СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P11-2000-227

Е.П.Жидков[1], А.Г.Соловьев[2]

ПРИМЕНЕНИЕ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ЭКСТРАПОЛЯЦИИ ПРИ РЕШЕНИИ СПЕКТРАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НА ПОЛУОСИ

[1]E-mail: zhidkov@lcta41.jinr.ru
[2]E-mail: solovjev@decimal.jinr.ru

2000

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается краевая задача на полуоси $[0, \infty)$ для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с регулярной особенностью в нуле и иррегулярной особенностью на бесконечности. Решается проблема определения собственных значений и собственных функций такой задачи. Для этого бесконечный интервал $[0, \infty)$, как правило, заменяется конечным отрезком $[0, R]$, условие из бесконечности переносится в точку R, после чего находятся собственные значения и собственные функции краевой задачи на этом отрезке. В результате замены исходной задачи на $[0, \infty)$ задачей на $[0, R]$ возникает погрешность: найденные собственные значения и собственные функции отличаются от искомых. Эта погрешность стремится к нулю при $R \to \infty$. В [1] разработан метод экстраполяции по параметру R, позволяющий повышать точность определения искомых собственных значений и собственных функций без существенного увеличения длины отрезка интегрирования.

Учет свойств разностной схемы, используемой для нахождения собственных значений и собственных функций задачи на $[0, R]$, позволяет объединить экстраполяцию по параметру R и экстраполяцию Ричардсона по параметру дискретизации.

Отметим, что исследование сингулярных дифференциальных операторов (в том числе операторов, заданных на бесконечном интервале) является важной задачей квантовой механики. Имеется много работ, посвященных таким исследованиям. Например, в [2, 3] разрабатываются методы численного решения поляронных задач. Предлагаемая в настоящей работе методика повышения точности численных решений может эффективно применяться в таких задачах.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим уравнение

$$u'' - [\lambda + q(x)]\, u = 0 \tag{1.1}$$

на полуоси $[0, +\infty)$, где функция $q(x)$ удовлетворяет следующим требованиям:

1) функция $q(x)$ непрерывна при $x > 0$;
2) функция $x^2 q(x)$ голоморфна в точке $x = 0$, причем $\lim\limits_{x\to 0} x^2 q(x) \geq 0$;
3) $q(x) \to 0$ при $x \to +\infty$, причем при всех достаточно больших значениях x функция $q(x)$ монотонна и удовлетворяет неравенству $q(x) \leq -(1+\epsilon)/(4x^2)$ для некоторого $\epsilon > 0$;
4) $q(x) = c/x + O(1/x^2)$ при $x \to +\infty$, где $c \leq 0$.

Требуется найти те значения λ (*собственные значения*), при которых уравнение (1.1) имеет нетривиальные решения (*собственные функции*), удовлетворяющие краевым условиям

$$u(0) = 0 \ , \tag{1.2}$$
$$u(+\infty) = 0 \ . \tag{1.3}$$

В [1] доказана теорема существования собственных значений и собственных функций поставленной задачи.

Теорема 1. *При сделанных относительно $q(x)$ предположениях 1—3 задача (1.1), (1.2), (1.3) имеет собственные значения и собственные функции, причем все ее собственные значения простые, положительные и образуют бесконечную убывающую последовательность $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ с единственной предельной точкой $\lambda = 0$, а собственная функция $u_n(x)$, отвечающая собственному значению λ_n, имеет в интервале $0 \le x < \infty$ в точности n нулей.*

Рассмотрим теперь уравнение (1.1) на конечном отрезке $[0, R]$, где R предполагается достаточно большим, а $q(x)$ удовлетворяет условиям 1—4. Краевое условие (1.2) оставим без изменений, а условие (1.3) заменим некоторым условием в выбранной нами точке R. Воспользуемся для этого известной асимптотикой искомой собственной функции:

$$u(x) = \mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}x} x^{-c/(2\sqrt{\lambda})} \left[1 + O\left(1/x\right)\right] \ , \quad x \to \infty$$

(см. [4], с. 157), и поставим в точке R краевое условие

$$y'(R) + \left[\sqrt{\lambda} + c/(2\sqrt{\lambda}R)\right] y(R) = 0 \tag{1.4}$$

(см. [1]). Для задачи на отрезке $[0, R]$ также доказана теорема существования собственных значений и собственных функций.

