



Universidad Nacional de La Plata
Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas

Tesis de Licenciatura:
INFLUENCIA DE LA TEORÍA ESTADÍSTICA
EN LA EVOLUCIÓN DEL UNIVERSO TEMPRANO

Martín E. Pessah

Directores:
Dr. Diego F. Torres
Dr. Héctor Vucetich

SEPTIEMBRE 2000

A mi madre

Índice general

1. Introducción: estadística no-extensiva	1
1.1. Generalizaciones de la termoestadística	1
1.2. Entropía	2
1.2.1. Breve interludio matemático	3
1.2.2. Valores de expectación	4
1.3. Ensamble canónico	4
1.3.1. Posibles vínculos dados por la energía interna	5
1.4. Funciones de distribución	9
1.4.1. Ensamble gran canónico	9
1.4.2. Aproximación de factorización	11
2. Historia térmica de un Universo levemente no-extensivo	13
2.1. Introducción	13
2.2. Termodinámica en el equilibrio	13
2.2.1. Densidad de partículas, densidad de energía y presión	13
2.2.2. Exceso de partículas sobre antipartículas	18
2.2.3. Número efectivo de grados de libertad	21
2.3. Cantidades conservadas	23
2.3.1. Forma explícita para los números conservados	24
2.4. Desacoplamiento de especies	25
2.5. Temperatura del fondo cósmico de neutrinos	28
2.6. Recombinación	30
2.7. Reliquias del Big Bang	31
2.7.1. Ecuación de Boltzmann	31
2.7.2. Congelamiento de abundancias	34
2.8. Presente de un Universo no-extensivo	36
2.8.1. g_{\star}^q y $g_{\star s}^q$ hoy	36
2.8.2. Estado actual	37
2.9. Fondo cósmico de partículas débilmente interactuantes	37
2.9.1. Reliquias Relativistas	37
2.9.2. Reliquias no-relativistas	38
2.10. Igualdad radiación-materia	41
3. Nucleosíntesis Primordial	43
3.1. Introducción	43
3.2. Nucleosíntesis como test del universo: nociones básicas	43
3.3. Últimos resultados: la era inesperada de la precisión	45
3.4. Formación primordial de ${}^4\text{He}$	46
3.5. Razón neutrón-protón en el Universo en expansión	49
3.6. Tasas de reacción	49

3.7. Principio de balance detallado	50
3.7.1. Reacción $\nu + n \leftrightarrow p + e^-$	51
3.7.2. Reacción $e^+ + n \leftrightarrow p + \bar{\nu}$	52
3.7.3. Reacción $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$	52
3.8. Cálculo de las tasas de reacción	53
3.8.1. Tasa de reacción λ_{np}^q	53
3.8.2. Tasa de reacción λ_{pn}^q	54
3.9. Evolución de la abundancia de neutrones	54
3.10. Balance standard	56
3.10.1. Cálculo a primer orden	59
3.11. Balance con correcciones no-extensivas	59
3.12. Discusión y conclusiones	61

Epílogo	67
----------------	-----------

Índice de figuras

1.1. Comportamiento de las funciones de distribución generalizadas (FD, MB y BE respectivamente) para $q = 1,1$ y $q = 0,9$. También se muestran las distribuciones standard correspondientes.	12
2.1. Integrandos en juego en el análisis del término correctivo para el exceso partícula-antipartícula (caso no relativista).	20
2.2. Abundancia de equilibrio standard y corrección no extensiva para partículas no relativistas.	35
3.1. Nucleosíntesis primordial: ideas generales. Predicciones de abundancias primordiales de los elementos livianos y problemas concernientes a la cantidad de materia oscura	44
3.2. A la izquierda, tasas de reacción standard $\lambda_{pn}^{st}(y)$ y $\lambda_{np}^{st}(y)$. A la derecha, correcciones a las tasas standard (normalizadas por el valor de $(q - 1)$) en el marco del BNE.	54
3.3. Comportamiento del integrando involucrado en el cálculo de $X^q(\infty)$ para distintos valores de $(q - 1)$ (BST).	58
3.4. Comparación entre $X^q(\infty)$ como función de $(q - 1)$ en los casos en que se considera la aproximación a primer orden y la solución numérica completa. Ambos obtenidos en el marco del BST.	60
3.5. Comportamiento de la derivada de la función $\lambda_{pn}^q(y)/\Lambda^q(y)$ para distintos valores de $(q - 1)$	62
3.6. Comportamiento del integrando involucrado en el cálculo de $X^q(\infty)$ para distintos valores de $(q - 1)$ (BNE).	63
3.7. $X^q(\infty)$ como función de $(q - 1)$ en los casos BST y BNE.	64

Índice de cuadros

3.1. Comparación de los valores de $X^q(\infty)$ como función de $(q - 1)$ cuando se consideran los distintos balances (BST y BNE).	64
3.2. Coeficientes del ajuste lineal de $X^q(\infty)$ cerca de 0 para el BNE y BST y comparación con el cálculo a primer orden (BST $\mathcal{O}(q - 1)$).	64

Agradecimientos

Quisiera expresar aquí mi agradecimiento a aquellas personas e instituciones que hicieron posible que esta tesis fuera escrita. Ante todo mi reconocimiento a la Universidad Nacional de La Plata, especialmente a los Departamentos de Física y Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y a la Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas. En estos lugares tomé cursos de grado que me permitieron iniciarme en la investigación. De los profesores de estas casas de estudio agradezco a la Dra. Platzeck con quien mantuve una discusión enriquecedora a cerca de teoría de plasmas y al Dr. Benvenuto por sus críticas constructivas sobre este trabajo. Estoy agradecido particularmente a mi Director, el Dr. Héctor Vucetich, quien me guió en los últimos años de la carrera y me dió la libertad necesaria para diagramar mis tiempos de estudio e investigación.

Agradezco especialmente el apoyo económico brindado por la Fundación Antorchas. Este trabajo fue desarrollado en su totalidad en el marco de una *Beca para Alumnos Universitarios Destacados*. En este sentido estoy también profundamente agradecido al Dr. Diego Torres quien fue co-director de esta beca. Además de dedicarme su tiempo y procurarme los recursos necesarios para trabajar, él supo plasmar mi esfuerzo y entusiasmo en resultados concretos.

Por supuesto estos agradecimientos estarían incompletos si no mencionara a mis amigos y a mi familia. Podría decir que gente como Ileana, Diego o Pablo fueron mis compañeros durante la carrera. Sin embargo, hoy sé que los libros y finales fueron sólo la excusa para que naciera una amistad que se afianza cada día. A ellos les doy las gracias pues sin su compañía los momentos duros hubieran sido insoportables y las alegrías carentes de sentido. Además quiero darle las gracias a Alejandro, no solamente por lo que me enseñó de física, sino también por lo que me enseñó de ser humano.

Quien sabe, por esas vueltas del destino, quizá yo podría haber estudiado astronomía y algún día haber escrito una tesis sin haber conocido a mi padrino Pablo Díaz. Lo que sí es seguro es que jamás lo hubiera hecho como lo hice. El ejemplo que él me da como persona, su confianza y su apoyo incondicional fueron clave para mí a lo largo de estos años. Para él mi más sincero agradecimiento.

A pesar de la distancia que puso La Plata entre mi familia y yo, ellos siempre estuvieron a mi lado. Agradezco a mi padre por haberme apoyado en cada decisión tomada, por su confianza infinita y por sobre todo por ser un referente de honestidad. Le agradezco también a mi abuela por hacerme sentir querido desde que tengo memoria. A mi hermano, con quien me hubiera gustado compartir más momentos, le doy las gracias porque él es mi mejor amigo. Necesito agradecer también a mi madre y a mi abuelo pues, a pesar de que hoy no están a mi lado, ambos dejaron marcadas en mí la huella de su cariño, para siempre.

Finalmente quisiera agradecerle a Paula, con quien hoy comparto mi vida, por su amor, su paciencia y su comprensión sin límites.

Martín E. Pessah

La Plata 29 de Septiembre de 2000.

Prefacio

En cosmología standard se hacen, entre otras, dos suposiciones fuertes. Una de ellas es que el Universo es homogéneo e isotrópico y la otra es que la teoría estadística válida es la standard (o genéricamente, estadística de Boltzmann-Gibbs). La primera de estas dos suposiciones está soportada por las observaciones, estas muestran que el Universo es, a gran escala, homogéneo e isotrópico. En cuanto a la validez de la teoría estadística, esto no es algo que pueda ser corroborado en laboratorio en todo el rango de temperaturas y densidades que interesan para estudiar la evolución del Universo. La herramienta más poderosa que existe para someter a prueba una teoría a este nivel es la nucleosíntesis primordial a través de las predicciones de abundancias de elementos livianos que se producen en el Universo temprano.

Más precisamente en cosmología standard la aproximación que se utiliza consiste en considerar que las funciones de distribución que describen el comportamiento de las partículas son las correspondientes a gases ideales. Esto se asume válido en un rango de temperaturas de más de 10 ordenes de magnitud y un rango similar de densidades.

Una forma de ver que tan buena resulta esta aproximación es considerar un marco estadístico más amplio con un parámetro libre que se reduzca al standard en un cierto límite. Este marco ampliado lo brindan naturalmente las estadísticas no-extensivas.

En esta Tesis de Licenciatura hemos hecho un estudio de la influencia de la teoría estadística en la evolución del Universo temprano, cuando se considera el marco no-extensivo.

Capítulo 1

Introducción: estadística no-extensiva

1.1. Generalizaciones de la termoestadística

Existe un consenso entre astrónomos y físicos que sostiene la idea de que la mecánica estadística y la termodinámica de Boltzmann-Gibbs (BG) son “universales”. Sin embargo, en completa analogía con la mecánica Newtoniana no podemos, de ninguna manera, considerarlas universales. De hecho, sabemos que cuando las velocidades involucradas (en un determinado marco de referencia) se aproximan a la de la luz, la mecánica de Newton se vuelve sólo una aproximación y la realidad se encuentra mejor descrita por la relatividad especial. Análogamente, cuando las masas involucradas son tan pequeñas como la masa del electrón, una vez más la mecánica de Newton deviene sólo una aproximación y la mecánica cuántica se vuelve necesaria para describir la naturaleza. También, si las masas involucradas son muy grandes, la mecánica Newtoniana debe ser extendida en la teoría general de la relatividad. Es en estos sentidos en los que no podemos considerar a la mecánica de Newton como universal. En la última década, un gran número de autores respaldan la idea de que el mismo tipo de consideración que acabamos de hacer para la mecánica es aplicable a la estadística y a la termodinámica.

Ciertamente, después de más de un siglo de aplicaciones altamente satisfactorias de la conexión hecha por Boltzmann entre la entropía *macroscópica* de Clausius y la teoría de las probabilidades aplicada al mundo *microscópico*, la termoestadística de BG puede y debe ser considerada como uno de los pilares de la ciencia moderna. De todos modos, es inevitable pensar que, como cualquier otro producto de la mente humana, este formalismo deba estar sujeto a restricciones físicas, i.e. dominios de aplicabilidad fuera de los cuales sea cuando mucho una aproximación.

Parece ser cierto que la estadística de BG describe satisfactoriamente la naturaleza *si* las interacciones microscópicas efectivas son de *corto* alcance (i.e., conexiones espaciales cercanas) *y* la memoria microscópica efectiva es de *corto* alcance (i.e., conexiones temporales cercanas) *y* las condiciones de contorno son *no-(multi)fractales*. Crudamente hablando, los formalismos standard son aplicables (y probablemente sólo cuando) el espacio-tiempo relevante es no-(multi)fractal. Si este no es el caso, algún tipo de extensión parece ser necesaria. De hecho, día a día crece la larga lista de anomalías físicas que no satisfacen (o incluso violan) las prescripciones de la estadística de BG (véase por ejemplo los trabajos de revisión presentados en las Refs.[1, 2, 3]). Una teoría estadística *no-extensiva* que recobra la estadística *extensiva* de BG como caso particular y que describe algunas de las anomalías conocidas fue propuesta en 1988 (véase la Ref.[4]). A pesar de que hoy en día se ha acumulado lo que legítimamente parece ser una gran cantidad de aplicaciones exitosas, es necesario una comprensión más profunda contrastada con verificaciones más amplias. Además, el trabajo computacional debe ser enfatizado dado que en varios contextos los tratamientos analíticos son impracticables.

Finalmente, para ser más específicos, mencionamos algunos ejemplos para los cuales la estadística y la termodinámica de Boltzmann-Gibbs presenta serias dificultades o anomalías. Pensamos en sistemas

que involucran interacciones de largo alcance (e.g. gravitación), sistemas con memoria microscópica de largo alcance, (e.g. procesos estocásticos no-markovianos) y en general sistemas conservativos (e.g. Hamiltonianos) o disipativos que de una forma u otra involucran un espacio-tiempo relevante (i.e. un espacio de fases) con estructura (multi)fractal. Por ejemplo, turbulencia en plasmas de electrones en 2 dimensiones, difusión anómala de Lévy, sistemas granulares, termalización anómala fotón -electrón en sólidos bombardeados por iones, neutrinos solares, velocidades peculiares de galaxias, bremsstrahlung inverso en plasmas y agujeros negros, para citar algunos; claramente son (en algunos) y podrían ser (en otros) casos concretos.

1.2. Entropía

Hace algo más de una década surgió una teoría estadística alternativa como un intento de sobrellevar las dificultades (al menos algunas de ellas) con las que la estadística de BG no tiene éxito. Esta teoría está basada en la siguiente forma generalizada para la entropía,

$$S_q = k \frac{1 - \sum_{i=1}^W p_i^q}{q - 1}, \quad \text{con } q \in \mathbb{R} \quad (1.2.1)$$

donde k es una constante positiva, W es el número total de estados microscópicos accesibles al sistema y el conjunto de probabilidades p_i satisface

$$\sum_{i=1}^W p_i = 1. \quad (1.2.2)$$

Para el caso $q < 0$, debe tomarse la precaución de excluir aquellas probabilidades que no sean estrictamente positivas, de otro modo S_q puede diverger; tal precaución no es necesaria para valores de $q > 0$ (debido a esta propiedad se dice que la entropía es expandible para $q > 0$). La expresión (1.2.1) recupera la forma usual de la entropía de BG en el límite $q \rightarrow 1$, es decir

$$\lim_{q \rightarrow 1} S_q = -k \sum_{i=1}^W p_i \ln p_i. \quad (1.2.3)$$

El índice entrópico q (íntimamente relacionado con, y determinado por, la dinámica microscópica) caracteriza el *grado de no-extensividad* reflejado en la regla de *pseudo-aditividad* para la entropía S_q ,

$$S_q(A + B)/k = S_q(A)/k + S_q(B)/k + (1 - q)[S_q(A)/k][S_q(B)/k], \quad (1.2.4)$$

donde A y B son dos sistemas *independientes* en el sentido que las probabilidades correspondientes al sistema $A + B$ se factorizan en las de A y B (i.e. $p_{ij}(A + B) = p_i(A)p_j(B)$). Inmediatamente vemos que, dado que en todos los casos $S_q \geq 0$ (propiedad de no-negatividad), $q < 1$, $q = 1$ y $q > 1$ corresponden respectivamente a los casos *superaditivo* (*superextensivo*), *aditivo* (*extensivo*) y *subaditivo* (*subextensivo*).

Una propiedad importante que elocuentemente exhibe los efectos de la no-extensividad es la siguiente. Supongamos que el conjunto de posibilidades W se separa arbitrariamente en dos subconjuntos que tienen respectivamente W_L y W_M posibilidades ($W_L + W_M = W$). Definimos $p_L \equiv \sum_{i=1}^{W_L} p_i$ y $p_M \equiv \sum_{i=1}^{W_M} p_i$, de este modo $p_L + p_M = 1$. Un poco de álgebra a partir de (1.2.1) muestra que

$$S_q(p_i) = S_q(p_L, p_M) + p_L^q S_q(\{p_i/p_L\}) + p_M^q S_q(\{p_i/p_M\}), \quad (1.2.5)$$

donde los conjuntos $\{p_i/p_L\}$ y $\{p_i/p_M\}$ son las probabilidades condicionales. Esta sería la famosa propiedad de Shannon si no fuera porque en frente de las entropías asociadas con las probabilidades

condicionales, aparecen p_L^q y p_M^q en vez de p_L y p_M . De hecho, dado que las probabilidades $\{p_i\}$ son números genéricos entre 0 y 1, $p_i^q > p_i$ para $q < 1$ y $p_i^q < p_i$ para $q > 1$, de este modo, $q < 1$ y $q > 1$ privilegiarán los eventos raros y los frecuentes respectivamente. Esta simple propiedad se encuentra en el núcleo de la teoría propuesta.

Recientemente se ha demostrado (véase la Ref.[5]) que si se asume

1. continuidad de la entropía (en los $\{p_i\}$),
2. la entropía es monótonamente creciente como función de W en el caso de equiprobabilidad,
3. propiedad (1.2.4) y
4. propiedad (1.2.5),

entonces existe una única forma para la entropía y está dada por la ecuación (1.2.1).

Otra propiedad importante que sin duda debe ser mencionada en la presente introducción es que S_q es consistente con el principio de máxima ignorancia de Laplace, i.e., S_q es extrema cuando existe equiprobabilidad, $p_i = 1/W \forall i$ (ensamble microcanónico). Este extremo está dado por

$$S_q = k \frac{W^{1-q} - 1}{1 - q} \quad (W \geq 1) \quad (1.2.6)$$

el cual en el límite $q \rightarrow 1$, reproduce la famosa fórmula de Boltzmann $S = k \ln W$. En el límite $W \rightarrow \infty$, S_q diverge si $q \leq 1$, y satura a $k/(q - 1)$ si $q > 1$.

Finalmente señalamos que S_q tiene, con respecto a $\{p_i\}$, concavidad definida para todos los valores de q (S_q es siempre cóncava para $q > 0$ y siempre convexa para $q < 0$), en contraste con la entropía propuesta por Renyi: $S_q^R \equiv (\ln \sum_{i=1}^W p_i^q)/(1 - q) = \ln[1 + (1 - q)S_q/k]/(1 - q)$, que no goza de esta propiedad.

