πει κατηγορηματικά ότι οι κατανομές είναι ίδιες. Μας δίνει μόνο την πιθανότητα να είναι λάθος ότι είναι ανόμοιες. Επίσης, παρατηρούμε ότι είτε ίσους πληθυσμούς χρησιμοποιούμε είτε άνισους, η κατανομή του  $k$  δεν αλλάζει πολύ, αρκεί βεβαίως κανείς από τους δύο πληθυσμούς να μην είναι υπερβολικά μικρός.

**3<sup>η</sup> δοκιμή:** Συγκρίνουμε  $10^4$  φορές δύο ανόμοιες κατανομές: μια γκαουσιανή με κέντρο το 0 και τυπική απόκλιση 1 και μια με κέντρο το 1 και τυπική απόκλιση 0.4. Και οι δύο έχουν αρχικά πληθυσμούς  $10^4$ .



Εικόνα 3: Κατανομή της πιθανότητας Kolmogorov στην 3<sup>η</sup> δοκιμή.

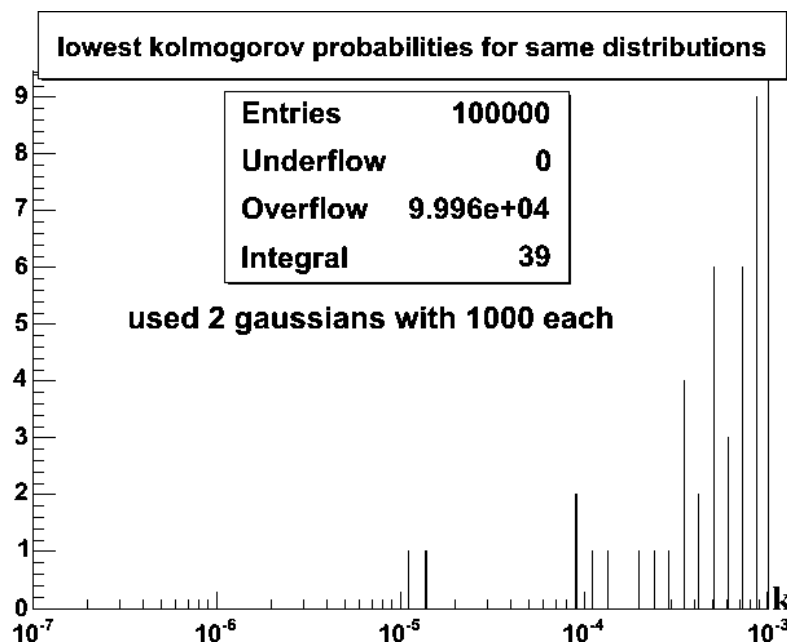
**4<sup>η</sup> δοκιμή:** Ίδια με την 3<sup>η</sup>, αλλά συγκρίνουμε άνισους πληθυσμούς,  $10^4$  και  $10^3$ . Το  $k$  είναι και πάλι πάντα ίσο με 0.



Εικόνα 4: Κατανομή της πιθανότητας Kolmogorov στην 4<sup>η</sup> δοκιμή.

Αυτό που παρατηρούμε και είναι ευχάριστο είναι ότι όταν οι κατανομές είναι ανόμοιες, το  $k$  (που λέγεται *Πιθανότητα Kolmogorov*) προκύπτει πάντα σχεδόν ίσο με το μηδέν. Δηλαδή, αν θεωρήσουμε ότι οι κατανομές είναι ανόμοιες (που όντως είναι), η πιθανότητα να κάνουμε λάθος είναι σχεδόν 0, δηλαδή κατά πάσα πιθανότητα είναι όντως ανόμοιες.