Теорема 2. *При достаточно большом значении R задача (1.1), (1.2), (1.4) имеет конечное число (это число тем больше, чем больше R) положительных собственных значений $\mu_1^{(R)}, \mu_2^{(R)}, \ldots, \mu_n^{(R)}, \ldots, \mu_N^{(R)}$, которые образуют убывающую последовательность, а собственная функция $y_n^{(R)}(x)$, отвечающая собственному значению $\mu_n^{(R)}$, имеет в интервале $0 \le x < R$ в точности n нулей.*

Будем считать собственные функции $u_n(x)$ задачи (1.1), (1.2), (1.3) на полуоси и собственные функции $y_n^{(R)}(x)$ задачи (1.1), (1.2), (1.4) на отрезке $[0, R]$ нормированными следующими условиями:

$$\int\limits_0^\infty u_n^2(x) dx = 1 \ , \tag{1.5}$$

$$\int\limits_0^R \left(y_n^{(R)}(x)\right)^2 dx + \\ + \left(y_n^{(R)}(R)\right)^2 \mathrm{e}^{2\sqrt{\mu_n^{(R)}}R} R^{c/\sqrt{\mu_n^{(R)}}} \int\limits_R^\infty \mathrm{e}^{-2\sqrt{\mu_n^{(R)}}x} x^{-c/\sqrt{\mu_n^{(R)}}} dx = 1 \ . \tag{1.6}$$

В [1] доказано, что собственные значения и собственные функции задачи на отрезке $[0,R]$ при $R\to\infty$ стремятся к собственным значениям и собственным функциям исходной задачи на полуоси. При этом $\mu_n^{(R)}\to\lambda_n$, и $y_n^{(R)}(x)\to u_n(x)$, то есть собственные значения и собственные функции задачи (1.1), (1.2), (1.4) сходятся к *соответствующим* им собственным значениям и собственным функциям задачи (1.1), (1.2), (1.3) (соответствие между собственными значениями $\mu_n^{(R)}$ и λ_n и между собственными функциями $y_n^{(R)}(x)$ и $u_n(x)$ устанавливается по числу нулей этих собственных функций в интервалах $[0,R)$ и $[0,\infty)$ соответственно).

Теорема 3. *Пусть R достаточно велико, так что существуют положительное собственное значение $\mu_n^{(R)}$ и собственная функция $y_n^{(R)}(x)$ задачи* (1.1), (1.2), (1.4), *соответствующие собственному значению λ_n и собственной функции $u_n(x)$ задачи* (1.1), (1.2), (1.3), *и пусть собственные функции $u_n(x)$ и $y_n^{(R)}(x)$ нормированы условиями* (1.5) *и* (1.6) *соответственно.*

Тогда при $R\to\infty$ имеют место разложения

$$\mu_n^{(R)} = \lambda_n+\eta(\lambda_n)\delta\left(R,\mu_n^{(R)}\right)\left[1+O\left(1/R\right)\right] , \tag{1.7}$$

$$y_n^{(R)}(x) = u_n(x)+v(x,\lambda_n)\delta\left(R,\mu_n^{(R)}\right)\left[1+O\left(1/R\right)\right] , \tag{1.8}$$

где

$$\delta\left(R,\mu\right) = \frac{1}{4\mu}e^{-2\sqrt{\mu}R}R^{-c/\sqrt{\mu}}\left[\left(q(R)-\frac{c}{R}\right)-\frac{c/\sqrt{\mu}\left(c/\sqrt{\mu}+2\right)}{4R^2}\right] ,$$

$x\in[0,R]$, *а $\eta(\lambda_n)$ и $v(x,\lambda_n)$ не зависят от R и $\mu_n^{(R)}$.*

Отсюда видно, что собственные значения и собственные функции задачи на отрезке $[0,R]$ тем ближе к искомым, чем больше R (близость собственных функций понимается в смысле их близости в равномерной норме).