1.2.1. Breve interludio matemático

Antes de definir otras cantidades relevantes es conveniente introducir las siguientes funciones:

$$e_q^x \equiv [1 + (1 - q)x]^{1/(1-q)}, \quad \forall(x, q) \quad (1.2.7)$$

con la definición suplementaria, para $q < 1$ es $e_q^x = 0$ si $1 + (1 - q)x \leq 0$, para $q > 1$, e_q^x diverge en $x = 1/(q - 1)$ y

$$\ln_q x \equiv \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q}, \quad \forall(x, q). \quad (1.2.8)$$

Es inmediato mostrar que $\lim_{q \rightarrow 1} e_q^x = e^x$ y que $\lim_{q \rightarrow 1} \ln_q x = \ln x$, así como también las propiedades

$$e_q^{\ln_q x} = \ln_q e_q^x = x, \quad \forall(x, q). \quad (1.2.9)$$

Con estas definiciones la ecuación (1.2.6) puede reescribirse en una forma que se asemeja a la de Boltzmann, esto es,

$$S_q = k \ln_q W. \quad (1.2.10)$$

1.2.2. Valores de expectación

Introduzcamos ahora el siguiente valor de expectación q -generalizado, no-normalizado :

$$\langle A \rangle_q \equiv \sum_{i=1}^W p_i^q A_i \quad (1.2.11)$$

de modo que $\langle A \rangle_1$ corresponde al valor medio standard para la cantidad física A . Si el sistema bajo consideración es cuántico, su descripción probabilística está dada en términos del operador densidad ρ , cuyos autovalores son los $\{p_i\}$. Entonces, la entropía generalizada está dada por

$$S_q = k \frac{1 - \text{Tr} \rho^q}{q - 1} \quad (\text{Tr} \rho = 1), \quad (1.2.12)$$

y el valor de expectación q -generalizado, no-normalizado, de un observable A que no necesariamente conmuta con ρ es

$$\langle A \rangle_q \equiv \text{Tr} \rho^q A. \quad (1.2.13)$$

La ecuación (1.2.12) puede reescribirse como

$$S_q = -k \langle \ln_q \rho \rangle_q. \quad (1.2.14)$$

Si el sistema bajo estudio es un sistema clásico genérico, las variables relevantes son típicamente continuas, y la descripción probabilística queda determinada por la distribución de probabilidades $p(\vec{r})$, donde \vec{r} es una variable adimensional, digamos, en un espacio de fases de muchos cuerpos. Entonces la entropía generalizada está dada por

$$S_q = k \frac{1 - \int d\vec{r} [p(\vec{r})]^q}{q - 1} \quad \left(\int d\vec{r} p(\vec{r}) = 1 \right), \quad (1.2.15)$$

y el valor de expectación q -generalizado, no-normalizado, de un observable A es

$$\langle A \rangle_q \equiv \int d\vec{r} [p(\vec{r})]^q A(\vec{r}). \quad (1.2.16)$$

En lo que sigue ilustraremos el presente formalismo en el caso en que se tienen W probabilidades microscópicas discretas, la discusión genérica acerca de sistemas cuánticos y clásicos sigue un lineamiento similar. En repetidas ocasiones hemos señalado la característica “no-normalizada”, volveremos sobre esto más adelante.

1.3. Ensamble canónico

La primera situación física no trivial es aquella en la que un dado sistema se encuentra en contacto con un termostato a temperatura T . Para estudiar esta situación, seguiremos el camino tomado por Gibbs y nos concentraremos en el ensamble canónico. Más precisamente, para obtener la distribución de equilibrio térmico asociada a un sistema físico conservativo en contacto con el termostato extremizaremos S_q con las restricciones impuestas por los vínculos adecuados. El primero de estos vínculos entraña la definición misma de probabilidad, este es

$$\sum_{i=1}^W p_i = 1. \quad (1.3.1)$$

1.3.1. Posibles vínculos dados por la energía interna

Es importante notar que existe cierta libertad acerca de como imponer el segundo vínculo, es decir el que da cuenta de cómo se relacionan los valores de las energías asociadas a los diferentes estados microscópicos con el valor de la energía interna del sistema como un todo. A decir verdad varias elecciones han probado ser útiles en distintos aspectos. En lo que sigue de esta sección mencionaremos brevemente dos de las tres elecciones más usuales en tanto que trataremos con un poco más de detalle la tercera opción. Daremos argumentos que hacen pensar que es esta última opción la que permite una mejor conexión entre la estadística y la termodinámica.

Primera elección

La primera elección fue introducida y desarrollada en la Ref.[4]. Consiste en utilizar además de la restricción (1.3.1), la siguiente:

$$\sum_{i=1}^W p_i \epsilon_i = U^{(1)}, \quad (1.3.2)$$

donde el supraíndice (1) se refiere a la *primera* elección y los $\{\epsilon_i\}$ son los autovalores del Hamiltoniano del sistema (con las condiciones de contorno elegidas). En otras palabras, se mantiene la definición de energía interna standard dentro del marco generalizado. Utilizando las técnicas usuales, puede verse que los valores de $\{p_i\}$ que hacen extrema a S_q con las restricciones impuestas por (1.3.1) y (1.3.2) son,

$$p_i^{(1)} = \frac{[1 - (q-1)\beta^* \epsilon_i]^{1/(q-1)}}{\sum_{j=1}^W [1 - (q-1)\beta^* \epsilon_j]^{1/(q-1)}}, \quad (1.3.3)$$

donde debemos resaltar que, a pesar de las apariencias, β^* *no* es el multiplicador de Lagrange asociado a la restricción sobre la energía interna (es por este motivo que se ha utilizado β^* y no la notación usual β). Esta expresión,

1. recobra la estadística usual de Boltzmann-Gibbs ($p_i \propto e^{-\beta \epsilon_i}$) en el límite $q \rightarrow 1$ y
2. depende de las energías microscópicas con una ley de potencias en vez de la dependencia exponencial familiar.

Estas dos características importantes se encontrarán presentes en las tres elecciones que discutiremos. Rápidamente se hizo evidente que esta elección para la energía interna era inadecuada para tratar las dificultades matemáticas serias (divergencias no deseadas) que se encuentran presentes en una variedad de sistemas anómalos.

Segunda elección

La segunda elección, también introducida en la Ref.[4] y desde entonces intensamente estudiada permite un camino natural para evitar algunas dificultades que la primera elección no puede resolver. Esta postula como restricción para la energía interna,

$$\sum_{i=1}^W p_i^q \epsilon_i = U^{(2)}, \quad (1.3.4)$$

donde el supraíndice (2) se refiere a la *segunda* elección. Los valores de p_i que hacen extrema a S_q son ahora

$$p_i^{(2)} = \frac{[1 - (1-q)\beta \epsilon_i]^{1/(1-q)}}{Z_q^{(2)}}, \quad (1.3.5)$$

donde hemos definido la función de partición generalizada

$$Z_q^{(2)} = \sum_{j=1}^W [1 - (1-q)\beta\epsilon_j]^{1/(1-q)}. \quad (1.3.6)$$

Este resultado coincide con el resultado producido por la primera elección excepto por el hecho de que $(1-q)$ desempeña ahora el rol que antes jugaba $(q-1)$. En este caso en contraste con el anterior β es, como es usual, el multiplicador de Lagrange asociado a la restricción sobre la energía interna. Esta distribución presenta un *cut-off* (i.e. probabilidades nulas para niveles de la energía lo suficientemente altos como para producir valores negativos en el argumento de la función e_q) para todos los valores de $q < 1$, mientras que este fenómeno ocurría en la primera elección para $q > 1$. La distribución de equilibrio (1.3.5) puede ser reescrita en forma conveniente como

$$p_i^{(2)} = \frac{e_q^{-\beta\epsilon_i}}{Z_q^{(2)}} \quad \left(Z_q^{(2)} \equiv \sum_{j=1}^W e_q^{-\beta\epsilon_j} \right), \quad (1.3.7)$$

esta expresión se asemeja formalmente al resultado de Boltzmann-Gibbs (de hecho este tipo de analogías se presenta a lo largo de todo el formalismo). Introduciendo $T \equiv 1/k\beta$ puede mostrarse la siguiente serie de igualdades (véase la Ref.[6])

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S_q}{\partial U_q^{(2)}}, \quad (1.3.8)$$

$$F_q^{(2)} \equiv U_q^{(2)} - TS_q = -\frac{1}{\beta} \ln_q Z_q^{(2)}, \quad (1.3.9)$$

$$U_q^{(2)} = -\frac{\partial}{\partial \beta} (\ln_q Z_q^{(2)}), \quad (1.3.10)$$

$$C_q^{(2)} \equiv T \frac{\partial S_q}{\partial T} = \frac{\partial U_q^{(2)}}{\partial T} = -T \frac{\partial^2 F_q^{(2)}}{\partial T^2}, \quad (1.3.11)$$

donde F_q, U_q y C_q representan las correspondientes generalizaciones de la energía libre de Helmholtz, la energía interna y el calor específico.

Como vemos, la estructura usual de las transformaciones de Legendre de la termodinámica standard permanece válida para *todos* los valores de q . Dentro de esta segunda elección una larga lista de teoremas standard han demostrado ser *q-invariantes*, esto es preservan la *estructura* standard en el *formalismo no-extensivo*. Sólo por mencionar algunos, cumplen con esta propiedad: el teorema H (irreversibilidad temporal macroscópica), el teorema de Ehrenfest (principio de correspondencia), el teorema de reciprocidad de Onsager (irreversibilidad temporal microscópica), las relaciones de Kramer y Wannier (causalidad), la desigualdad de Bogolyubov y la estabilidad termodinámica (signo definido para los calores específicos). Las bondades de estas propiedades sumadas a los éxitos obtenidos en las descripciones de una variedad de anomalías en sistemas físicos específicos, constituyen probablemente la base de la popularidad de este formalismo en la literatura. De todas maneras, esta segunda elección implica tres consecuencias que, a pesar de ser posibles en principio, son sin lugar a dudas, extrañas en términos de los fundamentos físicos a los que estamos acostumbrados, estas son,

1. La distribución dada por las ecuaciones (1.3.5) y (1.3.6) no es invariante ante una traslación uniforme del espectro de energías $\{\epsilon_i\}$ (i.e. los resultados termodinámicos dependen de la elección del origen de energías).
2. La manera en la cual es definido el valor generalizado de la energía interna $U_q^{(2)}$, sugiere que todos los observables de la teoría deben aparecer en la misma forma, esto es, a través de los llamados

valores de *expectación, no-extensivos*, definidos mediante $O_q^{(2)} \equiv \langle O_i \rangle_q \equiv \sum_{i=1}^W p_i^q O_i$ donde $\{O_i\}$ son los autovalores asociados con el observable asociado O (a lo largo de esta discusión supondremos por simplicidad que el observable conmuta con el operador densidad). A pesar de que es claro que de ninguna manera la definición de estas cantidades viola la teoría de probabilidades, el hecho matemático que $\langle 1 \rangle_q$ no es en general 1, es difícil de interpretar.

3. Finalmente, si dos sistemas A y B son tales que satisfacen las propiedades $p_{ij}^{A+B} = p_i^A p_j^B$ y $\epsilon_{ij}^{A+B} = \epsilon_i^A + \epsilon_j^B$, entonces

$$U_q^{(2)}(A+B)/k = U_q^{(2)}(A)/k + U_q^{(2)}(B)/k + (1-q)[U_q^{(2)}(A)S_q(B)/k][U_q^{(2)}(B)S_q(A)/k], \quad (1.3.12)$$

lo cual difiere radicalmente de $U_q^{(2)}(A)/k + U_q^{(2)}(B)/k$. En otras palabras el primer principio de la termodinámica (es decir, la conservación de la energía) no preserva macroscópicamente la misma forma que tiene microscópicamente. Podría objetarse sin embargo que si estamos considerando plausible la no-aditividad de la entropía, no resultará tan extraño aceptar que lo mismo sucede para la energía. El punto es que la entropía es una cantidad *informacional* mientras que la energía es una cantidad *mecánica*. Dado que el presente formalismo no altera de ninguna manera los procesos a nivel dinámico, la composición no-aditiva para las energías internas recién mencionada, está en contra de lo que se esperaría.

Tercera elección

Estamos ahora en condiciones de introducir la tercera elección para el vínculo que impone la energía interna. Esta elección ha sido propuesta por Plastino, Mendes y Tsallis en la Ref.[7]. De hecho, una manera de evitar (en forma simultánea) las tres consecuencias poco familiares que acabamos de discutir es postular la restricción que impone la energía interna como

$$\frac{\sum_{i=1}^W p_i^q \epsilon_i}{\sum_{i=1}^W p_i^q} = U^{(3)}, \quad (1.3.13)$$

i.e. pesar los autovalores del Hamiltoniano con el conjunto de probabilidades $p_i^q / \sum_{i=1}^W p_i^q$ (a veces llamadas probabilidades “escolta”, del inglés *escort*); aquí el supraíndice (3) se refiere a la *tercera* elección. Los valores de p_i que hacen extrema a S_q son esta vez

$$p_i^{(3)} = \frac{[1 - (1-q)\beta(\epsilon_i - U_q^{(3)}) / \sum_{i=1}^W (p_i^{(3)})^q]^{1/(1-q)}}{\bar{Z}_q^{(3)}} \quad (1.3.14)$$

$$= \frac{\exp_q[-\beta(\epsilon_i - U_q^{(3)}) / \sum_{i=1}^W (p_i^{(3)})^q]}{\bar{Z}_q^{(3)}}, \quad (1.3.15)$$

donde hemos definido la función de partición generalizada

$$\bar{Z}_q^{(3)} = \sum_{j=1}^W \left[1 - (1-q)\beta(\epsilon_j - U_q^{(3)}) / \sum_{i=1}^W (p_i^{(3)})^q \right]^{1/(1-q)} \quad (1.3.16)$$

$$= \sum_{j=1}^W \exp_q \left[-\beta(\epsilon_j - U_q^{(3)}) / \sum_{i=1}^W (p_i^{(3)})^q \right]. \quad (1.3.17)$$

Puede demostrarse (véase la Ref.[8]) que si se define ($T \equiv 1/k\beta$) se cumplen las siguientes igualdades,

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S_q}{\partial U_q^{(3)}}, \quad (1.3.18)$$

$$F_q^{(3)} \equiv U_q^{(3)} - TS_q = -\frac{1}{\beta} \ln_q \bar{Z}_q^{(3)}, \quad (1.3.19)$$

y entonces

$$S_q = k \ln_q \bar{Z}_q^{(3)}. \quad (1.3.20)$$

Además el uso de la ecuación (1.3.19), junto con la igualdad $\beta \partial U_q^{(3)} / \partial \beta = \partial(\ln_q \bar{Z}_q^{(3)}) / \partial \beta$ conducen a un resultado interesante, a saber

$$U_q^{(3)} = \frac{\partial}{\partial \beta} (\beta F_q^{(3)}) \quad \forall q. \quad (1.3.21)$$

Notemos que $\bar{Z}_q^{(3)}$ se refiere a los niveles de energía $\{\epsilon_i\}$ con respecto a $U_q^{(3)}$. Podemos utilizar 0 como la energía de referencia definiendo $Z_q^{(3)}$ a través de la relación

$$\ln_q Z_q^{(3)} = \ln_q \bar{Z}_q^{(3)} - \beta U_q^{(3)}. \quad (1.3.22)$$

De esta manera podemos reescribir las ecuaciones (1.3.19) y (1.3.21) como,

$$F_q^{(3)} = -\frac{1}{\beta} \ln_q Z_q^{(3)}, \quad (1.3.23)$$

y

$$U_q^{(3)} = -\frac{\partial}{\partial \beta} (\ln_q Z_q^{(3)}). \quad (1.3.24)$$

Finalmente puede verificarse que

$$C_q^{(3)} \equiv T \frac{\partial S_q}{\partial T} = \frac{\partial U_q^{(3)}}{\partial T} = -T \frac{\partial^2 F_q^{(3)}}{\partial T^2}. \quad (1.3.25)$$

Vemos entonces que esta tercera elección, al igual que la segunda, satisface la estructura de las transformaciones de Legendre, presenta el *cut-off* (útil) para $q < 1$ y según comentaremos rápidamente, satisface varios de los teoremas *q-generalizados* que ya hemos mencionado. De todas maneras, lo que hace tan particular a esta elección es el hecho de se encuentra libre de las tres consecuencias poco familiares que fueron señaladas cuando tratamos la segunda elección. Esto es,

1. Si sumamos una constante ϵ_0 al espectro $\{\epsilon_i\}$ tenemos que (como probaremos en forma auto-consistente) $U_q^{(3)}$ deviene $U_q^{(3)} + \epsilon_0$ lo cual deja invariantes a las diferencias $\epsilon_i - U_q^{(3)}$ que a la vez deja invariante (en forma auto-consistente) el conjunto de probabilidades p_i y entonces a todas las cantidades termoestadísticas.
2. La definición de $U_q^{(3)}$ sugiere la siguiente definición para los valores de *expectación no-extensivos*:

$$O_q^{(3)} \equiv \langle \langle O_i \rangle \rangle_q \equiv \frac{\sum_{i=1}^W p_i^q O_i}{\sum_{i=1}^W p_i^q}, \quad (1.3.26)$$

donde O es cualquier observable. Resulta ahora trivial, mostrar que $\langle \langle 1 \rangle \rangle_q = 1 \quad \forall q$.

3. Es también inmediato mostrar que para los sistemas A y B que ya hemos introducido, se cumple

$$U_q^{(3)}(A + B) = U_q^{(3)}(A) + U_q^{(3)}(B), \quad (1.3.27)$$

recuperando de este modo la misma forma válida en la estadística standard ($q = 1$).