Όταν οι κατανομές είναι ίδιες, κάποιες φορές, όπως είδαμε, η πιθανότητα Kolmogorov προκύπτει αρκετά κοντά στο 0. Συνήθως τίθενται κάποια όρια σχετικά με το πόση τουλάχιστον πρέπει να είναι η πιθανότητα για να θεωρούμε τις κατανομές ίδιες. Για να δούμε πόσο μικρή μπορεί να προκύψει η  $k$  με δεδομένο ότι οι κατανομές είναι ίδιες, κάναμε την εξής δοκιμή: Παράγουμε δύο ίδιες γκαουσιανές κατανομές με 1000 τυχαία στοιχεία η καθεμία και υπολογίζουμε το  $k$ . Αυτό επαναλαμβάνεται  $10^5$  φορές και σχεδιάζουμε στη συνέχεια την κατανομή του  $k$  εστιάζοντας το ενδιαφέρον μας στις μικρότερες τιμές που αυτό πήρε σε αυτές τις  $10^5$  δοκιμές. Το αποτέλεσμα φαίνεται στην εικόνα 5, όπου φαίνεται ότι δεν προέκυψε ούτε ένα  $k < 10^{-5}$ .

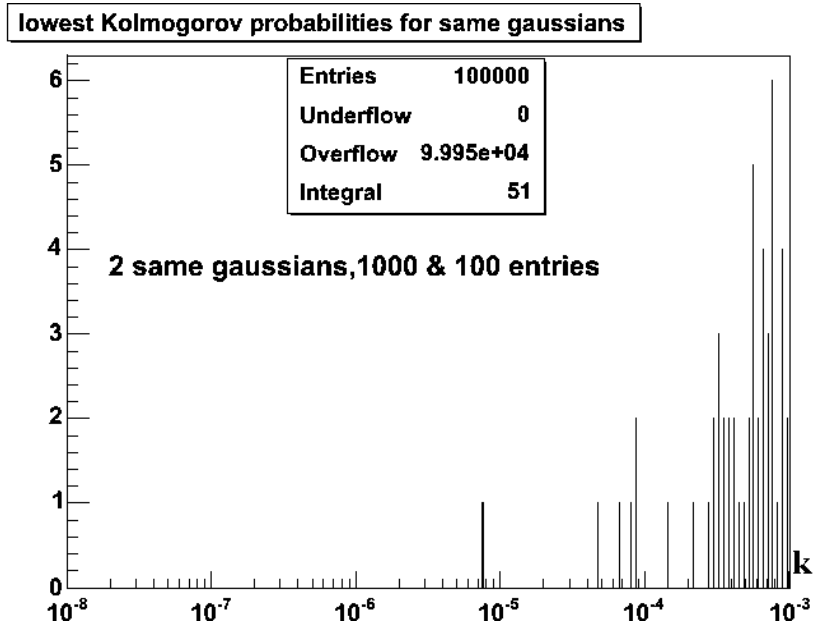


**Εικόνα 5:** Τα μικρότερα  $k$  που βρέθηκαν για ίδιες γκαουσιανές, πληθυσμών  $10^3$  έκαστη.

Ακριβώς η ίδια δοκιμή επαναλήφθηκε με άνισους πληθυσμούς στις κατανομές:  $10^3$  και  $10^2$ , και τα αποτελέσματα ήταν σχεδόν τα ίδια, όπως φαίνεται στην εικόνα 6.

Είναι, λοιπόν εμφανές ότι αν θέσουμε ένα κατώφλι στην πιθανότητα  $k_c \approx 10^{-6}$ , και θεωρήσουμε ότι για  $k > k_c$  οι κατανομές ταιριάζουν, τότε η πιθανότητα να κάνουμε λάθος είναι εξαιρετικά μικρή, μικρότερη από  $10^{-5}$ .

Φυσικά, δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι αυτό το όριο θεσπίστηκε βάσει δοκιμών σε γκαουσιανές κατανομές. Δεν είναι εγγυημένο ότι αν κάνουμε τη δοκιμή με οποιαδήποτε κατανομή το  $k_c$  θα βρεθεί ίδιο. Πάντως, έχει ενδιαφέρον ότι για ίδιες κατανομές το  $k$  δεν παίρνει (σχεδόν) ποτέ την τιμή 0, αλλά μπορεί να την πλησιάζει αρκετά.



Εικόνα 6: Τα μικρότερα  $k$  που βρέθηκαν για ίδιες γκαουσιανές, πληθυσμών 1000 και 100.