Метод уточнения собственных значений и собственных функций, основанный на экстраполяции по параметру R, состоит в следующем.

Теорема 4. *Пусть R_1 и R_2 достаточно велики, так что существуют $\mu_n^{(R_1)}$, $y_n^{(R_1)}$ и $\mu_n^{(R_2)}$, $y_n^{(R_2)}$ — собственные значения и собственные функции задачи* (1.1), (1.2), (1.4) *на отрезках $[0,R_1]$ и $[0,R_2]$ соответственно ($R_2>R_1$), являющиеся приближениями для собственного значения λ_n и собственной функции $u_n(x)$ задачи* (1.1), (1.2), (1.3). *Пусть, кроме того, определен параметр*

$$\alpha=\delta\left(R_2,\mu_n^{(R_2)}\right)/\delta\left(R_1,\mu_n^{(R_1)}\right) ,$$

причем $\alpha\neq 1$.[1]

[1]В том исключительном случае, когда $\alpha=1$, нужно поменять R_1 или R_2.

Тогда линейные комбинации

$$\mu_n^* = \frac{\mu_n^{(R_2)} - \alpha\mu_n^{(R_2)}}{1-\alpha}, \tag{1.9}$$

$$y_n^*(x) = \frac{y_n^{(R_2)}(x) - \alpha y_n^{(R_1)}(x)}{1-\alpha}, \quad x \in [0, R_1], \tag{1.10}$$

приближают λ_n *и* $u_n(x)$ *соответственно с погрешностями*

$$|\mu_n^* - \lambda_n| = O\left(|\mu_n^{(R_2)} - \lambda_n|/R_1\right), \quad ||y_n^* - u_n|| = O\left(||y_n^{(R_2)} - u_n||/R_1\right).$$

Если задача (1.1), (1.2), (1.4) решалась более чем два раза, процесс уточнения можно продолжить (см. [1]), что приводит к дальнейшему повышению точности определения собственных значений и собственных функций задачи (1.1), (1.2), (1.3).

2. УЧЕТ ПОГРЕШНОСТИ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ

Задачу (1.1), (1.2), (1.4), как правило, приходится решать численно, используя какой-либо разностный метод. Учет свойств используемой разностной схемы позволяет производить *двухпараметрическую экстраполяцию*: по параметру R, как описано выше, и по параметру дискретизации h, как это делается в известном методе Ричардсона (см. [5]).

Пусть, например, для решения задачи (1.1), (1.2), (1.3) на отрезке $[0, R]$ введена равномерная сетка с шагом h и используется разностная схема второго порядка точности (см. [6]). В этом случае получаемые численно собственное значение $\mu_n^{(R,h)}$ и собственная функция $y_n^{(R,h)}(x)$ при $h \to 0$ связаны с собственным значением $\mu_n^{(R)}$ и собственной функцией $y_n^{(R)}(x)$ задачи (1.1), (1.2), (1.3) следующими соотношениями (см. [5], с. 98–120]):

$$\begin{aligned}
\mu_n^{(R,h)} &= \mu_n^{(R)} + \sigma\left(\mu_n^{(R)}\right) h^2 \left[1 + O\left(h^2\right)\right], \\
y_n^{(R,h)}(x) &= y_n^{(R)}(x) + w\left(x, \mu_n^{(R)}\right) h^2 \left[1 + O\left(h^2\right)\right],
\end{aligned}$$

где x — одна из точек сетки, а $\sigma\left(\mu_n^{(R)}\right)$ и $w\left(x, \mu_n^{(R)}\right)$ не зависят от h.