Finalmente mencionamos (para más detalles véase la Ref.[7]) que las probabilidades de equilibrio asociadas con la tercera elección *coinciden* con las de la segunda elección *pero con una temperatura renormalizada*. Esta es la razón por la cual *todos los teoremas* que no utilizan la dependencia específica con la temperatura de las cantidades termodinámicas involucradas (sino que más bien utilizan el hecho de que el sistema se encuentre a una temperatura finita fija pero arbitraria) *permanecen válidos*. Además la descripción de todos los sistemas para los cuales el formalismo provisto por la segunda elección ha sido apropiada (sistemas auto-gravitantes, turbulencia, difusión anómala, velocidades peculiares de galaxias, neutrinos solares, bremsstrahlung), resulta también exitosa en el marco provisto por la tercera elección en tanto estos no involucren dependencias térmicas específicas.

1.4. Funciones de distribución

En esta sección describiremos el formalismo del ensamble gran canónico en el contexto no-extensivo. Daremos también las expresiones generalizadas de las funciones de distribución que luego se utilizarán para establecer el formalismo termodinámico en el Universo. Introduciremos aquí la aproximación de factorización basada en la segunda de las opciones anteriormente descritas. Esta aproximación será suficiente para nuestros fines ya que provee resultados compatibles con los que se obtienen utilizando la expresión exacta de las funciones de distribución, mucho más compleja. Véase por ejemplo el trabajo de Tirnakli y Torres (Ref.[9]).

A pesar de que la tercera opción parece ser conceptualmente más simple que la segunda, los cálculos de dependencias térmicas concretas son mucho más difíciles. Esto se debe a que en la segunda elección las ecuaciones para los $\{p_i\}$ son explícitas (ver (1.3.5)) mientras que resultan implícitas en la tercera elección (ver (1.3.14)).

El objetivo de este trabajo es estudiar la evolución del Universo cuando las funciones de distribución difieren levemente de las standard. Destacamos que la principal virtud de trabajar en el marco provisto por la segunda opción es que esta provee (según veremos enseguida) expresiones sencillas para las funciones de distribución generalizadas. Este hecho hará posible que podamos proseguir los cálculos en forma analítica más allá de los puntos alcanzables en tratamientos similares utilizando expresiones más complejas. El tratamiento analítico permitirá seguir con mayor claridad la propagación de los efectos que produce el hecho de cambiar las funciones de distribución a medida que avancemos en los cálculos.

1.4.1. Ensamble gran canónico

Consideremos un gas compuesto por N partículas cuánticas no-interactuantes. Si el sistema se encuentra en contacto con un reservorio térmico y uno de partículas, la energía E y el número de partículas N fluctúan, es decir, la energía y el número de partículas se conservan en promedio. Los estados estacionarios del sistema están dados por la solución de la ecuación de Schrödinger:

$$H\psi_R = E_R\psi_R, \quad (1.4.1)$$

donde H es el Hamiltoniano y ψ_R es la función de onda del sistema. Los estados accesibles al sistema están representados por R , que describe los posibles estados cuánticos del gas. En el formalismo de la segunda cuantización, R queda determinado por el conjunto de los números de ocupación $\{n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\}$, donde n_k denota el número de partículas en el estado k .

En el marco mecanocuántico las partículas son consideradas indistinguibles y esto lleva en forma natural a que los estados físicos de un sistema cuántico sólo puedan estar descritos por funciones de onda que sean simétricas o antisimétricas frente al intercambio de partículas (véase por ejemplo el libro de Cohen-Tannoudji, Ref.[10]). Las funciones de onda simétricas describen partículas de spin

entero llamadas bosones y un número arbitrario de partículas puede estar en un dado estado. Es decir, $n_k = 0, 1, 2, \dots$, para bosones. Por otro lado, las funciones de onda antisimétricas describen partículas de spin semientero llamadas fermiones. En este caso es válido el principio de exclusión de Pauli. Con esto, $n_k = 0, 1$ para fermiones.

Los estados del sistema conforman un ensamble con probabilidades P_R . Por otro lado, dado que el sistema se encuentra en contacto con el reservorio de calor y de partículas, puede establecerse un ensamble de tipo gran canónico.

En el estado de equilibrio podemos determinar las probabilidades de distribución en los estados caracterizados por R de sistemas similares del ensamble gran canónico. De acuerdo al teorema H de Boltzmann, la entropía debe ser un máximo. Recordemos que en el marco no-extensivo en que estamos trabajando, la entropía está dada por

$$S_q = \frac{1 - \sum_R P_R^q}{q - 1}, \quad (1.4.2)$$

donde hemos utilizado unidades tales que la constante k que aparece en la ecuación (1.2.1) toma el valor $k = 1$.

El problema se reduce a extremizar la entropía con los vínculos impuestos por: la normalización de las probabilidades, la conservación de la energía y la conservación del número de partículas en promedio, estos son:

$$1 = \sum_R P_R, \quad (1.4.3)$$

$$\bar{E} = \sum_R P_R^q E_R, \quad (1.4.4)$$

$$\bar{N} = \sum_R P_R^q N_R. \quad (1.4.5)$$

Para hallar la solución de este problema variacional, siguiendo el método de los multiplicadores indeterminados de Lagrange, debemos maximizar la expresión:

$$Q = \frac{1}{q - 1} \left(1 - \sum_R P_R^q \right) - \alpha \sum_R P_R - \beta \sum_R P_R^q E_R - \gamma \sum_R P_R^q N_R, \quad (1.4.6)$$

donde α, β y γ son los multiplicadores indeterminados de Lagrange. Haciendo $\partial Q / \partial P_R = 0$, obtenemos

$$\sum_R \left(\frac{q P_R^{q-1}}{q - 1} + \alpha + q \beta P_R^{q-1} E_R + \gamma q P_R^{q-1} N_R \right) = 0. \quad (1.4.7)$$

Dado que la expresión entre paréntesis es válida para todo R , cada uno de los términos de la suma debe anularse, es decir,

$$q P_R^{q-1} + (q - 1)\alpha + q(q - 1)\beta P_R^{q-1} E_R + \gamma q(q - 1) P_R^{q-1} N_R = 0. \quad (1.4.8)$$

Podemos hallar la expresión para P_R a partir de la ecuación anterior identificando a los multiplicadores β y γ mediante:

$$\gamma = -\beta\mu, \quad \beta = 1/T, \quad (1.4.9)$$

donde μ es el potencial químico y T es la temperatura del estado de equilibrio termodinámico. De esta manera la probabilidad de que el ensamble se encuentre en el estado R es

$$P_R = [1 + \beta(q - 1)E_R - \beta(q - 1)\mu]^{1/(q-1)} / Z_q, \quad (1.4.10)$$

donde hemos definido la generalización de la gran función de partición mediante

$$Z_q = \sum_R [1 + \beta(q-1)E_R - \beta(q-1)\mu]^{1/(q-1)}. \quad (1.4.11)$$

El estado cuántico del gas queda caracterizado unívocamente cuando los números de ocupación de los estados de una partícula son especificados. Los números de ocupación también determinan en forma automática la energía total y el número total de partículas, esto es,

$$E_R = n_1\epsilon_1 + n_2\epsilon_2 + \dots + n_k\epsilon_k + \dots, \quad (1.4.12)$$

$$N_R = n_1 + n_2 + \dots + n_k + \dots, \quad (1.4.13)$$

donde ϵ_k denota la energía de una partícula en el estado k .

Sustituyendo las ecuaciones (1.4.12) y (1.4.13) en las expresiones (1.4.11) y (1.4.10) obtenemos,

$$P_{n_1, \dots, n_k, \dots} = \frac{[1 + \beta(q-1)(\epsilon_1 - \mu)n_1 + \dots + \beta(q-1)(\epsilon_k - \mu)n_k + \dots]^{1/(q-1)}}{Z_q}, \quad (1.4.14)$$

donde

$$Z_q = \sum_{n_1, \dots, n_k, \dots} [1 + \beta(q-1)(\epsilon_1 - \mu)n_1 + \dots + \beta(q-1)(\epsilon_k - \mu)n_k + \dots]^{1/(q-1)}. \quad (1.4.15)$$

1.4.2. Aproximación de factorización

Para un gas diluido, donde las correlaciones entre partículas puede ser ignorada, los estados de las diferentes partículas pueden ser considerados como independientes, de modo que la función de partición dada por (1.4.11) puede factorizarse en términos de los factores correspondientes al estado k -ésimo de una partícula, es decir,

$$Z_q = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{n_k=0}^{\infty} [1 + \beta(q-1)(\epsilon_k - \mu)n_k]^{1/(q-1)}. \quad (1.4.16)$$

Sobre la validez de esta factorización, volveremos en un momento.

A partir de esta expresión, puede demostrarse (véase la Ref.[11] para los detalles) que los números medios de ocupación generalizados (i.e. las funciones de distribución) están dados por

$$\langle n_r \rangle_q = \frac{1}{[1 + (q-1)\beta(\epsilon_r - \mu)]^{1/(q-1)} + \xi}, \quad (1.4.17)$$

con $\xi = 0, +1$ ó -1 según se trate de un gas de Maxwell-Boltzmann (MB), Bose-Einstein (BE) o Fermi-Dirac (FD) respectivamente. Como debe ser, tomando el límite para $(q-1) \rightarrow 0$ se recuperan las funciones de distribución standard de MB, BE y FD respectivamente. Vale la pena destacar que estas expresiones para las funciones de distribución cuánticas no es exacta debido a la aproximación involucrada al pasar de la ecuación (1.4.15) a la (1.4.16). La factorización es sólo una aproximación ya que en general

$$[1 + (q-1)(A+B)]^{1/(q-1)} \neq [1 + (q-1)A]^{1/(q-1)} [1 + (q-1)B]^{1/(q-1)}. \quad (1.4.18)$$

Dado que la igualdad es válida cuando $q = 1$ es de esperar que para valores de $|q-1| \ll 1$ ambos miembros no difieran demasiado entre sí. Además se ha demostrado, al menos en el caso de los fotones (véase Ref.[12]), que si llamamos “exacto” al miembro izquierdo de (1.4.18) y “aproximación” al miembro derecho entonces *exacto* > *aproximación* para $q > 1$ y *exacto* < *aproximación* para $q < 1$. Con esto, los

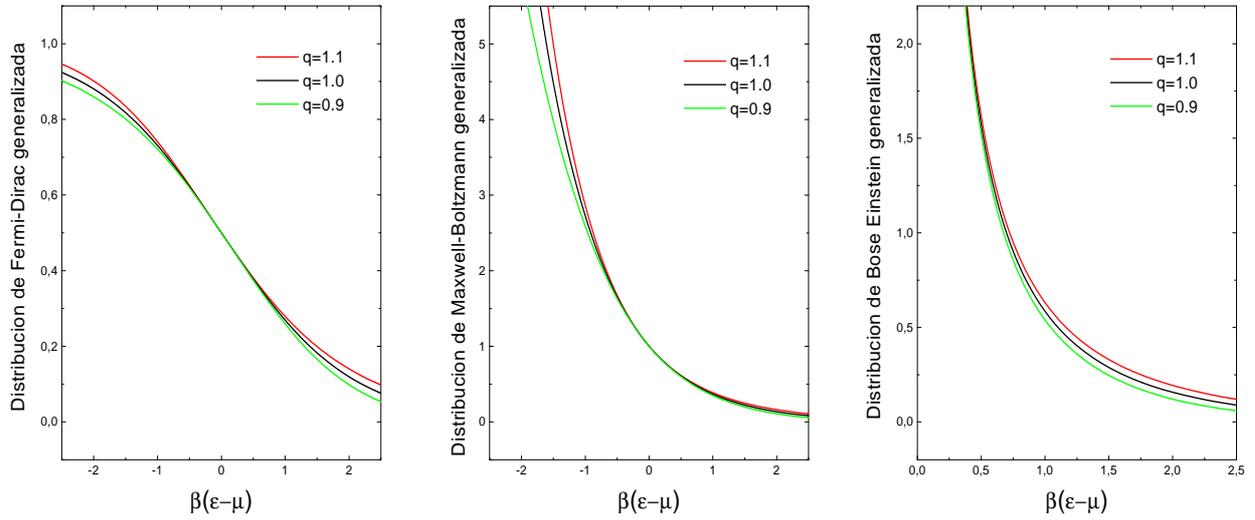


Figura 1.1: Comportamiento de las funciones de distribución generalizadas (FD, MB y BE respectivamente) para $q = 1,1$ y $q = 0,9$. También se muestran las distribuciones standard correspondientes.

resultados obtenidos a partir de la factorización constituyen, en este caso, cotas superiores e inferiores del resultado exacto con respecto al índice q .

En el orden de aproximación que nos interesa es lícito retener sólo el orden dominante en $(q - 1)$ en la expresión (1.4.17). El desarrollo a primer orden otorga,

$$\langle n_r \rangle_q = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_r - \mu)} + \xi} + \frac{q - 1}{2} \frac{(\beta(\epsilon_r - \mu))^2 e^{\beta(\epsilon_r - \mu)}}{(e^{\beta(\epsilon_r - \mu)} + \xi)^2} \quad (1.4.19)$$

En la Fig.(1.1) se muestra el cambio producido en las funciones de distribución debido a la no-extensividad al considerar dos valores de $(q - 1)$ cercanos a 0. También se muestran las funciones de distribución standard.

La ecuación (1.4.19) provee la forma para la función de distribución que utilizaremos en el próximo capítulo. Allí analizaremos cómo son afectados algunos de los eventos cosmológicos más importantes que tienen lugar en el transcurso de la historia térmica del Universo.

Capítulo 2

Historia térmica de un Universo levemente no-extensivo

2.1. Introducción

En este capítulo estableceremos las bases formales de una cosmología no-extensiva. Para esto, tomaremos las funciones de distribución provistas por la teoría estadística introducida en el capítulo anterior y construiremos con ellas la historia térmica del Universo. Nuestro interés estará centrado en estudiar que aspectos se modifican, y cómo lo hacen, respecto de lo que predice la cosmología standard; es decir, la cosmología construida utilizando las funciones de distribución de Maxwell-Boltzmann, Fermi-Dirac o Bose-Einstein.

Como hemos dicho, las desviaciones con respecto a la estadística standard podrían representar la aparición de efectos no-extensivos relacionados con interacciones de largo alcance, efectos de memoria, o evolución en un espacio fractal o multifractal. En el Universo temprano usualmente se asume que las funciones de distribución son las usuales, de este modo, el considerar la evolución del Universo en un marco teórico más amplio nos permitirá evaluar este hecho y hallar límites para el rango de su validez.

En las secciones 2.2 y 2.3 hallaremos las expresiones generalizadas de las ecuaciones fundamentales que gobiernan el comportamiento termodinámico de las distintas especies de partículas que existen en el Universo. Luego, en las secciones 2.4 y 2.5, estudiaremos cómo se modifican diferentes eventos, como el desacoplamiento de partículas y otros. Finalmente, en las secciones 2.6 y 2.7, generalizaremos resultados que pueden ser utilizados en otros contextos, entre ellos la ley de Saha y la ecuación de Boltzmann. Estos resultados constituirán la base de nuestro ulterior estudio de los procesos de nucleosíntesis primordial, así como otras aplicaciones.

Este capítulo se encuentra reportado en la Ref. [13].

2.2. Termodinámica en el equilibrio

2.2.1. Densidad de partículas, densidad de energía y presión

La densidad numérica n , la densidad de energía, ρ y la presión, P , para un gas de partículas quedan definidas en términos de su correspondiente función de distribución en el espacio de las fases $f(\mathbf{x}, \mathbf{p})$. Si suponemos que el espacio es homogéneo e isotrópico, se sigue que $f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = f(\mathbf{p})$. Si consideramos además que las partículas se encuentran en equilibrio térmico y que interactúan débilmente, entonces

n , ρ y P en términos de $f(\mathbf{p})$ vienen dadas por las expresiones (véase, por ejemplo, el libro de Huang [14]):

$$n = \frac{g}{h^3} \int f(\mathbf{p}) d^3p, \quad (2.2.1)$$

$$\rho = \frac{g}{h^3} \int f(\mathbf{p}) E(|\mathbf{p}|) d^3p, \quad (2.2.2)$$

$$P = \frac{g}{h^3} \int f(\mathbf{p}) \frac{|\mathbf{p}|^2}{3E(|\mathbf{p}|)} d^3p, \quad (2.2.3)$$

donde el factor g contempla posibles grados de libertad internos de las partículas (spin, helicidad, etc).

A los efectos de evaluar estas integrales, debe darse además de la función de distribución $f(\mathbf{p})$, la relación energía-impulso $E = E(\mathbf{p})$. Tomaremos en general la relación energía-impulso dada por la Teoría de la Relatividad Especial, esto es: $E^2(|\mathbf{p}|) = c^2|\mathbf{p}|^2 + m^2c^4$ y utilizaremos sus formas aproximadas, ya sea en el límite clásico o en el relativista, cuando sea apropiado.

Resulta conveniente trabajar en el Sistema de Unidades Naturales (SUN). En este sistema, las constantes fundamentales son tales que $\hbar = c = k_B = 1$, con k_B la constante de Boltzmann. Cuando sea necesario realizar cálculos en forma explícita para dar resultados por ejemplo en el sistema CGS, utilizaremos los factores de conversión que se detallan en el Apéndice I.

Si $f(\mathbf{p})$ depende del impulso sólo a través de su módulo (como es el caso cuando en la función de distribución aparece solamente la energía), debido a la isotropía en el espacio de impulsos, podemos escribir para las cantidades antes definidas,

$$n = \frac{g}{2\pi^2} \int f(p) p^2 dp, \quad (2.2.4)$$

$$\rho = \frac{g}{2\pi^2} \int f(p) E(p) p^2 dp, \quad (2.2.5)$$

$$P = \frac{g}{2\pi^2} \int f(p) \frac{p^2}{3E(p)} p^2 dp. \quad (2.2.6)$$

Consideremos ahora la aproximación de factorización en el marco de la teoría estadística no-extensiva introducida anteriormente, en este caso la función de distribución esta dada por

$$f_q(\mathbf{p}(E(x))) = \frac{1}{e^{x-\psi} \mp 1} + \frac{q-1}{2} \frac{(x-\psi)^2 e^{x-\psi}}{(e^{x-\psi} \mp 1)^2}. \quad (2.2.7)$$

El signo $-$ debe usarse para los bosones y el $+$ para los fermiones y hemos definido $x = \beta E$ y $\psi = \beta \mu$ con $\beta = 1/k_B T = 1/T$ siendo T la temperatura y μ el potencial químico.