### Παράρτημα 3 – Αλληλεπίδραση με την ύλη (Σχέση Bethe-Bloch)

Καθώς ένα σωματίο διέρχεται μέσα από την ύλη αλληλεπιδρά με τους πυρήνες και τα ηλεκτρόνια που τους περιβάλλουν, αλλά ορισμένες φορές και με ολόκληρο το μέσο (Cherenkov ακτινοβολία, σύμφωνη ακτινοβολία πέδησης). Ένα ελαφρό σωματίο που κινείται μέσα στην ύλη (το οποίο αποκαλείται βλήμα (*projectile*)) και συγκρούεται με βαρείς πυρήνες αποκλίνει από την πορεία του και παθαίνει πολλαπλή σκέδαση. Σε κάθε σκέδαση χάνει μικρό μέρος της ενέργειάς του, εκτός κι αν οι σκεδάσεις είναι ανελαστικές. Απ' την άλλη, ένα βαρύ βλήμα που κινείται μεταξύ ελαφρών στόχων χάνει ενέργεια εκτρεπόμενο ελαφρώς μόνο από την τροχιά του.

Οι απώλειες ενέργειας ενός αδρονικού βλήματος οφείλονται κυρίως σε ισχυρές αλληλεπιδράσεις, δηλαδή στις αλληλεπιδράσεις με τους πυρήνες του υλικού. Αυτές οι ισχυρές αλληλεπιδράσεις μπορούν και να αποσυνθέσουν εντελώς το βλήμα. Παρ' όλα αυτά, η ηλεκτρομαγνητική απώλεια ενέργειας είναι σημαντική και για τα αδρόνια, επειδή η μέση ελεύθερη διαδρομή για τις ισχυρές αλληλεπιδράσεις είναι αρκετά μεγάλη, καθώς, λόγω της μικρής της εμβέλειας, η ισχυρή αλληλεπίδραση εκδηλώνεται ουσιαστικά όταν το βλήμα έρθει σε επαφή με τους πυρήνες.

Με εξαίρεση την περίπτωση όπου το βλήμα είναι υψηλά σχετικιστικό, ο ιονισμός της ύλης είναι ο βασικός τρόπος με τον οποίο χάνει ενέργεια ηλεκτρομαγνητικά. Η μέση απώλεια ενέργειας (*stopping power*) λόγω ιονισμού δίνεται από την περίφημη σχέση *Bethe-Bloch*:

$$-\frac{dE}{dx} = D \frac{Z}{A} \rho z^2 \Phi(\beta) (1 + \nu)$$

$$\Phi(\beta) = \frac{1}{\beta^2} \left( \log \left( \frac{2m_e c^2 \gamma^2 \beta^2}{I(1 + \gamma m_e/M)} \right) - \beta^2 - \frac{\delta}{2} - \frac{C}{Z} \right)$$

όπου

όπου:

E = η ενέργεια του βλήματος

M = η μάζα του βλήματος

β = η ταχύτητα του βλήματος (σε μονάδες c)

γ =  $1/(1-\beta^2)^{1/2}$

z = το φορτίο του βλήματος, σε μονάδες ηλεκτρονιακού φορτίου e

x = μήκος διαδρομής στην ύλη

D =  $4 \pi r_e^2 m_e c^2 N_A = 0.30707 \text{ MeV cm}^2/\text{mole}$

$r_e = 2.817 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$  = η κλασική ακτίνα του ηλεκτρονίου

$m_e = 0.511 \cdot 10^6 \text{ eV}/c^2$  = η μάζα του ηλεκτρονίου

$N_A = 6.022 \cdot 10^{23} /\text{mole}$  = ο αριθμός του Avogadro

Z = ο ατομικός αριθμός του μέσου

A = το ατομικό βάρος του μέσου (σε g/mole)

ρ = η πυκνότητα μάζας του μέσου (σε g/cm<sup>3</sup>)

I = μέση ενέργεια ιονισμού (προσεγγιστικά = 10Z eV)