Отсюда с учетом разложений (1.7) и (1.8), пренебрегая величинами порядка $|\mu_n^{(R)} - \lambda_n| \cdot |\mu_n^{(R,h)} - \mu_n^{(R)}|$, получим следующие разложения:

$$\begin{aligned}
\mu_n^{(R,h)} &= \lambda_n + \\
&+ \eta(\lambda_n)\delta\left(R, \mu_n^{(R,h)}\right)[1 + O(1/R)] + \\
&+ \sigma(\lambda_n)h^2\left[1 + O\left(h^2\right)\right], \\
y_n^{(R,h)}(x) &= u_n(x) + \\
&+ v(x, \lambda_n)\delta\left(R, \mu_n^{(R,h)}\right)[1 + O(1/R)] + \\
&+ w(x, \lambda_n)h^2\left[1 + O\left(h^2\right)\right],
\end{aligned}$$

при $R \to \infty$ и $h \to 0$.

Метод уточнения собственных значений и собственных функций, основанный на *одновременной* экстраполяции по параметрам R и h, заключается в следующем.

Теорема 5. *Пусть имеются собственные значения* $\mu_n^{(R_1,h)}$, $\mu_n^{(R_1,h/2)}$, $\mu_n^{(R_2,h)}$ *и собственные функции* $y_n^{(R_1,h)}(x)$, $y_n^{(R_1,h/2)}(x)$, $y_n^{(R_2,h)}(x)$. *Пусть параметр* α *(*$\alpha \neq 1$*) определен по формуле*

$$\alpha = \delta\left(R_2, \mu_n^{(R_2,h)}\right)/\delta\left(R_1, \mu_n^{(R_1,h)}\right) .$$

Тогда линейные комбинации

$$\mu_n^* = \frac{\mu_n^{(R_2,h)} - \mu_n^{(R_1,h)}}{1-\alpha} + \frac{4\mu_n^{(R_1,h/2)} - \mu_n^{(R_1,h)}}{3} , \qquad (2.1)$$

$$y_n^*(x) = \frac{y_n^{(R_2,h)}(x) - y_n^{(R_1,h)}(x)}{1-\alpha} + \frac{4y_n^{(R_1,h/2)}(x) - y_n^{(R_1,h)}(x)}{3} \qquad (2.2)$$

приближают λ_n *и* $u_n(x)$ *соответственно с погрешностями*

$$\begin{aligned} |\mu_n^* - \lambda_n| &= O\left(|\mu_n^{(R_2,h)} - \lambda_n|/R_1\right) + O\left(h^4\right) , \\ ||y_n^* - u_n|| &= O\left(||y_n^{(R_2,h)} - u_n||/R_1\right) + O\left(h^4\right) . \end{aligned}$$

Доказательство. Подставив разложения для $\mu_n^{(R_1,h)}$ и $\mu_n^{(R_2,h)}$ в первую часть формулы (2.1), получим

$$\begin{aligned} &\frac{\mu_n^{(R_2,h)} - \mu_n^{(R_1,h)}}{1-\alpha} = \\ &= \eta(\lambda_n)\frac{\delta\left(R_2, \mu_n^{(R_2,h)}\right)[1 + O(1/R_2)] - \delta\left(R_1, \mu_n^{(R_1,h)}\right)[1 + O(1/R_1)]}{1-\alpha} . \end{aligned}$$