En la aproximación en que estamos trabajando, el cambio en la estadística se traduce en un término adicional en la función de distribución. Esto es, podemos escribir a $f_q(p)$ como suma de dos términos. Al primero lo llamaremos término standard (lo denotaremos con $f_{st}(p)$, en general, con un índice st) y representará a las funciones de distribución usuales, ya sean las de Bose-Einstein, Fermi-Dirac o Maxwell-Boltzmann. Al segundo lo denominaremos término correctivo, o simplemente corrección (lo escribiremos como $f_c(p)$, en general, con un índice c), éste contemplará cómo se modifica la función de distribución debido a la no-extensividad de la teoría estadística.

En lo que sigue calcularemos en forma explícita cada una de las cantidades definidas en (2.2.4), (2.2.5) y (2.2.6). Debido a lo señalado en el párrafo anterior y dado que el operador integral es lineal, es de esperar que todos los resultados que obtengamos por sustitución directa de $f_q(p)$ en cada una de esas expresiones estén constituidos por dos términos: uno proveniente de la parte standard y otro de la corrección. Por otro lado, en cálculos más complejos y cuando sea oportuno, escribiremos los

resultados generalizados como los resultados que provienen de la teoría standard más una corrección a primer orden en $(q - 1)$. Todas las ecuaciones a las que arribemos deberán reducirse a las ecuaciones derivadas en la teoría standard en el límite $(q - 1) \rightarrow 0$. Los resultados que se detallan en este capítulo provenientes de considerar la parte standard de las funciones de distribución, pueden ser verificados en el libro de Kolb & Turner [17].

Caso Relativista (no degenerado)

Calculemos ahora cada una de estas cantidades en el régimen relativista $E \gg m$, es decir cuando $E^2 \simeq p^2$. El caso no degenerado queda definido por la condición $k_B T = T \gg \mu$. Bajo estas condiciones, podemos aproximar la función de distribución $f_q(\mathbf{p})$ por:

$$f_q(\mathbf{p}(E(x))) = \frac{1}{e^x \mp 1} + \frac{q-1}{2} \frac{x^2 e^x}{(e^x \mp 1)^2}. \quad (2.2.8)$$

■ Densidad numérica de partículas

Teniendo en cuenta la relación energía-impulso, y usando a la energía como variable de integración, obtenemos:

$$n_q = \frac{g}{2\pi^2} T^3 \int_0^\infty f_q(x) x^2 dx, \quad (2.2.9)$$

donde hemos definido la variable adimensional $x = E/T$.

Podemos llevar a cabo en forma explícita el cálculo de n_q utilizando la expresión para f_q propuesta en (2.2.8) y las expresiones integrales para las funciones de Bose ($g_n(z)$) y de Fermi ($f_n(z)$) dadas por:

$$g_n(z) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{z^{-1}e^x - 1} dx, \quad (2.2.10)$$

$$f_n(z) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{z^{-1}e^x + 1} dx. \quad (2.2.11)$$

$\Gamma(n)$ son las funciones Gamma, definidas en forma integral por

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty e^{-x} x^n dx \quad \text{para } n > -1, \quad (2.2.12)$$

y que satisfacen la relación de recurrencia

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n). \quad (2.2.13)$$

Además, la función $\Gamma(n)$ es tal que

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}. \quad (2.2.14)$$

Utilizando lo anterior, obtenemos,

$$n_q = \frac{g}{2\pi^2} \Gamma(3) \left\{ \begin{array}{c} g_3(1) \\ f_3(1) \end{array} \right\} T^3 + \frac{g}{2\pi^2} \frac{q-1}{2} 4\Gamma(4) \left\{ \begin{array}{c} g_4(1) \\ f_4(1) \end{array} \right\} T^3 \left\{ \begin{array}{c} \text{bosones} \\ \text{fermiones} \end{array} \right\}. \quad (2.2.15)$$

Teniendo en cuenta que $g_n(1) = \zeta(n)$, con $\zeta(n)$ la función Zeta de Riemann, definida por

$$\zeta(n) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^n}, \quad (2.2.16)$$

y que en particular $\zeta(3) = \pi^4/90 \simeq 1,202$ y $\zeta(4) \simeq 1,082$, estamos en condiciones de evaluar (2.2.15). Esto otorga,

$$n_q^b = \frac{g^b}{2\pi^2} 2\zeta(3)T^3 + \frac{g^b}{2\pi^2} 12,98(q-1)T^3, \quad (2.2.17)$$

$$n_q^f = \frac{g^f}{2\pi^2} \frac{3}{2}\zeta(3)T^3 + \frac{g^f}{2\pi^2} 11,36(q-1)T^3. \quad (2.2.18)$$

Donde se ha utilizado la relación existente entre $f_n(1)$ y $g_n(1) = \zeta(n)$ dada por

$$f_n(1) = \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) g_n(1). \quad (2.2.19)$$

Efectivamente, como habíamos anticipado, vemos que debido al cambio en la estadística la densidad numérica de partículas consta de dos términos, es decir hemos podido escribir $n_q = n_{st} + n_c$ tanto para los bosones (b) como para los fermiones (f), donde n_{st} son los primeros términos en (2.2.17) y (2.2.18)

■ Densidad de energía

Efectuando en (2.2.5) el mismo cambio de variable que hicimos para calcular n_q , llegamos a una expresión integral para ρ_q dada por:

$$\rho_q = \frac{g}{2\pi^2} T^4 \int_0^\infty f_q(x) x^3 dx. \quad (2.2.20)$$

Esto nos conduce a,

$$\rho_q = \frac{g}{2\pi^2} \Gamma(4) \left\{ \begin{array}{l} g_4(1) \\ f_4(1) \end{array} \right\} T^4 + \frac{g}{2\pi^2} \frac{q-1}{2} 5\Gamma(5) \left\{ \begin{array}{l} g_5(1) \\ f_5(1) \end{array} \right\} T^4 \left\{ \begin{array}{l} \text{bosones} \\ \text{fermiones} \end{array} \right\}. \quad (2.2.21)$$

Teniendo en cuenta las relaciones antes mencionadas entre $f_n(1)$ y $g_n(1)$, encontramos que la densidad de energía de los bosones es

$$\rho_q^b = \frac{\pi^2}{30} g^b T^4 + \frac{g^b}{2\pi^2} \frac{5!}{2} \zeta(5)(q-1)T^4, \quad (2.2.22)$$

mientras que la de los fermiones es

$$\rho_q^f = \frac{\pi^2}{30} \frac{7}{8} g^f T^4 + \frac{g^f}{2\pi^2} \frac{5!}{2} \frac{15}{16} \zeta(5)(q-1)T^4. \quad (2.2.23)$$

Definiendo $g = \sum_b g^b + \frac{7}{8} \sum_f g^f$, podemos escribir la densidad de energía total: $\rho_q^T = \sum_b \rho_q^b + \sum_f \rho_q^f$;

$$\rho_q^T = \frac{\pi^2}{30} g T^4 + \frac{1}{2\pi^2} \frac{5!}{2} \left[\sum_b g^b + \frac{15}{16} \sum_f g^f \right] \zeta(5)(q-1)T^4. \quad (2.2.24)$$

Reconocemos el primero de estos términos como la densidad de energía que se obtiene en el caso standard. Recordando que $\zeta(5) \simeq 1,037$, podemos reescribir este resultado como:

$$\rho_q^T = \frac{\pi^2}{30} \left[g + 9,58(q-1) \left(\sum_b g^b + \frac{15}{16} \sum_f g^f \right) \right] T^4. \quad (2.2.25)$$

Es notable que, para partículas relativistas, la dependencia con la temperatura de n_q y de ρ_q que se desprende del formalismo no-extensivo sea la misma que en el caso standard. Señalamos que se debe a que esta dependencia en T proviene de haber efectuado un cambio de variable en las integrales que definen a n_q y a ρ_q del mismo modo para las dos contribuciones (tanto para la standard como para la corrección).

- Presión

Es fácil ver que empleando en (2.2.6) el mismo cambio de variable que usamos para calcular n_q y ρ_q , llegamos a una expresión integral para P dada por:

$$P = \frac{1}{3} \frac{g}{2\pi^2} T^4 \int_0^\infty f(x) x^3 dx. \quad (2.2.26)$$

Es decir que en el régimen relativista se cumple la relación $P = \rho/3$, independientemente de la estadística bajo consideración. Podemos escribir entonces $P_q = \rho_q/3$.

Es interesante calcular ahora, en base a los valores obtenidos para n_q y ρ_q , la energía promedio por partícula definida por $\langle E_q \rangle = \rho_q/n_q$. Para los bosones, obtenemos a partir de (2.2.17) y (2.2.22)

$$\langle E_q^b \rangle = \frac{\frac{\pi^2}{30} g^b T^4 + \frac{g^b}{2\pi^2} \frac{5!}{2} \zeta(5)(q-1)T^4}{\frac{g^b}{2\pi^2} 2\zeta(3)T^3 + \frac{g^b}{2\pi^2} \frac{4!}{2} \zeta(4)(q-1)T^3}, \quad (2.2.27)$$

mientras que a partir de las (2.2.18) y (2.2.23) queda para los fermiones:

$$\langle E_q^f \rangle = \frac{\frac{\pi^2}{30} \frac{7}{8} g^f T^4 + \frac{g^f}{2\pi^2} \frac{5!}{2} \frac{15}{16} \zeta(5)(q-1)T^4}{\frac{g^f}{2\pi^2} \frac{3}{2} \zeta(3)T^3 + \frac{g^f}{2\pi^2} \frac{4!}{2} \frac{7}{8} \zeta(4)(q-1)T^3}. \quad (2.2.28)$$

Desarrollando cada una de estas expresiones y reteniendo los términos a primer orden en $(q-1)$ tenemos que

$$\langle E_q^b \rangle = [2,701 + 11,292(q-1)]T, \quad (2.2.29)$$

y

$$\langle E_q^f \rangle = [3,151 + 44,835(q-1)]T. \quad (2.2.30)$$

Es de notar que para un mismo valor de q los fermiones se ven más afectados que los bosones por el cambio en la función de distribución.

Caso no relativista

El régimen no relativista queda definido por la condición $m \gg T$. Es decir, la energía en reposo de las partículas es grande comparada con el valor de $k_B T$, el cual da una idea de la energía cinética media de las partículas. Podemos desarrollar en serie de v/c la expresión que da la energía relativista en términos de la velocidad (véase, por ejemplo, el libro de Jackson [15] o el de Landau [16]),

$$E(v) = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (2.2.31)$$

Retener sólo el primer orden en v/c , otorga

$$E(v) = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2, \quad (2.2.32)$$

o teniendo en cuenta que en el límite clásico es $p = mv^2/2$, en el SUN obtenemos

$$E = p^2/2m + m. \quad (2.2.33)$$

Con esto vemos que los factores ∓ 1 en los denominadores de la expresión (2.2.7) son despreciables frente a las exponenciales que allí aparecen. La función de distribución tanto para bosones como para fermiones está dada entonces por:

$$f_q(\mathbf{p}(E)) = e^{-(E-\mu)/T} + \frac{q-1}{2} ((E-\mu)/T)^2 e^{-(E-\mu)/T}. \quad (2.2.34)$$

En términos del impulso

$$f_q(\mathbf{p}) = \exp \left[\frac{-p^2}{2mT} - \frac{(m-\mu)}{T} \right] \left[1 + \frac{q-1}{2} \left(\frac{p^2}{2mT} + \frac{(m-\mu)}{T} \right)^2 \right]. \quad (2.2.35)$$

Estamos ahora en condiciones de calcular las mismas cantidades que en la sección previa.

■ Número de partículas

A partir de la expresión (2.2.4) y utilizando para $f_q(\mathbf{p})$ la forma anterior, es inmediato calcular n_q . Para ello es conveniente hacer el cambio de variable $u = p^2/2mT$ y tener en cuenta las expresiones integrales y las relaciones de recurrencia que dimos en (2.2.12) y (2.2.13) para la funciones $\Gamma(n)$.

El resultado que se obtiene es

$$n_q = g \left(\frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-(m-\mu)/T} \left[1 + \frac{q-1}{2} \left(\frac{15}{4} + 3\frac{m-\mu}{T} + \left(\frac{m-\mu}{T} \right)^2 \right) \right]. \quad (2.2.36)$$

En este caso, el primer miembro dentro del paréntesis da cuenta del resultado standard mientras que los otros tres constituyen la corrección a orden $(q-1)$.

En cuanto a la densidad de energía y la presión sabemos que en el límite no relativista sus valores vienen dados por:

$$\rho_q = mn_q \quad (2.2.37)$$

$$P_q = n_q T \quad (2.2.38)$$

Cabe señalar que en este caso, a diferencia de lo que sucedía para partículas relativistas, sí se ve alterada la dependencia de los observables con la temperatura .

2.2.2. Exceso de partículas sobre antipartículas

Nos concentramos ahora en el cálculo del exceso de partículas sobre antipartículas. Consideremos la reacción $r^+ + r^- \leftrightarrow \gamma + \gamma$, donde r^+ y r^- representan una partícula genérica y su correspondiente antipartícula. Si esta reacción se encuentra en equilibrio, los potenciales químicos de r^+ y r^- están relacionados con el potencial químico de los fotones por la ecuación $\mu^+ + \mu^- = \mu^\gamma + \mu^\gamma$. Ahora bien, dado que el potencial químico de los fotones es nulo; la ecuación anterior se reduce a $\mu^+ = -\mu^-$. Pasemos entonces a analizar los dos regímenes que nos interesan.

Caso relativista

En el caso de los fermiones, la expresión

$$n_q^+ - n_q^- = \frac{g}{2\pi^2} T^3 \int_{m/T}^{\infty} x \left(x^2 - \left(\frac{m}{T} \right)^2 \right)^{1/2} [f_q^+(x) - f_q^-(x)] dx, \quad (2.2.39)$$

representa la diferencia entre la densidad numérica de partículas y de antipartículas, donde debemos considerar además que cada una de las funciones de distribución debe ser tomada de la expresión (2.2.7) con $\psi^+ = \beta\mu$ y $\psi^- = -\beta\mu$ respectivamente. La variable de integración es, como antes, $x = E/T$ y

resulta conveniente definir $\psi = \psi^+ = -\psi^-$. En el régimen relativista se cumple la condición $m/T \ll 1$ y las integrales standard pueden resolverse fácilmente teniendo en cuenta que (véase la Ref.[18])

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{\cosh(x) \cosh(\psi)} dx = \frac{\psi}{3} \left[\frac{\pi^2 + (\psi)^2}{\sinh(\psi)} \right]. \quad (2.2.40)$$

Recordando que en el sistema de unidades que elegimos $\beta = 1/T$, un cálculo sencillo nos lleva a,

$$n_{st}^+ - n_{st}^- = \frac{g}{6\pi^2} T^3 \left[\pi^2 \frac{\mu}{T} + \left(\frac{\mu}{T} \right)^3 \right]. \quad (2.2.41)$$

Para calcular la corrección a orden $(q-1)$ necesitamos resolver la integral

$$\frac{g}{2\pi^2} T^3 \frac{q-1}{2} \int_0^\infty \left[\frac{x^2(x-\psi)^2 e^{x-\psi}}{(e^{x-\psi} + 1)^2} - \frac{x^2(x+\psi)^2 e^{x+\psi}}{(e^{x+\psi} + 1)^2} \right] dx. \quad (2.2.42)$$

Deseamos, en principio, obtener una solución analítica. Esto nos lleva a pensar en implementar un procedimiento similar a los introducidos por Tirnakli y Torres en la Ref.[9]. Conociendo el resultado de la integral:

$$I^m = \int_0^\infty \frac{u^2}{e^{m(u-\psi)} + 1} - \int_0^\infty \frac{u^2}{e^{m(u+\psi)} + 1} = \frac{1}{3} (\pi^2 \psi m^{-2} + \psi^3), \quad (2.2.43)$$

donde m es considerado un parámetro libre, podemos obtener la integral que necesitamos de la siguiente manera. Consideremos I^m y derivémosla dos veces respecto del parámetro m . Un cálculo explícito nos lleva a ver que $[-d^2 I^m / dm^2]_{m=1}$ es la integral que queremos calcular más dos términos adicionales dados por:

$$-2 \int_0^\infty du \left[\frac{u^2(u-\psi)^2 e^{m(u-\psi)}}{(e^{m(u-\psi)} + 1)^3} - \frac{u^2(u+\psi)^2 e^{m(u+\psi)}}{(e^{m(u+\psi)} + 1)^3} \right]. \quad (2.2.44)$$

En lo que sigue, daremos argumentos para despreciar la contribución de estos dos términos frente a la que proviene de los dos que aparecen en la expresión (2.2.42).