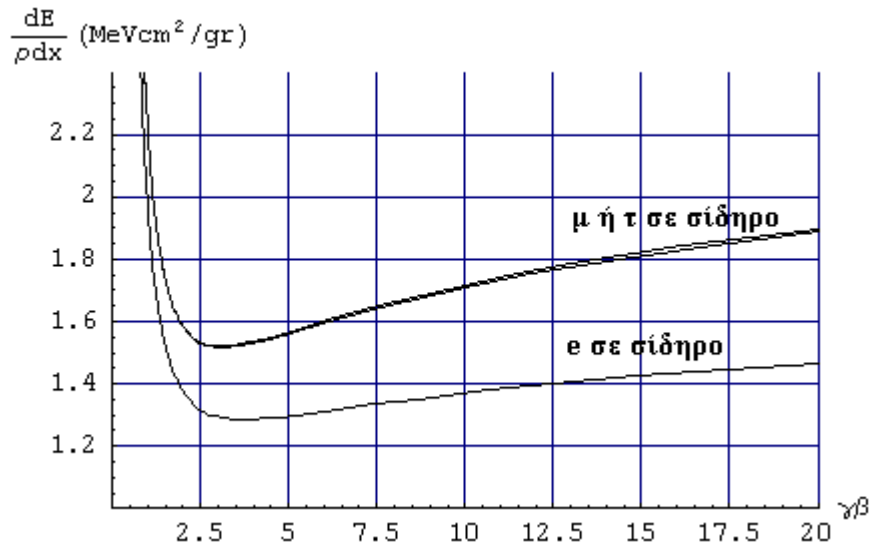
δ = διόρθωση στην πυκνότητα

C = διόρθωση φλοιώδους δομής

ν = υψηλότερης τάξεως διόρθωση

Η απώλεια ενέργειας λόγω ιονισμών είναι σε καλή προσέγγιση ανάλογη της πυκνότητας ηλεκτρονίων του μέσου και του τετραγώνου του φορτίου του βλήματος. Επιπλέον, εξαρτάται από την ταχύτητα του βλήματος, όντας ανάλογη το  $1/\beta^2$  για μικρές ταχύτητες και φτάνοντας την ελάχιστη τιμή της περίπου για  $\gamma\beta=3$ . Στα πολύ μεγάλα Z, το ελάχιστο μετακινείται μέχρι το  $\gamma\beta=3.5$  περίπου. Για μεγαλύτερα  $\gamma\beta$  παρατηρείται η λεγόμενη σχετικιστική άνοδος (*relativistic rise*) και για πολύ μεγάλα  $\gamma\beta$  φτάνει τελικά σε μια σταθερή τιμή, την λεγόμενη πεδιάδα Fermi.

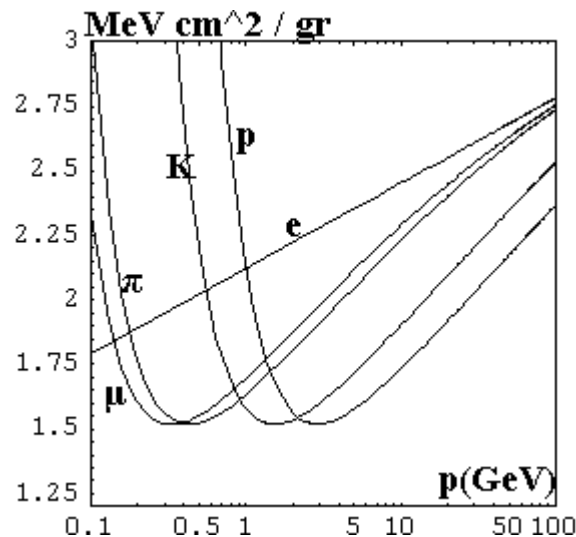
Για παράδειγμα, αν θέσουμε όλες τις μεταβλητές του σιδήρου και για βλήμα θέσουμε ένα ηλεκτρόνιο, ένα μόνιο ή ένα  $\tau$  (αν υποθέσουμε ότι αυτά τα βαρέα λεπτόνια είναι δυνατόν να επιβιώσουν για αρκετό χρόνο), παίρνουμε τα  $dE/\rho dx$  της παρακάτω εικόνας:



**Εικόνα 1:** Απώλεια ενέργειας λόγω ιονισμών, σε σίδηρο, για e,  $\mu$  και  $\tau$ .

Παρατηρούμε ότι από ένα σημείο και πέρα, η μάζα του βλήματος δεν παίζει ρόλο στη σχέση Bethe-Bloch. Αυτό φαίνεται από το ότι το  $\mu$  (105.6 MeV) και το  $\tau$  (1777 MeV) διαγράφουν την ίδια σχεδόν καμπύλη.