Подставляя разложения для $\mu_n^{(R_1,h/2)}$ и $\mu_n^{(R_1,h)}$ во вторую часть формулы (2.1) и пренебрегая величинами порядка $|\mu_n^{(R)} - \lambda_n| \cdot |\mu_n^{(R,h)} - \mu_n^{(R)}|$, получаем

$$\frac{4\mu_n^{(R_1,h/2)} - \mu_n^{(R_1,h)}}{3} = \lambda_n + \eta(\lambda_n)\delta\left(R_1, \mu_n^{(R_1,h)}\right)[1 + O(1/R_1)] + O\left(h^4\right) .$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \mu_n^* &= \lambda_n + \\ &+ \eta(\lambda_n)\frac{\delta\left(R_2, \mu_n^{(R_2,h)}\right)[1 + O(1/R_2)] - \alpha\delta\left(R_1, \mu_n^{(R_1,h)}\right)[1 + O(1/R_1)]}{1-\alpha} + \\ &+ O\left(h^4\right) . \end{aligned}$$

Второе слагаемое в последнем выражении, как было доказано в теореме 4 (см. [1]), имеет порядок $O\left(|\mu_n^{(R_2,h)} - \lambda_n|/R_1\right)$. Отсюда

$$\mu_n^* = \lambda_n + O\left(|\mu_n^{(R_2,h)} - \lambda_n|/R_1\right) + O\left(h^4\right) .$$

Аналогично доказывается утверждение теоремы отностительно собственных функций. Теорема доказана.

Отметим, что формулы (2.1) и (2.2) являются обобщениями как формул (1.9) и (1.10), описывающих экстраполяцию по R, так и известных формул Ричардсона, описывающих экстраполяцию по h.

3. ПРИМЕР

Рассмотрим в качестве примера следующую задачу (определение собственных значений энергии и радиальных волновых функций атома водорода):

$$u'' - \left(\lambda - 2/x + 2/x^2\right) u = 0 \ , \quad u(0) = 0 \ , \quad u(\infty) = 0 \ . \tag{3.1}$$

Собственные значения и собственные функции[2] этой задачи известны:

$$\lambda_n = 1/(n+1)^2 \ , \tag{3.2}$$

$$u_n(x) = \frac{4}{(n+1)^3} e^{-x/(n+1)} x^2 \sum_{k=0}^{n-1} a_k \left(\frac{2x}{n+1}\right)^k \ , \tag{3.3}$$

где

$$a_0 = \frac{1}{6}\sqrt{n(n+1)(n+2)} \ , \quad a_k = a_{k-1}\frac{k-n}{k(k+3)} \ ,$$
$$k = 1, 2, \ldots, n-1 \ , \quad n = 1, 2, \ldots \ .$$

Соответствующей ей задачей на отрезке $[0, R]$ будет следующая:

$$\begin{array}{l} y'' - \left(\mu - 2/x + 2/x^2\right) y = 0 \ , \\ y(0) = 0 \ , \quad y'(R) + [\sqrt{\mu} - 1/(\sqrt{\mu}R)]\, y(R) = 0 \ . \end{array} \tag{3.4}$$

Для численного определения собственных значений и собственных функций задачи (3.4) введем на отрезке $[0, R]$ равномерную сетку $\{x_k = kh, \quad k = 0, \ldots, N\}$ с шагом $h = R/N$ и построим разностную схему второго порядка точности (см., например, [6], с. 93–94):

$$\begin{array}{rcrcrcll} & - & B_1 y_1 & + & y_2 & = & 0 \ , & \\ y_{k-1} & - & B_k y_k & + & y_{k+1} & = & 0 \ , & k = 2, \ldots, N-1 \ , \\ & - & \beta y_{N-1} & + & y_N & = & 0 \ , & \end{array} \tag{3.5}$$

где

$$B_k = 2 + h^2 \left(\mu - 2/x_k + 2/x_k^2\right) \ , \quad k = 1, \ldots, N-1 \ ,$$
$$\beta = \left[1 + h\,(\sqrt{\mu} - 1/(\sqrt{\mu}R)) + h^2/2 \left(\mu - 2/R + 2/R^2\right)\right]^{-1} \ .$$

---

[2] Приводятся собственные функции, нормированные условием $\int\limits_0^\infty u_n^2(x)dx = 1$.