Para evaluar analíticamente la magnitud relativa de estos términos extra con respecto a las integrales que estamos buscando, resulta una buena aproximación tomar $\psi \simeq 0$. En efecto, cuando el Universo se enfría hasta llegar a la temperatura $T \ll m_e$, los electrones y los positrones se aniquilarán y sólo sobrevivirá un pequeño exceso dado por $n_{st}^+ - n_{st}^-$. Ahora bien, las únicas partículas cargadas además de los electrones y los positrones son los protones. Dado que el Universo, como un todo, es neutro, el exceso de electrones $n_{st}^+ - n_{st}^-$ debe ser igual a la densidad numérica de protones n_{st}^p , y teniendo en cuenta que $n_{st}^p/n_\gamma \simeq 10^{-8}$, debe ser $(n_{st}^+ - n_{st}^-)/n_{st}^\gamma \simeq 10^{-8}$. A partir de (2.2.41) y recordando que en el marco de la teoría standard, la densidad numérica de fotones viene dada por:

$$n_{st}^\gamma = \frac{\zeta(3)}{\pi^2} g_\gamma T^3, \quad (2.2.45)$$

podemos escribir

$$\frac{n_{st}^+ - n_{st}^-}{n_{st}^\gamma} = \frac{g_e}{g_\gamma} \frac{1}{6\zeta(3)} \left[\pi^2 \frac{\mu}{T} + \left(\frac{\mu}{T} \right)^3 \right] \simeq 10^{-8}, \quad (2.2.46)$$

o, teniendo en cuenta los valores numéricos de las constantes en juego

$$\frac{n_{st}^+ - n_{st}^-}{n_{st}^\gamma} = 1,33 \frac{\mu}{T} \simeq 10^{-8}. \quad (2.2.47)$$

Claramente se satisface la relación $\mu/T \ll 1$, de modo que podemos tomar $\psi \simeq 0$ en cada uno de los términos que aparecen en $[-d^2 I^m / dm^2]_{m=1}$. De esta manera obtenemos dos tipos de términos, los primeros tienen la forma

$$A = \int_0^\infty \frac{u^4 e^u}{(e^u + 1)^2} du, \quad (2.2.48)$$

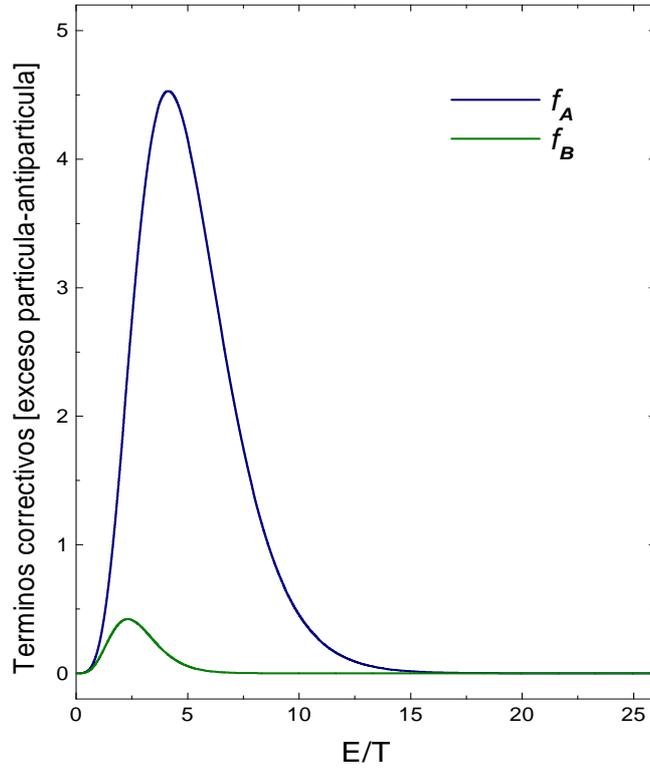


Figura 2.1: *Integrandos en juego en el análisis del término correctivo para el exceso partícula-antipartícula (caso no relativista).*

mientras que los que queremos pesar respecto a estos, vienen dados por

$$B = 2 \int_0^{\infty} \frac{u^4 e^u}{(e^u + 1)^3} du. \quad (2.2.49)$$

Si llamamos $f_A(u)$ y $f_B(u)$ a los integrandos de las expresiones anteriores es inmediato ver que ambos están relacionados según

$$f_B(u) = \frac{2}{e^u + 1} f_A(u). \quad (2.2.50)$$

Con esto vemos que si bien en un entorno de 0 es $f_B(u) \simeq f_A(u)$; el integrando de B decae muy rápidamente en forma exponencial comparado con el integrando de A . Finalmente, una integración numérica de estas funciones (ver Fig(2.1)) nos conduce a los valores: $A = 22,72$ y $B = 1,091$. Es decir que existe una diferencia de más de un orden de magnitud en la contribución de cada uno de estos términos. Con estos argumentos como justificación y a los efectos de continuar con nuestros cálculos en forma analítica, aproximamos la corrección del exceso de partículas como

$$n_c^+ - n_c^- = \frac{g}{2\pi^2} T^3 \frac{q-1}{2} \left[\frac{-d^2 I^m}{dm^2} \right]_{m=1}, \quad (2.2.51)$$

donde $[-d^2 I^m / dm^2]_{m=1}$ debe obtenerse por derivación a partir de (2.2.43). Una evaluación explícita de esta derivada nos lleva a:

$$n_q^+ - n_q^- = \frac{g}{6\pi^2} T^3 \left[\pi^2 (1 + 3(1-q)) \frac{\mu}{T} + \left(\frac{\mu}{T} \right)^3 \right]. \quad (2.2.52)$$

Caso no relativista

Calcularemos ahora el exceso en la densidad numérica de partículas de una dada especie no relativista sobre sus correspondientes antipartículas.

Esta vez debemos considerar para n_q^+ y n_q^- , la expresión dada en (2.2.36), con $\mu^+ = \mu$ y $\mu^- = -\mu$ respectivamente. De este modo obtenemos:

$$n_q^+ = g \left(\frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-(m-\mu)/T} \left[1 + \frac{q-1}{2} \left(\frac{15}{4} + 3\frac{m-\mu}{T} + \left(\frac{m-\mu}{T} \right)^2 \right) \right], \quad (2.2.53)$$

$$n_q^- = g \left(\frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-(m+\mu)/T} \left[1 + \frac{q-1}{2} \left(\frac{15}{4} + 3\frac{m+\mu}{T} + \left(\frac{m+\mu}{T} \right)^2 \right) \right]. \quad (2.2.54)$$

Restando ambas expresiones, obtenemos para el término standard

$$n_{st}^+ - n_{st}^- = 2g \left(\frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-m/T} \sinh \left(\frac{\mu}{T} \right) \quad (2.2.55)$$

mientras que el término correctivo viene dado por:

$$n_c^+ - n_c^- = 2g \left(\frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-m/T} \left[\sinh \left(\frac{\mu}{T} \right) \left[\frac{15}{4} + 3\frac{m}{T} + \left(\frac{m^2 + \mu^2}{T^2} \right) \right] - \cosh \left(\frac{\mu}{T} \right) \left[3\frac{\mu}{T} + 2\frac{m\mu}{T^2} \right] \right]. \quad (2.2.56)$$

2.2.3. Número efectivo de grados de libertad

La densidad total de energía de todas las especies de partículas en equilibrio térmico puede ser obtenida sumando las contribuciones de cada especie, es decir

$$\rho_q^T = \sum_k \rho_q^k, \quad (2.2.57)$$

donde el índice k corre sobre todas las especies de partículas presentes. Ahora bien, comparando la dependencia con la temperatura de la densidad de energía de una especie no relativista (dada por (2.2.25)), con la de una relativista (ecuaciones (2.2.36) y (2.2.37)), vemos que esta última es menor que la primera por un factor exponencial. Debido a esto es una muy buena aproximación incluir en ρ_q^T sólo a las especies relativistas. De esta manera la energía total viene dada por:

$$\rho_q^R = \sum_r \rho_q^r, \quad (2.2.58)$$

donde el índice r corre sobre todas las especies de partículas relativistas presentes a una dada temperatura.

A partir de (2.2.20), podemos escribir para la densidad de energía de la especie relativista no degenerada,

$$\rho_q^r = \frac{g^r}{2\pi^2} T_r^4 \int_0^\infty f_q^r(x_r) x_r^3 dx_r, \quad (2.2.59)$$

donde la variable de integración es $x_r = E_r/T_r$. Debido a que la expresión que debemos considerar en este caso viene dada por (2.2.8), la integral que aparece en ρ_q^r es independiente de r , y su valor sólo depende del spin de las partículas. Si utilizamos el índice i para las distintas especies de bosones y el j para las de fermiones, podemos escribir

$$\rho_q^R = \sum_i \rho_q^{b_i} + \sum_j \rho_q^{f_j}, \quad (2.2.60)$$

donde $\rho_q^{b_i}$ viene dada por (2.2.22), y $\rho_q^{f_j}$ por (2.2.23), con las correspondientes T_{b_i}, g^{b_i} y T_{f_j}, g^{f_j} . Aquí hemos tenido en cuenta la posibilidad de que las distintas especies tengan una distribución térmica con una temperatura diferente a la de los fotones y diferente entre ellas. Podemos expresar, sin embargo, la densidad de energía de todas las especies relativistas en términos de la temperatura de los fotones T como:

$$\rho_q^R = \rho_{st}^R + \rho_c^R, \quad (2.2.61)$$

con

$$\rho_{st}^R = \frac{\pi^2}{30} \left[\sum_i g^{b_i} \left(\frac{T_{b_i}}{T} \right)^4 + \frac{7}{8} \sum_j g^{f_j} \left(\frac{T_{f_j}}{T} \right)^4 \right] T^4, \quad (2.2.62)$$

y

$$\rho_c^R = \frac{1}{2\pi^2} \frac{q-1}{2} 5! \zeta(5) \left[\sum_i g^{b_i} \left(\frac{T_{b_i}}{T} \right)^4 + \frac{15}{16} \sum_j g^{f_j} \left(\frac{T_{f_j}}{T} \right)^4 \right] T^4. \quad (2.2.63)$$

Definimos la contribución por parte de los términos standard a los grados de libertad efectivos como:

$$g_\star^{st} = \sum_i g^{b_i} \left(\frac{T_{b_i}}{T} \right)^4 + \frac{7}{8} \sum_j g^{f_j} \left(\frac{T_{f_j}}{T} \right)^4, \quad (2.2.64)$$

y la contribución proveniente de los términos correctivos como:

$$g_\star^c = \frac{15}{\pi^4} \frac{q-1}{2} 5! \zeta(5) \left[\sum_i g^{b_i} \left(\frac{T_{b_i}}{T} \right)^4 + \frac{15}{16} \sum_j g^{f_j} \left(\frac{T_{f_j}}{T} \right)^4 \right]. \quad (2.2.65)$$

De esta forma, los grados de libertad efectivos que contribuyen a la densidad de energía total están dados por

$$g_\star^q = g_\star^{st} + g_\star^c, \quad (2.2.66)$$

y la densidad de energía es

$$\rho_q^R = \frac{\pi^2}{30} g_\star^q T^4. \quad (2.2.67)$$

Debido a que la dependencia con la temperatura de ρ_q^R es idéntica a la de ρ_{st}^R , podemos estudiar el Universo primitivo en el marco de una teoría no-extensiva utilizando las ecuaciones de evolución válidas en el caso standard. Todos los efectos vinculados a la no-extensividad estarán contenidos en g_\star^q .

Como un ejemplo de esto consideremos la ecuación de Friedmann

$$\left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 + \frac{k}{R^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho, \quad (2.2.68)$$

donde $R(t)$ es el factor de escala en una métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) y k es la curvatura del espacio-tiempo. En el Universo temprano, debido a la gran densidad de energía presente, es una muy buena aproximación tomar $k = 0$. Durante la época dominada por radiación $P = \rho/3$, $R(t) = t^{1/2}$, y $\dot{R}/R = H(t) = 1/t$ (véase la sección 3.1 del libro de Kolb & Turner). Teniendo en cuenta que en el SUN, $G = m_{pl}^{-2}$, con m_{pl} la masa de Planck, y usando las expresiones para la densidad de energía dada por (2.2.67), obtenemos:

$$H = 1,66 (g_\star^q)^{1/2} \frac{T^2}{m_{pl}}. \quad (2.2.69)$$

Esto implica una relación tiempo-temperatura dada por

$$t = 0,301 (g_{\star}^q)^{-1/2} \frac{m_{Pl}}{T^2}. \quad (2.2.70)$$

Entonces, a pesar de que la forma funcional es la misma que en el caso standard, la relación tiempo-temperatura se modifica por el cambio en las funciones de distribución cuánticas. Definiendo $g_{\star}^c = (q-1)\hat{g}_{\star}^c$ podemos escribir (2.2.70) a primer orden en $(q-1)$, como $t = t_{st} + (q-1)t_c$ con

$$t_{st} = 0,301 (g_{\star}^{st})^{-1/2} \frac{m_{Pl}}{T^2}, \quad (2.2.71)$$

y

$$t_c = 0,301 \frac{q-1}{2} (g_{\star}^{st})^{1/2} \hat{g}_{\star}^c \frac{m_{Pl}}{T^2}. \quad (2.2.72)$$

2.3. Cantidades conservadas

A partir de las ecuaciones de Einstein puede mostrarse que la cantidad $(\rho + P)/T$ se conserva en un volumen comovil independientemente de la estadística bajo consideración. En efecto, del conjunto completo de las ecuaciones de campo de Einstein, o del hecho que $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$, puede mostrarse que (véase la sección (3,1) del libro de Kolb & Turner [17]):

$$d(\rho_q R^3) = -P_q d(R^3), \quad (2.3.1)$$

lo cual puede ser escrito como:

$$\frac{d}{dT} [(\rho_q + P_q) R^3] = (R^3) \frac{dP_q}{dT}. \quad (2.3.2)$$

A partir de esta ecuación, obtenemos finalmente:

$$\frac{d}{dT} \left[\left(\frac{\rho_q + P_q}{T} \right) R^3 \right] = 0. \quad (2.3.3)$$

Como puede verificarse en forma directa por diferenciación.

Debemos notar entonces que sin importar el grado de no-extensividad (es decir el valor de q) la cantidad $s_q \equiv (\rho_q + P_q)/T$ es una cantidad conservada en un volumen comovil.

Si la contribución de partículas relativistas es dominante, $P_q^r = \rho_q^r/3$, y podemos escribir para s_q :

$$s_q = \frac{4}{3} \left[\sum_i \frac{\rho_q^{b_i}}{T_{b_i}} + \sum_j \frac{\rho_q^{f_j}}{T_{f_j}} \right]. \quad (2.3.4)$$

Considerando nuevamente las ecuaciones (2.2.22) y (2.2.23), para $\rho_q^{b_i}$ y $\rho_q^{f_j}$ respectivamente y procediendo en forma similar a como lo hicimos al definir los grados de libertad efectivos, podemos escribir:

$$s_q = \frac{2\pi^2}{45} g_{\star s}^q T^3, \quad (2.3.5)$$

donde hemos definido $g_{\star s}^q$ como:

$$g_{\star s}^q = g_{\star s}^{st} + g_{\star s}^c, \quad (2.3.6)$$

con

$$g_{\star s}^{st} = \left[\sum_i g^{b_i} \left(\frac{T_{b_i}}{T} \right)^3 + \frac{7}{8} \sum_j g^{f_j} \left(\frac{T_{f_j}}{T} \right)^3 \right] \quad (2.3.7)$$

y

$$g_{\star s}^c = \frac{60}{2\pi^2} \frac{45}{\pi^2} \frac{\zeta(5)}{2} (q-1) \left[\sum_i g^{b_i} \left(\frac{T_{b_i}}{T} \right)^3 + \frac{15}{16} \sum_j g^{f_j} \left(\frac{T_{f_j}}{T} \right)^3 \right]. \quad (2.3.8)$$

Notemos que, en contraste con lo que sucede en el caso standard, $|g_{\star}^q| > |g_{\star s}^q|$ en el caso en que todas las temperaturas coinciden.

A partir de la cantidad s_q , conservada en un volumen comovil, podemos definir el número $S_q = s_q R^3 = cte.$, y obtener la relación temperatura-factor de escala:

$$T \propto (g_{\star s}^q)^{-1/3} R^{-1}. \quad (2.3.9)$$

Entonces, como en el caso standard, se cumple la relación $T \propto R^{-1}$ sólo en los períodos para los cuales $g_{\star s}^q$ es constante. Si el número de grados de libertad cambia, por ejemplo debido al desacoplamiento de alguna especie, la disminución de $g_{\star s}^q$ hará que la temperatura decrezca más lentamente que R^{-1} .

2.3.1. Forma explícita para los números conservados

Para cualquier especie de partículas que no es creada ni destruida, debe ser: $n_q \propto R^{-3}$. De esta manera vemos que existe un número conservado $N_q \propto n_q R^3$. Dado que $R^3 \propto s_q^{-1}$ podemos definir este número en forma conveniente como $N_q \equiv n_q / s_q$.

Caso relativista ($T \gg m$)

Analicemos el caso de bosones y fermiones por separado. Definimos para ello la cantidad $\hat{g}_{\star s}^c$ tal que $g_{\star s}^c = (q-1)\hat{g}_{\star s}^c$.