Η stopping power χρησιμεύει σε δεδομένο υλικό χρησιμεύει και στην ταυτοποίηση σωματιδίων ορισμένες φορές. Συνήθως, σε μια δέσμη έχουμε διάφορα σωματίδια με παραπλήσια ορμή. Αν σχεδιάσουμε την stopping power που έχει ο σίδηρος (θεωρώντας  $I \approx 260 \text{ eV}$ ) για  $\mu$ ,  $\pi$ ,  $K$ ,  $e$  και  $p$ , συναρτήσει της ορμής βλέπουμε ότι ο διαχωρισμός είναι ικανοποιητικός, όπως φαίνεται στην εικόνα 2.



**Εικόνα 2:** stopping power στο σίδηρο, χωρίς καμία διόρθωση

## Βιβλιογραφία

- Neutrino masses, mixing and oscillations. S.M. Bilenky. arXiv:hep-ph/0001311 v1.
- Neutrino Physics. E. Kh. Achmedov. arXiv:hep-ph/0001264 v2.
- A lecture on neutrino masses, mixing and oscillations. S.M. Bilenky. arXiv:hep-ph/0210128.
- Neutrino oscillations in the framework of the tree-neutrino mixing. S.M. Bilenky. arXiv:hep-ph/0307186 v2.
- CP and T Violation in neutrino oscillations. Hisakazu Minakata, Hiroshi Nunokawa, Stephen Parke. arXiv:hep-ph/0306221 v1.
- Understanding CP phase-dependent measurements at neutrino superbeams in terms of bi-rate graphs. Walter Wintera. arXiv:hep-ph/0310307 v1.
- Ταλαντώσεις νετρίνων: Ανάλυση της απόκρισης του ανιχνευτή του πειράματος MINOS σε αλληλεπιδράσεις νετρίνων. Μιλτιάδης Γ. Ζώης. Διατριβή Μ.Δ.Ε., Πανεπιστήμιο Αθηνών, 2004.
- The MSW effect and solar neutrinos. A. Yu. Smirnov. arXiv:hep-ph/0305106.
- Neutrino masses, mixing and  $(\beta\beta)_{0\nu}$ -decay. S. Pascoli, S.T. Petcov. arXiv:hep-ph/0308034 v1.
- Neural Network Techniques for Atmospheric Neutrino Event Classification and MINOS Sensitivity to Neutrino Oscillations. C. Andreopoulos, P. Stamoulis, G. Tzanakos. Fermilab report NuMI. May 3 2003.
- CalDet External Trigger and Time of Flight System Rev. 0.1. M. Kordosky, P. Adamson, C. Bower, S. Boyd, A. Cabrera, G. Crone, J. Hartnell, L. Jenner, K. Lang, J. Musser, R. Nichol, R. Saakyan, P. Shanahan, C. Smith, N. Tagg, P. Vahle, N. West. NuMI-Note-GEN-946, UTKL-197.
- MINOS Status and Physics Goals. George S. Tzanakos.
- Fermilab Proposal P875, February 1995. The MINOS Technical Design Report, Fermilab, NUMI-L-337, October, 1998.
- Quarks & Leptons: An introductory course in modern particle physics. F. Halzen, A. Martin.
- Neural Computing, Theory and Practice. P.D. Wasserman.
- Neural Networks, a comprehensive foundation, second edition. S. Haykin.
- Εισαγωγή στη Φυσική Υψηλών Ενέργειών. D.H. Perkins.
- Statistical Methods in Experimental Physics. Eadie, Drijard, James, Roos, Sadoulet.