Собственные значения разностной задачи (3.5) вычисляются как корни характеристического уравнения

$$\det\begin{pmatrix} -B_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -B_2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -B_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -B_{N-2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -B_{N-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\beta & 1 \end{pmatrix} = 0\,.$$

Для однозначного определения собственных функций можно поставить, например, следующее условие нормировки:

$$y_k = u_n(x_k) \neq 0\,,$$

где x_k — заранее выбранная точка сетки, а $u_n(x_k)$ — значение точной собственной функции (3.3) в этой точке.

В табл. 1 приведены несколько первых точных собственных значений (3.2) исходной задачи (3.1), для каждого собственного значения приведены соответствующие ему собственные значения задачи (3.4), найденные численно с разными R и h, погрешности этих собственных значений, а также уточненное собственное значение, построенное по формуле (2.1), и его погрешность.

Таблица 1

n	λ_n	R	h	$\mu_n^{(R,h)}$	$\lvert\mu_n^{(R,h)}-\lambda_n\rvert$	μ_n^*	$\lvert\mu_n^*-\lambda_n\rvert$
1	0.2500000	10	0.1	0.2500525	0.0000525	0.2499997	0.0000003
		10	0.05	0.2500131	0.0000131		
		15	0.1	0.2500522	0.0000522		
2	0.1111111	25	0.1	0.1110947	0.0000164	0.1111108	0.0000004
		25	0.05	0.1110766	0.0000345		
		30	0.1	0.1111320	0.0000209		
3	0.0625000	45	0.1	0.0624991	0.0000009	0.0624997	0.0000003
		45	0.05	0.0624898	0.0000102		
		50	0.1	0.0625101	0.0000101		
4	0.0400000	70	0.1	0.0400020	0.0000020	0.0399998	0.0000002
		70	0.05	0.0399967	0.0000033		
		75	0.1	0.0400058	0.0000058		
5	0.0277778	95	0.1	0.0277759	0.0000018	0.0277774	0.0000004
		95	0.05	0.0277726	0.0000052		
		100	0.1	0.0277800	0.0000022		

В табл. 2 приведены значения в некоторых точках одной из точных собственных функций (3.3), значения соответствующих ей собственных функций задачи (3.4), найденных численно с разными R и h, а также значения уточненной собственной функции, построенной по формуле (2.2). В последней строке таблицы приведены величины погрешностей получаемых собственных функций в равномерной норме. (В качестве условия нормировки ставится условие равенства получаемых собственных функций и точной собственной функции (3.3) в точке $x = 1$.)

Таблица 2

x	$u_2(x)$	$y_2^{(25,0.1)}(x)$	$y_2^{(25,0.05)}(x)$	$y_2^{(30,0.1)}(x)$	$y_2^*(x)$
1	0.0722278	0.0722278	0.0722278	0.0722278	0.0722278
5	0.0951952	0.0948824	0.0950898	0.0949157	0.0951950
10	-0.2876809	-0.2873886	-0.2875993	-0.2873992	-0.2876810
15	-0.2750755	-0.2743108	-0.2746529	-0.2745942	-0.2750728
20	-0.1436782	-0.1425696	-0.1427891	-0.1433185	-0.1436705
25	-0.0575456	-0.0555509	-0.0556478	-0.0572632	-0.0575282
$\|\|y_n - u_n\|\|$		0.0019947	0.0018978	0.0004826	0.0000174