- Bosones

Pretendemos dar una expresión para el número $N_q^b = n_q^b / s_q$ que conste del resultado standard N_{st}^b más una corrección proveniente del cambio en la estadística. Partiendo de

$$N_q^b = \frac{45}{4\pi^4} g^b [2\zeta(3) + 12\zeta(4)(q-1)] (g_{\star s}^q)^{-1} \quad (2.3.10)$$

y reteniendo sólo los términos a primer orden en $(q-1)$, obtenemos:

$$N_q^b = N_{st}^b + \frac{45}{2\pi^4} g^b (q-1) \left[6\zeta(4) - \frac{\hat{g}_{\star s}^c}{g_{\star s}^{st}} \zeta(3) \right], \quad (2.3.11)$$

con

$$N_{st}^b = \frac{45}{2\pi^4} \zeta(3) g^b (g_{\star s}^{st})^{-1}. \quad (2.3.12)$$

- Fermiones

A partir de la expresión:

$$N_q^f = \frac{45}{4\pi^4} g^f \left[\frac{3}{2} \zeta(3) + \frac{21}{2} \zeta(4)(q-1) \right] (g_{\star s}^q)^{-1} \quad (2.3.13)$$

y procediendo en el cálculo en forma completamente análoga a como hicimos para los bosones; obtenemos para los fermiones

$$N_q^f = N_{st}^f + \frac{45}{2\pi^4} \frac{3}{4} g^f (q-1) \left[21\zeta(4) - \frac{\hat{g}_{\star s}^c}{g_{\star s}^{st}} \zeta(3) \right], \quad (2.3.14)$$

con

$$N_{st}^f = \frac{45}{2\pi^4} \frac{3}{4} \zeta(3) g^f (g_{\star s}^{st})^{-1}. \quad (2.3.15)$$

Caso no relativista ($T \ll m$)

En este caso el número conservado $N_q = n_q/s_q$ viene dado por:

$$N_q = \frac{45}{2\pi^2} g \left(\frac{m}{2\pi T} \right)^{3/2} e^{-(m-\mu)/T} \left[1 + \frac{q-1}{2} \left(\frac{15}{4} + 3\frac{m-\mu}{T} + \left(\frac{m-\mu}{T} \right)^2 \right) \right] (g_{\star s}^q)^{-1}. \quad (2.3.16)$$

El uso de la función $\hat{g}_{\star s}^c$ lleva a

$$N_q = \frac{45g}{4\sqrt{2}\pi^5} \left(\frac{m}{T} \right)^{3/2} e^{-(m-\mu)/T} \left(1 - (q-1) \frac{\hat{g}_{\star s}^c}{g_{\star s}^{st}} \right) \times \left[1 + \frac{q-1}{2} \left(\frac{15}{4} + 3\frac{m-\mu}{T} + \left(\frac{m-\mu}{T} \right)^2 \right) \right] (g_{\star s}^q)^{-1}. \quad (2.3.17)$$

Nuevamente, reteniendo sólo los términos a primer orden en $(q-1)$, obtenemos:

$$N_q = N_{st} + \frac{45g}{4\sqrt{2}\pi^5} \left(\frac{m}{T} \right)^{3/2} e^{-(m-\mu)/T} (q-1) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{15}{4} + 3\frac{m-\mu}{T} + \left(\frac{m-\mu}{T} \right)^2 \right) - \frac{\hat{g}_{\star s}^c}{g_{\star s}^{st}} \right], \quad (2.3.18)$$

donde hemos tenido en cuenta que N_{st} está definido por:

$$N_{st} = \frac{45g}{4\sqrt{2}\pi^5} \left(\frac{m}{T} \right)^{3/2} e^{-(m-\mu)/T}. \quad (2.3.19)$$

2.4. Desacoplamiento de especies

En cualquier instante de tiempo, el Universo contiene una distribución de fotones cuyo espectro de energías corresponde con un alto grado de aproximación al de un cuerpo negro, con alguna temperatura $T_\gamma(t)$. Si una determinada especie de partículas A se encuentra acoplada a los fotones directa o indirectamente, y si la tasa de estas interacciones (digamos $A - \gamma$) es lo suficientemente grande, entonces estas partículas tendrán la misma temperatura que los fotones: $T_A = T_\gamma$. A menudo nos referimos a la temperatura de los fotones como la “temperatura del Universo”. Por supuesto, cualquier conjunto de especies $A, B, C \dots$ que interactúen entre ellas con una tasa suficientemente alta, también tendrán la misma temperatura $T_A = T_B = T_C \dots$

Mientras el Universo evoluciona, la temperatura $T(t)$ cambia debido a la expansión en una escala de tiempo del orden de $H^{-1}(t) \equiv (\dot{R}/R)^{-1}$: la tasa con la cual cambia la temperatura también estará dada por $H(t)$. La tasa de interacción (por partícula) puede ser expresada como $\Gamma \equiv n \langle \sigma v \rangle$, donde n es la densidad numérica de partículas blanco, v es la velocidad relativa y σ es la sección eficaz de interacción. Dado que usualmente σ es una función de la energía, $\langle \sigma v \rangle$ denota un valor promedio.

La historia térmica del Universo, véase por ejemplo la discusión en la sección 3,5 del libro de Kolb & Turner [17], es básicamente la comparación entre Γ y H como funciones del tiempo. Ignorando la variación con la temperatura de g_{\star}^q para esta discusión, $T \propto R^{-1}$ y la tasa de cambio de la temperatura \dot{T}/T está dada simplemente por la tasa de expansión $\dot{T}/T = -H$. En tanto las interacciones necesarias sean lo suficientemente rápidas como para que las funciones de distribución puedan ajustarse al cambio de temperatura producido por la expansión, el Universo evolucionará, con un buen grado de aproximación, a través de una sucesión de estados cercanos al equilibrio térmico, con la temperatura decreciendo como R^{-1} . Es decir, siempre que $\Gamma \gg H$, las interacciones podrán mantener el equilibrio y en ese caso, la función de distribución evolucionará adiabáticamente, manteniendo la forma de las funciones que hemos considerado hasta ahora con una temperatura correspondiente a su valor instantáneo.

En la discusión anterior, el hecho de haber supuesto homogeneidad espacial ha jugado un rol crucial. Esto puede ser visto como sigue: en la escala de tiempo característica $H^{-1}(t)$, sobre la cual los parámetros del Universo cambian, las partículas pueden viajar como máximo una distancia $cH^{-1}(t)$. De este modo, si dos regiones en el Universo tienen temperaturas diferentes en algún tiempo t_1 , las interacciones entre partículas no serán capaces de llevarlas a la misma temperatura en un tiempo posterior $t > t_1$. Imponiendo una estricta homogeneidad en el Universo entero *en todos los tiempos*, hemos sorteado este problema.

Puede pasar que, en algún instante de tiempo, la tasa de interacción *total*, $\Gamma_A(t)$, de una dada especie A (que tiene en cuenta tanto a las interacciones entre partículas de la misma especie como entre distintas especies) caiga por debajo de la tasa de expansión $H(t)$: $\Gamma_A(t) \lesssim H(t)$. Bajo tal circunstancia, las funciones de distribución de todas las especies con excepción de A todavía estarán dadas por sus valores en el equilibrio con una temperatura común T . Sin embargo la especie A se encuentra ahora totalmente desacoplada; y su función de distribución no estará dada en general por su expresión en el equilibrio. De todas maneras, su forma puede ser deducida a partir de los argumentos que siguen.

Una vez que una dada especie r se ha desacoplado completamente, cada una de las partículas viajará a lo largo de una geodésica en el espacio-tiempo. Según se demuestra en la sección 2,3 del libro de Padmanabhan [19], la función de distribución $f(\mathbf{p})$ se conserva durante tal propagación libre. Esto permite obtener la función $f^d(\mathbf{p})$ después que la especie se haya desacoplado, a partir de la función $f^{eq}(\mathbf{p})$ antes del desacoplamiento. Asumimos por simplicidad que el desacoplamiento ocurre en forma instantánea en algún tiempo $t = t_d$ cuando la temperatura del Universo era $T = T_d$ y el factor de expansión tenía el valor $R(t_d)$. Para $t < t_d$, la función de distribución que describe a la especie r es la correspondiente al equilibrio y está dada por (2.2.7).

Sea ahora la función de distribución $f^d(\mathbf{p}, t)$, válida para tiempos posteriores al desacoplamiento $t > t_d$. Debido al corrimiento al rojo producido en el momento lineal \mathbf{p} ; todas las partículas que en el instante t tienen momento \mathbf{p} , deben haber tenido momento $\mathbf{p}R(t)/R(t_d)$ en el instante de desacoplamiento $t = t_d$; es decir

$$f_q^d(\mathbf{p}, t) = f_q^{eq}(\mathbf{p}R(t)/R(t_d), t_d) \quad \text{para } t > t_d, \quad (2.4.1)$$

donde f_q^{eq} es la función de distribución de equilibrio que hemos escrito más arriba. Vemos entonces que si la especie de partículas r estuvo en equilibrio en algún momento, podemos determinar la función de distribución que la describe en cualquier instante posterior t .

Consideremos ahora las funciones de distribución para especies que ya se han desacoplado, la expresión (2.4.1) se simplifica considerablemente si el desacoplamiento ocurre o bien cuando la especie es ultrarelativista ($T_d \gg m$), o bien cuando es no relativista ($T_d \ll m$).

Desacoplamiento relativista, no degenerado

Escribamos en forma explícita el miembro derecho de (2.4.1) teniendo en cuenta que $E \simeq p$ y tomando $\mu/T \simeq 0$,

$$f_q^d(\mathbf{p}, t) = \left[\exp\left(\frac{p}{T_d} \frac{R(t)}{R(t_d)}\right) \mp 1 \right]^{-1} + \frac{q-1}{2} \frac{\left(\frac{p}{T_d} \frac{R(t)}{R(t_d)}\right)^2 \exp\left(\frac{p}{T_d} \frac{R(t)}{R(t_d)}\right)}{\left[\exp\left(\frac{p}{T_d} \frac{R(t)}{R(t_d)}\right) \mp 1 \right]^2}. \quad (2.4.2)$$

Vemos que la función de distribución para tiempos posteriores a t_d tiene la misma forma funcional que f_q^{eq} pero con una "temperatura" dada por:

$$T(t) = T_d \frac{R(t_d)}{R(t)}; \quad (2.4.3)$$

a pesar de que esta especie ya no se encuentra en equilibrio termodinámico. La “temperatura” en esta función de distribución cae estrictamente como R^{-1} ; debido a esto, la función $S_q^r = s_q^r R^3$ se conserva separadamente. Es de notar que para las especies que se hallan todavía en equilibrio la temperatura decae más lentamente pues $T \propto (g_{*s}^q(T))^{-1/3} R^{-1}$.

La densidad numérica de estas partículas, ya sean bosones o fermiones, estará dada de acuerdo a (2.2.15) por:

$$n_q^{br} = \frac{g^{br}}{2\pi^2} [2\zeta(3) + 12\zeta(4)(q-1)] T_d^3 \left(\frac{R(t_d)}{R(t)} \right)^3 \quad (2.4.4)$$

$$n_q^{fr} = \frac{g^{fr}}{2\pi^2} \left[\frac{3}{2}\zeta(3) + \frac{21}{2}(q-1) \right] T_d^3 \left(\frac{R(t_d)}{R(t)} \right)^3. \quad (2.4.5)$$

Estas densidades numéricas serán comparables a la densidad numérica de fotones en cualquier tiempo dado. En particular, una especie que se desacopla en tales condiciones, seguirá existiendo hoy en nuestro Universo como una reliquia (del inglés relic background), con densidades similares a la de los fotones. Veremos más adelante el caso específico de los neutrinos.

El siguiente punto debe notarse; supongamos que una especie con masa m se desacopla a la temperatura T_d con $T_d \gg m$. En el momento que sucede el desacoplamiento, la mayor parte de estas partículas serán ultrarelativista y el promedio de sus momentos $p(t_d)$ y energías $E(t_d) = (p^2(t_d) + m^2)^{1/2} \simeq p(t_d)$ será del orden de T_d . Una buena aproximación de su función de distribución en $t = t_d$ esta dada por f_q^{eq} para partículas de masa nula. En un tiempo posterior ($t > t_d$), el momento medio de las partículas sufrirá un corrimiento hacia el rojo hasta tomar el valor $p(t) = p(t_d)(R(t_d)/R(t)) \simeq T_d(R(t_d)/R(t))$. Ahora bien, para $t \gg t_d$, la mayoría de las partículas tendrán momento $p(t)$ el cual será mucho menor que m . De este modo las partículas individuales se habrán vuelto no relativistas cuando el Universo se haya expandido lo suficiente, lo cual sucederá cuando la temperatura del Universo descienda por debajo de $T_{nr} \simeq m$; esto es cuando $R(t)/R(t_d) \gtrsim T_d/m$. La energía de cada una de estas partículas será ahora $E(t) = (p^2(t) + m^2)^{1/2} \simeq m$. Pero la función de distribución (y la densidad numérica) de estas partículas todavía estará dada por la forma (“congelada”) que corresponde a las partículas relativistas. Entonces, para $t \gg t_d$, la densidad numérica de estas partículas será similar a la de las especies relativistas, pero la densidad de energía será $\rho_q^d \simeq n_q m$.

Desacoplamiento no relativista

Consideremos ahora el otro caso extremo, es decir el caso en que la especie se desacopla cuando la mayor parte de las partículas que la constituyen son no relativistas. En esta situación se cumple la condición $T \ll m$. Ya hemos mostrado que:

$$f_q^d(\mathbf{p}, T) = f_q^{eq}(\mathbf{p}R(t)/R(t_d), T_d) \quad \text{para } t > t_d, \quad (2.4.6)$$

Escribir en forma explícita el miembro derecho de esta ecuación utilizando (2.2.35) nos lleva a:

$$f_q^d(\mathbf{p}, T) = e^{-(m-\mu_d)/T_d} \exp \left[\frac{-p^2}{2mT_d} \left(\frac{R(t)}{R(t_d)} \right)^2 \right] \left[1 + \frac{q-1}{2} \left[\frac{p^2}{2mT_d} \left(\frac{R(t)}{R(t_d)} \right)^2 + \frac{(m-\mu_d)}{T_d} \right]^2 \right], \quad (2.4.7)$$

A partir de esta expresión podemos hallar por integración sobre el impulso, la densidad numérica de partículas. El cálculo explícito conduce a

$$n_q = g \left(\frac{mT_d}{2\pi} \right)^{3/2} \left(\frac{R(t_d)}{R(t)} \right)^3 e^{-(m-\mu_d)/T_d} \left[1 + \frac{q-1}{2} \left(\frac{15}{4} + 3\frac{m-\mu_d}{T_d} + \left(\frac{m-\mu_d}{T_d} \right)^2 \right) \right]. \quad (2.4.8)$$

Ahora bien, para una especie de partículas que se ha desacoplado del resto, la densidad numérica debe ser $n_q \propto R^{-3}$. Al igual que ocurre en el caso standard (véase la sección 3.4 de la Ref.[17]), podemos ver que este hecho se cumple efectivamente en el caso no-extensivo si identificamos en la ecuación anterior a la temperatura con el factor $T_d R^2(t_d)/R^2(t)$ y exigimos que el potencial químico varíe de acuerdo a $\mu = m - (m - \mu_d)T/T_d$.

De esta manera la función de distribución que gobierna el comportamiento de la especie desacoplada tiene la misma forma que la distribución de equilibrio para partículas no relativistas pero con una “temperatura” dada por:

$$T(t) = T_d \left(\frac{R(t_d)}{R(t)} \right)^2, \quad (2.4.9)$$

que decrece con el cuadrado del factor de expansión. Como ya hemos señalado, en el límite $m \gg T$ la densidad de energía estará dada por: $\rho_q \simeq n_q m$.

Por último, cabe señalar que el modo correcto de estudiar la evolución de las funciones de distribución consiste en integrar la ecuación de Boltzmann. Trataremos este punto en la sección 2.7. Por el momento utilizaremos el criterio $\Gamma > H$ ($\Gamma < H$) para decir que una especie se encuentra acoplada (desacoplada) del plasma térmico en el Universo.

2.5. Temperatura del fondo cósmico de neutrinos

Puede verse que la tasa con la que interactúan los neutrinos se vuelve menor que la tasa de expansión (fijada por el valor de $H(t)$) cuando la temperatura cae por debajo de $T_d \simeq 1$ MeV. A temperaturas más bajas, los neutrinos se encuentran completamente desacoplados del resto de la materia.

Dado que consideramos que los neutrinos tienen masa nula o muy pequeña, claramente ellos son relativistas en el momento en que se desacoplan. Esta conclusión será válida siempre y cuando los neutrinos tengan una masa m_ν con $m_\nu \ll T_d \simeq 1$ MeV. Su función de distribución estará dada por (2.4.2) con $T_\nu \propto R^{-1}$.

En el tiempo en el que ocurrió el desacoplamiento, fotones, neutrinos y el resto de la materia tenían la misma temperatura. Mientras la temperatura de los fotones continúe decreciendo con R^{-1} , los neutrinos y los fotones seguirán teniendo la misma temperatura a pesar de que los neutrinos se hayan desacoplado. De todos modos, la temperatura de los fotones decrecerá más lentamente si el factor g_\star^q está cambiando. En ese caso, T_γ tomará valores por encima de T_ν a medida que el Universo se enfríe. Tal cambio en el valor de g_\star^q tiene lugar cuando la temperatura del Universo cae por debajo de $T \simeq m_e$, donde m_e es la masa en reposo del electrón ($m_e \simeq 0,5$ MeV) y corresponde a una temperatura de 5×10^9 K. Cuando la temperatura del Universo es más baja que este valor, la energía media de los fotones es menor que la energía necesaria para crear pares e^+e^- , y el equilibrio provisto por la reacción $e^+ + e^- \leftrightarrow \gamma + \gamma$ se pierde, ya que sólo la aniquilación es posible.

Este proceso claramente cambia el valor de g_\star^q . Para temperaturas tales que $T_d \gtrsim T \gtrsim m_e$ los neutrinos ya se han desacoplado y su entropía se conserva en forma separada; pero los fotones ($g^\gamma = 2$) se encuentran en equilibrio con los electrones ($g^{e^-} = 2$) y los positrones ($g^{e^+} = 2$). La conservación de $S_q = (2\pi^2/45)g_{\star s}^q T^3 R^3$, aplicada a las partículas que se encuentran en equilibrio con la radiación muestra que la cantidad $g_{\star s}^q T_\gamma^3 R^3$ permanece constante durante la expansión. Ahora bien, dado que $g_{\star s}^q$ decrece durante la aniquilación e^+e^- , el valor de $T_\gamma^3 R^3$ después de la aniquilación e^+e^- será mayor que su valor antes de que esta ocurra. Veamos esto en forma explícita a través de las ecuaciones.

Si suponemos que el desacoplamiento tiene lugar en un determinado instante t_d , la conservación de S_q asegura que:

$$(g_{\star s}^q T_\gamma^3 R^3)_{t < t_d} = (g_{\star s}^q T_\gamma^3 R^3)_{t > t_d}, \quad (2.5.1)$$

o bien

$$\frac{(T_\gamma)_{t>t_d}^3}{(T_\gamma)_{t<t_d}^3} = \frac{(g_{\star s}^q)_{t<t_d}}{(g_{\star s}^q)_{t>t_d}} \quad (2.5.2)$$

Podemos calcular el miembro derecho de esta ecuación a partir de la definición de $g_{\star s}^q$ dada por las (2.3.6), (2.3.7) y (2.3.8). Teniendo en cuenta que antes que ocurra la aniquilación e^+e^- , $T_\gamma = T_{e^+} = T_{e^-}$, tenemos para $(g_{\star s}^q)_{t<t_d}$;

$$(g_{\star s}^q)_{t<t_d} = 2 + \frac{7}{8}(2+2) + \frac{60}{2\pi^2} \frac{45}{\pi^2} \frac{\zeta(5)}{2}(q-1) \left[2 + \frac{15}{16}(2+2) \right] \quad (2.5.3)$$

$$(g_{\star s}^q)_{t<t_d} = \frac{11}{2} + 41,319(q-1), \quad (2.5.4)$$

mientras que para $(g_{\star s}^q)_{t>t_d}$ tenemos

$$(g_{\star s}^q)_{t>t_d} = 2 + \frac{60}{2\pi^2} \frac{45}{\pi^2} \frac{\zeta(5)}{2}(q-1)2 \quad (2.5.5)$$

$$(g_{\star s}^q)_{t>t_d} = 2 + 14,372(q-1). \quad (2.5.6)$$

Podemos evaluar ahora el cociente $(T_\gamma)_{t>t_d}^3 / (T_\gamma)_{t<t_d}^3$. A orden $(q-1)$ obtenemos:

$$\frac{(T_\gamma)_{t>t_d}^3}{(T_\gamma)_{t<t_d}^3} = \frac{11}{4} + 0,898(q-1). \quad (2.5.7)$$

A este mismo orden, el cociente de temperaturas es

$$\frac{(T_\gamma)_{t>t_d}}{(T_\gamma)_{t<t_d}} = \left(\frac{11}{4} \right)^{1/3} [1 + 0,109(q-1)]. \quad (2.5.8)$$

Debido a que en el momento en que tiene lugar la aniquilación e^+e^- los neutrinos están desacoplados de la materia, ellos no participan en este proceso. Los neutrinos están caracterizados por una temperatura $T_\nu(t)$ que decae estrictamente como R^{-1} y la cantidad $s_q^\nu R^3$ se conserva separadamente.

Originalmente, la temperatura de los neutrinos antes de que comenzara la aniquilación e^+e^- ; coincidía con la de los fotones, es decir $(T_\nu)_{t<t_d} = (T_\gamma)_{t<t_d}$. Debido a esto:

$$(T_\gamma)_{t>t_d} = \left(\frac{11}{4} \right)^{1/3} [1 + 0,109(q-1)] (T_\gamma)_{t<t_d} \quad (2.5.9)$$

$$(T_\gamma)_{t>t_d} = \left(\frac{11}{4} \right)^{1/3} [1 + 0,109(q-1)] (T_\nu)_{t<t_d}. \quad (2.5.10)$$

Además $T_\nu = cte.$ durante el proceso de aniquilación e^+e^-

$$(T_\gamma)_{t>t_d} = \left(\frac{11}{4} \right)^{1/3} [1 + 0,109(q-1)] (T_\nu)_{t>t_d}. \quad (2.5.11)$$

Una vez que la aniquilación e^+e^- ha concluido, el factor $g_{\star s}^q$ no cambia. Tanto la temperatura de los neutrinos T_ν como la de los fotones T_γ , caen con R^{-1} y la razón T_ν/T_γ mantiene su valor constante hasta el presente.

A partir de (2.5.11), es inmediato obtener el cociente T_ν/T_γ . A orden $(q-1)$ obtenemos:

$$\left(\frac{T_\nu}{T_\gamma}\right)_{hoy} = \left(\frac{4}{11}\right)^{1/3} [1 - 0,109(q-1)]. \quad (2.5.12)$$

Teniendo en cuenta que en el presente $T_\gamma \simeq 2,728$ K, finalmente obtenemos:

$$T_{\nu,hoy} = 1,947 [1 - 0,109(q-1)] \text{ K}. \quad (2.5.13)$$

La diferencia entre T_ν y T_γ puede acotarse utilizando la radiación del fondo de microondas, de donde es posible obtener una cota sobre $(q-1)$, véase el trabajo citado en la Ref.[20].

2.6. Recombinación

Una de las épocas críticas en la evolución del Universo tiene lugar cuando $T \simeq 1000$ K. A esta temperatura es favorable termodinámicamente que las partículas que conforman el plasma se combinen para formar átomos neutros. Este proceso se conoce con el nombre de recombinación, un nombre poco apropiado debido a que el plasma había estado ionizado hasta este momento.

Usualmente, se utiliza la temperatura para la cual el 90% de los electrones se ha combinado para definir el momento en que ocurre la recombinación. La abundancia de equilibrio de los electrones libres esta determinada por la ley de Saha.

Nos concentramos ahora en la generalización de la ley de Saha. Sean n^H, n^p y n^e la densidad numérica de átomos de hidrógeno, protones libres y electrones libres respectivamente. Por simplicidad ignoraremos la presencia de los núcleos de ^4He (1 por cada 10 protones) y supondremos que todos los bariones en el Universo se encuentran en la forma de protones. La neutralidad del Universo implica que $n^e = n^p$, y la conservación del número de bariones implica que $n^B = n^H + n^p$. Ya hemos visto que en el equilibrio térmico, a temperaturas tales que $T \lesssim m_i, n_q^i$ esta dado por (2.2.36), es decir que para n^H, n^p y n^e tenemos

$$n_q^H = g^H \left(\frac{m_H T}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-(m_H - \mu_H)/T} \left[1 + \frac{q-1}{2} \left(\frac{15}{4} + 3\frac{m_H - \mu_H}{T} + \left(\frac{m_H - \mu_H}{T}\right)^2\right)\right], \quad (2.6.1)$$

$$n_q^p = g^p \left(\frac{m_p T}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-(m_p - \mu_p)/T} \left[1 + \frac{q-1}{2} \left(\frac{15}{4} + 3\frac{m_p - \mu_p}{T} + \left(\frac{m_p - \mu_p}{T}\right)^2\right)\right], \quad (2.6.2)$$

$$n_q^e = g^e \left(\frac{m_e T}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-(m_e - \mu_e)/T} \left[1 + \frac{q-1}{2} \left(\frac{15}{4} + 3\frac{m_e - \mu_e}{T} + \left(\frac{m_e - \mu_e}{T}\right)^2\right)\right]. \quad (2.6.3)$$

Como primer paso deseamos obtener una expresión para el cociente $n_q^H/n_q^e n_q^p$. En el equilibrio químico, el proceso $p + e \rightarrow H + \gamma$ garantiza que $\mu_p + \mu_e = \mu_H$. Si tomamos $m_H \simeq m_p$ en el factor $(m_H T/2\pi)^{3/2}$, un cálculo algebraico nos conduce a

$$\frac{n_q^H}{n_q^e n_q^p} = \frac{g_H}{g_e g_p} \left(\frac{m_e T}{2\pi}\right)^{-3/2} \exp\left[\frac{m_p + m_e - m_H}{T}\right] \left[\frac{\bar{u}((m_H - \mu_H)/T)}{\bar{u}((m_p - \mu_p)/T)\bar{u}((m_e - \mu_e)/T)}\right]. \quad (2.6.4)$$

Donde hemos definido

$$\bar{u}((m_i - \mu_i)/T) \equiv 1 + \frac{q-1}{2} \left(\frac{15}{4} + 3\frac{m - \mu}{T} + \left(\frac{m - \mu}{T}\right)^2\right). \quad (2.6.5)$$

Queremos introducir en la expresión (2.6.4), el número de bariones n_q^B . Debido a que las interacciones que no conservan el número de partículas bariónicas (si es que estas existen en la naturaleza) ocurren muy lentamente; el número de bariones en un volumen comovil $N_q^B = n_q^B/s_q$ se conserva. A pesar de esto, $\eta_q = n_q^B/n_q^\gamma$, es decir la razón entre bariones y fotones, no permanece constante debido a que g_{*s}^q cambia con el tiempo. Usando que $g_p = g_e = 2$ y $g_H = 4$, podemos escribir

$$\frac{n_q^H}{n_q^B} = \frac{n_q^p}{n_q^B} \frac{n_q^e}{n_q^B} n_q^\gamma \eta \left(\frac{m_e T}{2\pi} \right)^{-3/2} \exp \left[\frac{m_p + m_e - m_H}{T} \right] \left[\frac{\bar{u}((m_H - \mu_H)/T)}{\bar{u}((m_p - \mu_p)/T) \bar{u}((m_e - \mu_e)/T)} \right]. \quad (2.6.6)$$

Definiendo ahora $X_q^e = n_q^p/n_q^B$ (con lo cual $1 - X_q^e = n_q^H/n_q^B$), podemos escribir la ecuación anterior como:

$$\frac{1 - X_q^e}{(X_q^e)^2} = n_{st}^\gamma \left[1 + \frac{n_c^\gamma}{n_{st}^\gamma} \right] \eta_q \left(\frac{m_e T}{2\pi} \right)^{-3/2} e^{B/T} \left[\frac{\bar{u}_H}{\bar{u}_p \bar{u}_e} \right], \quad (2.6.7)$$

donde $B = m_p + m_e - m_H$ y hemos usado que n_q^γ puede escribirse como $n_q^\gamma = n_{st}^\gamma + n_c^\gamma$. Destacamos que en el último factor hemos simplificado la notación pero mantenemos las definiciones que dimos en (2.6.5).

El estudio detallado del proceso de recombinación regido por (2.6.7) será el objetivo de un trabajo futuro.

2.7. Reliquias del Big Bang

Los neutrinos masivos son el ejemplo más simple de una reliquia remanente del Big Bang. Son partículas que alguna vez estuvieron en equilibrio térmico con las demás especies pero que se han desacoplado y entonces preservan una “imagen” de las propiedades del Universo en la era inmediatamente anterior al desacoplamiento.

Hasta ahora hemos usado un argumento simple que establecía que el congelamiento (del inglés freeze out) ocurre cuando la tasa de expansión, dada por $H(t)$ y la tasa de las reacciones que mantienen en equilibrio a una dada especie con las demás, dada por Γ , son aproximadamente iguales, esto es $\Gamma/H \simeq 1$ (ver sección 2.4). Para dar un poco más de detalles a cerca del congelamiento es necesario trabajar con la ecuación diferencial que gobierna la abundancia de las distintas especies en un Universo en expansión, es decir, con la ecuación de Boltzmann.

2.7.1. Ecuación de Boltzmann

Para tratar en forma apropiada el desacoplamiento de una especie debemos conocer la evolución microscópica de la función de distribución $f(p^\mu, x^\mu)$ la cual, como ya hemos mencionado, se encuentra gobernada por la ecuación de Boltzmann. Esta puede ser escrita como (véase la sección 5.1 de la Ref.[17]),

$$\hat{L}[f] = C[f], \quad (2.7.1)$$

donde C es el operador de colisiones y \hat{L} es el operador de Liouville. La expresión del operador de Liouville no relativista para la densidad del espacio de fases $f(\vec{v}, \vec{x})$ de una especie de partículas con masa m bajo la acción de una fuerza $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ es,

$$\hat{L} = \frac{d}{dt} + \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}} + \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{v}}, \quad (2.7.2)$$

o bien,

$$\hat{L} = \frac{d}{dt} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}} + \frac{\vec{F}}{m} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{v}}. \quad (2.7.3)$$

La generalización relativista covariante del operador \hat{L} es,

$$\hat{L} = p^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha p^\beta p^\gamma \frac{\partial}{\partial p^\alpha}. \quad (2.7.4)$$

Es de notar que la fuerza gravitatoria se encuentra presente en esta ecuación a través de la conexión afín $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$. Para el modelo de Universo de Friedmann-Robertson-Walker la densidad del espacio de fases es espacialmente homogénea e isotrópica: $f = f(|\vec{p}|, t)$ (o, equivalentemente $f = f(E, t)$). Dadas las características de la métrica de FRW (denotada por $g_{\mu\nu}$) es posible mostrar que las únicas componentes no nulas de la conexión afín $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ son (véase la sección 2.1 de la Ref.[17]):

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} h^{il} \left(\frac{\partial h_{lj}}{\partial x^k} + \frac{\partial h_{lk}}{\partial x^j} + \frac{\partial h_{jk}}{\partial x^l} \right), \quad (2.7.5)$$

$$\Gamma_{ij}^0 = \frac{\dot{R}}{R} h^{ij}, \quad (2.7.6)$$

$$\Gamma_{0j}^i = \frac{\dot{R}}{R} \delta^i_j, \quad (2.7.7)$$

con $h^{ij} = -g^{ij}$ y los índices latinos corriendo de 1 a 3.

Con estas consideraciones y recordando que $p^\mu = (E, \vec{p})$ y $x^\mu = (t, \vec{x})$ la expresión (2.7.4) para el operador de Liouville deviene,

$$\hat{L}[f(E, t)] = E \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\dot{R}}{R} |\vec{p}|^2 \frac{\partial f}{\partial E}. \quad (2.7.8)$$

Si se sustituye esta expresión para $\hat{L}[f]$ en (2.7.1) y se tiene en cuenta la definición de la densidad numérica en términos de la función de distribución (2.2.4), puede integrarse por partes el miembro izquierdo de la igualdad, esto otorga

$$\dot{n} + 3Hn = \frac{g}{2\pi} \int C[f] \frac{d^3 p}{E}. \quad (2.7.9)$$

Podemos reescribir el término de colisiones definiendo

$$\dot{f} = \frac{g}{2\pi^2} \frac{C[f]}{E}, \quad (2.7.10)$$

con esto la ecuación de Boltzmann toma la forma simple

$$\dot{n} + 3Hn = \int \dot{f} d^3 p. \quad (2.7.11)$$

El término de colisiones se encuentra usualmente dominado por las aniquilaciones entre partículas y antipartículas ($p\bar{p}$). Asumiremos por ahora que el número de p es idéntico al número de \bar{p} de modo que no hay una asimetría significativa, de esta manera \dot{f}_c esta dado por (véase la sección 9.2 de la Ref.[21]):

$$\dot{f}_c = - \int \langle \sigma v \rangle f \bar{f} d^3 \bar{p}, \quad (2.7.12)$$

donde $\langle \sigma v \rangle$ es el producto de la sección eficaz diferencial y la velocidad, promediado sobre las velocidades. Podemos sacar $\langle \sigma v \rangle$ fuera de la integral pues, aún cuando no sea constante, puede ser evaluado en una energía promedio apropiada. Pretendemos escribir a la ecuación de Boltzmann de

modo de dejar expuestos cuales son los factores que gobiernan los cambios en el número de partículas (por volumen comovil) de una dada especie. Nos concentraremos ahora en una especie determinada, digamos las partículas ψ y sus antipartículas $\bar{\psi}$. Teniendo en cuenta (2.7.12) podemos llevar a cabo la integral sobre momentos en el miembro derecho de (2.7.11), esto otorga,

$$\dot{n}_q^\psi + 3Hn_q^\psi = - \langle \sigma v \rangle (n_q^\psi)^2. \quad (2.7.13)$$

Ahora bien, debemos tener en cuenta la producción de partículas debida a procesos térmicos (es decir, creación efectiva de pares). Si llamamos Υ al término que da cuenta de esta contribución, podemos escribir la ecuación de Boltzmann como sigue:

$$\dot{n}_q^\psi + 3Hn_q^\psi = - \langle \sigma v \rangle (n_q^\psi)^2 + \Upsilon. \quad (2.7.14)$$

Este término puede ser calculado con un argumento invocando la situación de equilibrio termodinámico. Para un Universo que no se expande ($\dot{R} = H = 0$), n_q^ψ será constante y tomará el valor de equilibrio para esa temperatura $n_{q,eq}^\psi$; de este modo debe ser:

$$\dot{n}_q^\psi + 3Hn_q^\psi = - \langle \sigma v \rangle \left((n_q^\psi)^2 - (n_{q,eq}^\psi)^2 \right). \quad (2.7.15)$$

En la sección 2.3 habíamos definido el número conservado $N_q = n_q/s_q$, con n_q el valor de equilibrio de la densidad numérica de partículas. Reescribimos esta definición como: $Y_{q,eq} \equiv n_{q,eq}^\psi/s_q$. Resulta ahora conveniente introducir la variable $Y_q \equiv n_q^\psi/s_q$.