Приведенные таблицы наглядно показывают эффективность предложенного метода для повышения точности собственных значений и собственных функций.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработанный в [1] метод экстраполяции по длине отрезка интегрирования применяется при решении задачи о собственных значениях и собственных функциях для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка на полуоси. При замене этой задачи задачей на конечном отрезке (что, как правило, делается при численном решении) полученные собственные значения и собственные функции приближают искомые собственные значения и собственные функции с некоторой погрешностью. В [1] получена асимптотика этой погрешности при устремлении длины отрезка интегрирования к бесконечности, с использованием этой асимптотики построены формулы для уточнения собственных значений и собственных функций. В настоящей работе описан способ двухпараметрической экстраполяции: по длине отрезка и параметру дискретизации. Оценки погрешностей уточненных собственного значения и собственной функции дают основание ожидать существенного повышения их точности. В рассмотренной модельной задаче удалось добиться повышения точности на порядок без существенного увеличения длины отрезка интегрирования и без существенного уменьшения шага разностной схемы, что является прекрасной иллюстрацией эффективности предложенного метода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жидков Е.П., Соловьев А.Г.* Повышение точности определения собственных значений и собственных функций краевой задачи на полуоси. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1999. Т. 39. N 7. С. 1100–1120; Препринт ОИЯИ **Р11-98-69**, Дубна: ОИЯИ, 1998.
2. *Акишин П.Г., Пузынин И.В., Смирнов Ю.С.* Метод численного решения трехмерных уравнений полярона. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1996. Т. 36. N 7. С. 109–118.
3. *Амирханов И.В., Земляная Е.В., Пузынина Т.П.* Итерационный метод решения уравнения полярона в сферически-симметричном случае. Сообщение ОИЯИ **Р11-91-139**, Дубна: ОИЯИ, 1991.
4. *Титчмарш Э.Ч.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, т. 1. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
5. *Марчук Г.И., Шайдуров В.В.* Повышение точности решений разностных схем. М.: Наука, 1979.
6. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.

Рукопись поступила в издательский отдел
4 октября 2000 года.

Жидков Е.П., Соловьев А.Г. P11-2000-227
Применение двухпараметрической экстраполяции
при решении спектральной краевой задачи на полуоси

Предложен метод повышения точности приближенных собственных значений и собственных функций краевой задачи на полуоси для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Для численного нахождения собственных значений и собственных функций краевой задачи на полупрямой интервал $[0,\infty)$, как правило, заменяется отрезком $[0,R]$, условие из бесконечности переносится в точку R, после чего находятся собственные значения и собственные функции краевой задачи на этом конечном отрезке. В результате такой замены возникает погрешность: полученные собственные значения и собственные функции отличаются от искомых. Эта погрешность стремится к 0 при $R\to\infty$. Как правило, заранее выбрать R для определения собственных значений и собственных функций с заданной точностью невозможно. Поэтому задачу на $[0,R]$ приходится решать повторно, с бóльшим R. Уточненное собственное значение получается как линейная комбинация двух собственных значений, найденных при решении задачи на двух различных отрезках. Аналогично получается и уточненная собственная функция. Учет свойств разностной схемы, используемой для нахождения собственных значений и собственных функций задачи на $[0,R]$, позволяет объединить экстраполяцию по параметру R и экстраполяцию Ричардсона по параметру дискретизации.

Работа выполнена в Лаборатории информационных технологий ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2000

Перевод аторов

Zhidkov E.P., Soloviev A.G. P11-2000-227
Application of Two-Parameter Extrapolation
for Solution of Boundary-Value Problem on Semi-Axis

A method for refining approximate eigenvalues and eigenfunctions for a boundary-value problem on a half-axis is suggested. To solve the problem numerically, one has to solve a problem on a finite segment $[0,R]$ instead of the original problem on the interval $[0,\infty)$. This replacement leads to eigenvalues' and eigenfunctions' errors. To choose R beforehand for obtaining their required accuracy is often impossible. Thus, one has to resolve the problem on $[0,R]$ with larger R. If there are two eigenvalues or two eigenfunctions that correspond to different segments, the suggested method allows one to improve the accuracy of the eigenvalue and the eigenfunction for the original problem by means of extrapolation along the segment. This approach is similar to Richardson's method. Moreover, a two-parameter extrapolation is described. It is combination of the extrapolation along the segment and Richardson's extrapolation along a discretization step.

The investigation has been performed at the Laboratory of Information Technologies, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2000