De esta manera, podemos escribir la ecuación anterior como,

$$\dot{n}_q^\psi + 3Hn_q^\psi = - \langle \sigma v \rangle s_q^2 (Y_q^2 - Y_{q,eq}^2). \quad (2.7.16)$$

Veamos ahora que podemos escribir $\dot{n}_q^\psi + 3Hn_q^\psi$ en términos de Y_q . Para esto tendremos en cuenta que $s_q R^3 = cte.$ En efecto, derivando respecto del tiempo tanto la expresión de la definición de Y_q como la ecuación $s_q R^3 = cte.$ y recordando que $H = \dot{R}/R$, puede escribirse:

$$\dot{n}_q^\psi + 3Hn_q^\psi = s_q \dot{Y}_q. \quad (2.7.17)$$

Combinando estas dos últimas expresiones para $\dot{n}_q^\psi + 3Hn_q^\psi$, obtenemos:

$$\frac{dY_q}{dt} = - \langle \sigma v \rangle s_q (Y_q^2 - Y_{q,eq}^2). \quad (2.7.18)$$

Dado que el término de interacción usualmente depende explícitamente de la temperatura, es conveniente introducir como variable independiente $x = m/T$, donde m es cualquier escala de masa apropiada (a menudo es tomada como la masa de las partículas de interés). Pretendemos escribir la ecuación de Boltzmann en términos de la variable x . Para ello recordemos que durante la época dominada por radiación x y T , estaban relacionados por (2.2.70), de este modo vemos que

$$\frac{dt}{dx} = 2(0,301)(g_*^q)^{-1/2} \frac{m_{pl}}{m^2} x. \quad (2.7.19)$$

Por la regla de la cadena, podemos escribir:

$$\dot{Y}_q = \frac{dY_q}{dt} = \frac{dx}{dt} \frac{dY_q}{dx}. \quad (2.7.20)$$

Utilizando la inversa del jacobiano dt/dx , podemos escribir para \dot{Y}_q

$$\dot{Y}_q = \frac{H(m)}{x} \frac{dY_q}{dx}, \quad (2.7.21)$$

donde hemos definido:

$$H(m) \equiv 1,66(g_*^q)^{1/2} \frac{m^2}{m_{pl}}. \quad (2.7.22)$$

Notemos que $H(m)$ no es independiente de la relación que vincula H con la temperatura (ver (2.2.69)), sino que ambos están relacionados mediante

$$H = x^{-2} H(m). \quad (2.7.23)$$

Finalmente, a partir de (2.7.18) y (2.7.21) podemos escribir la ecuación de Boltzmann como sigue:

$$\frac{dY_q}{dx} = -\frac{x \langle \sigma v \rangle s_q}{H(m)} (Y_q^2 - Y_{q,eq}^2), \quad (2.7.24)$$

donde $\langle \sigma v \rangle$ está dado por

$$\langle \sigma v \rangle = -\frac{1}{(n_q^\psi)^2} \int \dot{f}_c d^3p. \quad (2.7.25)$$

Si consideramos otros canales de aniquilación para $\psi\bar{\psi}$, digamos $\psi\bar{\psi}$ en algún estado final F (no necesariamente un estado final de dos cuerpos) habrá un término adicional en la ecuación para \dot{n}_q^ψ que será similar al que se encuentra en el miembro derecho pero con $\langle \sigma_{\psi\bar{\psi} \rightarrow x\bar{x}} v \rangle$ reemplazado por $\langle \sigma_{\psi\bar{\psi} \rightarrow F} v \rangle$. La suma sobre todos los canales de aniquilación lleva al resultado final en términos de la sección eficaz de aniquilación total $\langle \sigma_{Av} \rangle$,

$$\frac{dY_q}{dx} = -\frac{x \langle \sigma_{Av} \rangle s_q}{H(m)} (Y_q^2 - Y_{q,eq}^2). \quad (2.7.26)$$

Definiendo $\Gamma_A = n_{q,eq}^\psi \langle \sigma_{Av} \rangle$ y recordando que $H = x^{-2} H(m)$ obtenemos la forma que deseábamos para la ecuación de Boltzmann,

$$\frac{x}{Y_{q,eq}} \frac{dY_q}{dx} = -\frac{\Gamma_A}{H(x)} \left[\left(\frac{Y_q}{Y_{eq}} \right)^2 - 1 \right]. \quad (2.7.27)$$

Es de notar que la derivación que hemos hecho es independiente de la forma particular de la función de distribución. Esta ecuación tiene la misma forma funcional que la ecuación (5,26) derivada en la sección (5,2) del libro de Kolb & Turner [17], en donde son consideradas explícitamente distribuciones de Maxwell-Boltzmann.

2.7.2. Congelamiento de abundancias

Mediante la forma final para la ecuación de Boltzmann dada por (2.7.27), vemos que el cambio en el número de partículas ψ por volumen comovil esta controlado básicamente por dos factores. Uno de ellos mide la efectividad de las aniquilaciones, es decir, el término usual Γ/H . El segundo es un factor que da una medida de la desviación en los valores reales de las funciones de distribución respecto de sus valores en el equilibrio. Es claro que cuando Γ/H es menor que la unidad, el cambio relativo en el número de ψ 's en un volumen comovil se vuelve pequeño, $-\Delta Y_q/Y_q \sim -(x dY/dx)/Y_{q,eq} \sim \Gamma/H < 1$, las aniquilaciones se detienen, y el número de ψ 's en un volumen comovil se "congela".

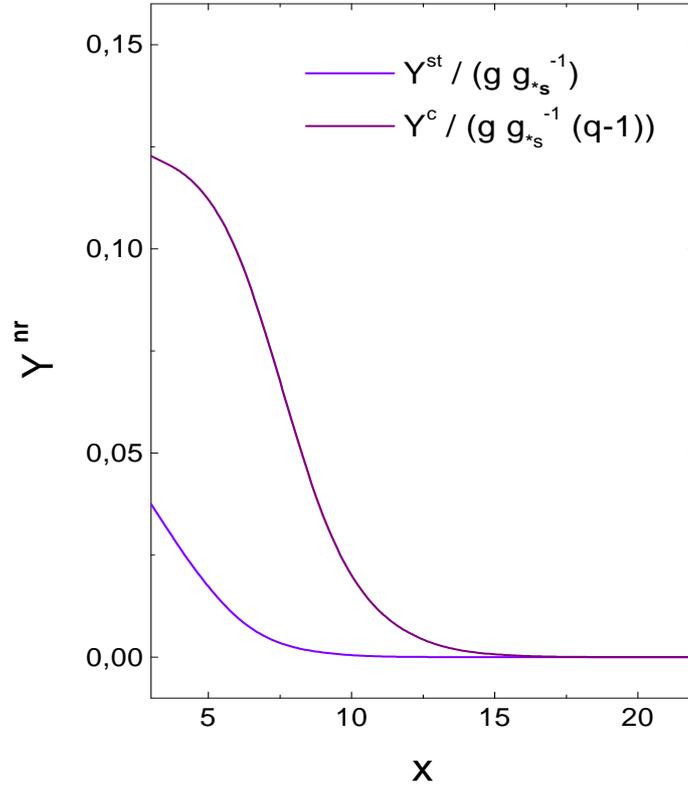


Figura 2.2: Abundancia de equilibrio standard y corrección no extensiva para partículas no relativistas.

Analicemos esto con un poco más de detalle. La tasa de aniquilaciones Γ_A varía como $n_{q,eq}$ veces la sección eficaz de aniquilación promediada térmicamente $\langle \sigma_A v \rangle$. En el régimen relativista, $n_{q,eq} \propto T^3$, y como otras tasas Γ_A variará con alguna potencia de T . En el régimen no relativista, $n_{q,eq} \propto e^{-m/T}$, de modo que Γ_A decrece exponencialmente. Por lo tanto en ambos regímenes Γ_A decrece cuando la temperatura decrece y eventualmente cae por debajo del valor necesario para mantener el equilibrio, esto sucede aproximadamente cuando $\Gamma_A \simeq H$, que por definición ocurre cuando $x = x_f$ (“freeze out”). De esta manera esperamos que para $x < x_f$, $Y_q(x) \simeq Y_{q,eq}(x)$, mientras que para $x > x_f$ la abundancia de partículas ψ por volumen comovil se “congela” ($Y_q(x > x_f) = Y_{q,eq}(x_f)$).

En el régimen relativista ($x \ll 3$) y en el no relativista ($x \gg 3$), los valores de equilibrio para el número de partículas ψ por volumen comovil adoptan una forma bastante simple. Podemos calcular el valor de $Y_{q,eq} \equiv n_{q,eq}^\psi / s_q$ en cada uno de los casos mencionados recordando la definición de s_q y las ecuaciones (2.2.17) y (2.2.18) en el caso relativista (para bosones y fermiones respectivamente) y (2.2.36) en el caso no relativista. Obtenemos los siguientes resultados:

$$Y_{q,eq}^b = 0,278 g^b (g_{*s}^q)^{-1} \left[1 + 6 \frac{\zeta(4)}{\zeta(3)} (q-1) \right] \quad (2.7.28)$$

para bosones relativistas,

$$Y_{q,eq}^f = 0,278 \frac{3}{4} g^f (g_{*s}^q)^{-1} \left[1 + 8 \frac{\zeta(4)}{\zeta(3)} (q-1) \right] \quad (2.7.29)$$

para fermiones relativistas, y

$$Y_{q,eq}^{nr} = 0,145 g x^{3/2} e^{-x} (g_{*s}^q)^{-1} \left[1 + \frac{q-1}{2} \left(\frac{15}{4} + 3x + x^2 \right) \right] \quad (2.7.30)$$

con $x \gg 3$, para partículas no relativistas.

Considerando que podemos escribir a $g_{\star s}^q$ como $g_{\star s}^q = g_{\star s}^{st} + (q-1)\hat{g}_{\star s}^c$, obtenemos a primer orden en $(q-1)$ para las cantidades arriba mencionadas,

$$Y_{q,eq}^b = 0,278g^b(g_{\star s}^{st})^{-1} \left[1 + (q-1) \left(6\frac{\zeta(4)}{\zeta(3)} - \frac{\hat{g}_{\star s}^c}{g_{\star s}^{st}} \right) \right], \quad (2.7.31)$$

$$Y_{q,eq}^f = 0,278\frac{3}{4}g^f(g_{\star s}^{st})^{-1} \left[1 + (q-1) \left(8\frac{\zeta(4)}{\zeta(3)} - \frac{\hat{g}_{\star s}^c}{g_{\star s}^{st}} \right) \right], \quad (2.7.32)$$

y

$$Y_{q,eq}^{nr} = 0,145gx^{3/2}e^{-x}(g_{\star s}^{st})^{-1} \left[1 + \frac{q-1}{2} \left(\frac{15}{4} + 3x + x^2 - 2\frac{\hat{g}_{\star s}^c}{g_{\star s}^{st}} \right) \right] \quad (2.7.33)$$

con $x \gg 3$.

En la Fig.(2.2) se muestra la abundancia de equilibrio para partículas no relativistas proveniente de la teoría standard y la correspondiente corrección no extensiva. Finalmente notemos que en este caso el término correctivo disminuye exponencialmente a medida que la temperatura decrece.

2.8. Presente de un Universo no-extensivo

En esta sección estudiaremos cómo se corrigen debido a lo no-extensividad los valores actuales de las funciones termodinámicas que caracterizan el estado del Universo. En particular estamos interesados en los valores de ρ_q^R , s_q y n_q^γ . Otra cantidad que resulta de gran interés es la razón entre la densidad de energía y la densidad de energía crítica definida por

$$\Omega_q = \frac{\rho_q}{\rho_c} \quad \text{con} \quad \rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}, \quad (2.8.1)$$

donde $G = m_{pl}^{-2}$ con $m_{pl} = 1,2211 \times 10^{19}$ GeV y h es tal que el valor de $H(t)$ hoy es $H_0 = 2,1332h10^{-42}$ GeV ($0,4 < h < 1$). De esta manera, a partir del valor de ρ_q^R hoy, podemos hallar la fracción con la que contribuyen las especies relativistas a la densidad de energía crítica en la actualidad, esto es

$$\Omega_{q,R}h^2 = \frac{8\pi G}{3H_0^2}h^2\rho_q^R. \quad (2.8.2)$$

Para hallar ρ_q^R (2.2.67) y s_q (2.3.5) debemos conocer el valor que toman g_\star^q y $g_{\star s}^q$ hoy.

2.8.1. g_\star^q y $g_{\star s}^q$ hoy

Recordemos que g_\star^q estaba definido por las ecuaciones (2.2.64), (2.2.65) y (2.2.66), mientras que $g_{\star s}^q$ estaba dado por (2.3.6), (2.3.7) y (2.3.8). Asumiendo que hoy existen solamente dos especies relativistas, los fotones y los neutrinos (tres tipos: ν_e , ν_μ y ν_τ) y recordando que la temperatura de los neutrinos se encuentra relacionada con la de los fotones por la ecuación (2.5.12) el cálculo a primer orden en $(q-1)$ otorga,

$$(g_\star^q)_{hoy} = 3,36 [1 + 9,43(q-1)] \quad (2.8.3)$$

$$(g_{\star s}^q)_{hoy} = 3,91 [1 + 7,11(q-1)]. \quad (2.8.4)$$

2.8.2. Estado actual

A partir de los valores de g_*^q y g_{*s}^q hoy y teniendo en cuenta que la temperatura actual del Fondo C3smico de Radiaci3n medida por el sat3lite COBE es $T = 2,728 \pm 0,004$ K, podemos obtener los valores actuales de: ρ_q^R , s_q , n_q^γ y $\Omega_{q,R}$. Los resultados que se obtienen en el sistema de unidades CGS (ver Ap3ndice I), son:

$$(\rho_q^R)_{hoy} = 7,83 \times 10^{-34} [1 + 9,43(q - 1)] \text{ g cm}^{-3}, \quad (2.8.5)$$

$$(s_q)_{hoy} = 2899,41 [1 + 7,11(q - 1)] \text{ cm}^{-3}, \quad (2.8.6)$$

$$(n_q^\gamma)_{hoy} = 411,77 [1 + 5,4(q - 1)] \text{ cm}^{-3}, \quad (2.8.7)$$

$$(\Omega_{q,R})_{hoy} = 4,17 \times 10^{-5} [1 + 9,43(q - 1)] h^{-2}, \quad (2.8.8)$$

donde cada uno de los primeros t3rminos en las ecuaciones anteriores dan cuenta de los correspondientes valores standard.

2.9. Fondo c3smico de part3culas d3bilmente interactuantes

En la discusi3n de la secci3n 2.5 supusimos que los neutrinos ten3an masa nula. Si estas part3culas poseen masa no nula, entonces las consecuencias f3sicas ser3n bastante diferentes. Estas consecuencias pueden ser predichas en forma bastante general para cualquier especie de part3culas masivas que interact3en d3bilmente, ya sean neutrinos u otra especie. A estas part3culas se las denomina wimp's (del ingl3s weakly interacting massive particles). Consideremos primero el caso de una especie wimp que se desacopla siendo a3n relativista.

2.9.1. Reliquias Relativistas

Consideremos el caso de una especie fermionica para la cual $x_f \lesssim 3$. En este caso el congelamiento ocurre cuando la especie todav3a es relativista y $Y_{q,eq}$ no esta cambiando con el tiempo (ver ecuaciones (2.7.28) y (2.7.29)). Dado que $Y_{q,eq}$ es constante, el valor final de Y_q es muy poco sensible a los detalles del congelamiento (i.e. al valor preciso de x_f), y el valor asint3tico de Y_q , ($Y_q(x \rightarrow \infty) \equiv Y_{q,\infty}$), es justamente el valor de equilibrio en el instante de congelamiento:

$$Y_{q,\infty} = Y_{q,eq}^f(x_f) = 0,278 \frac{3}{4} g^f \left[1 + 8 \frac{\zeta(4)}{\zeta(3)} (q - 1) \right] (g_{*s}^q(x_f))^{-1} \quad \text{con} \quad x_f \lesssim 3. \quad (2.9.1)$$

Vemos entonces que para esta especie, el congelamiento tiene lugar con abundancia relativa de part3culas ψ de orden unidad con respecto a s_q (o a la densidad n3merica de fotones). La abundancia de part3culas ψ 's hoy es

$$n_{q,hoy}^\psi = s_{q,hoy} Y_{q,\infty} \quad (2.9.2)$$

$$n_{q,hoy}^\psi = \frac{3}{4} g^f 806,04 [1 + 14,31(q - 1)] (g_{*s}^q)^{-1}. \quad (2.9.3)$$

Una especie que se desacopla siendo a3n relativista es llamada usualmente una reliquia relativista (del ingl3s hot relic). Estas part3culas se habr3n vuelto no relativistas a alguna temperatura $T_{nr} \simeq m$ en el pasado siempre que $m > T_0$; i.e. $m \gtrsim 2,35 \times 10^{-4}$ eV (si este no fuera el caso, ser3an relativistas todav3a hoy y se comportar3an de igual modo que los neutrinos sin masa discutidos en la secci3n 2.5). La densidad de masa con la que contribuye una reliquia relativista en la actualidad es simple de calcular, pues viene dada por:

$$\rho_{q,hoy}^\psi = n_{q,hoy}^\psi m_\psi. \quad (2.9.4)$$

Con esto podemos hallar la fracción con la que contribuye la especie ψ a la densidad de masa crítica hoy.

$$\Omega_{q,hoy}^\psi h^2 = \frac{8\pi G}{3H_0} h^2 \rho_{q,hoy}^\psi \quad (2.9.5)$$

El cálculo explícito nos conduce a:

$$\Omega_{q,hoy}^\psi h^2 = \frac{3}{4} g^f 7,65 \times 10^{-2} [1 + 14,31(q-1)] (g_{*s}^q)^{-1} \left(\frac{m_\psi}{eV} \right) \quad (2.9.6)$$

Basándonos en la edad del Universo sabemos que $\Omega_0 h^2 \lesssim 1$; aplicando esta cota a la contribución de la especie ψ a $\Omega_0 h^2$ obtenemos una cota cosmológica a la masa de las partículas ψ ,

$$m_\psi \lesssim 13,08 \frac{4}{3} [1 - 14,31(q-1)] g_{*s}^q (g^f)^{-1}. \quad (2.9.7)$$

Los neutrinos livianos (con $m_\nu \lesssim \text{MeV}$) se desacoplan cuando la temperatura T es del orden de unos pocos MeV. A esta temperatura, las especies relativistas en equilibrio con los fotones son los electrones e^- , los positrones e^+ y tres pares de neutrinos ν_e, ν_μ y ν_τ (con sus respectivas antipartículas asociadas $\bar{\nu}_e, \bar{\nu}_\mu$ y $\bar{\nu}_\tau$). De modo que

$$g_{*s}^q(x_f) = 2 + \frac{7}{8} [2 + 2 + 2 \times 3] + \frac{60}{2\pi^2} \frac{45}{\pi^2} \frac{\zeta(5)}{2} (q-1) \left[2 + \frac{15}{16} (2 + 2 \times 3) \right]. \quad (2.9.8)$$

$$g_{*s}^q(x_f) = 10,75 [1 + 7,60(q-1)] \quad (2.9.9)$$

Para una especie de neutrinos de dos componentes, $g^f = g^\nu = 2$ y a primer orden en $(q-1)$, resulta

$$m_\nu \lesssim 93,72 [1 - 6,7(q-1)] eV. \quad (2.9.10)$$

Esta última ecuación constituye una generalización no extensiva de la cota sobre la masa de neutrinos livianos estables impuesta por Cowsik y Mc Clelland (véase la sección 5.2 del libro de Kolb & Turner). Si bien resulta difícil pensar en medidas suficientemente precisas como para obtener cotas sobre el valor del parámetro $(q-1)$ a partir de la ecuación (2.9.10), es importante notar que el hecho de considerar un cambio en la estadística puede tener influencia sobre el espectro de masas de las partículas que podrían existir en el Universo.

2.9.2. Reliquias no-relativistas

Consideremos ahora el caso en el cual el desacoplamiento ocurre cuando la especie es no relativista ($x_f \gtrsim 3$). El valor de $Y_q = n_q/s_q$ esta dado en este caso por (2.7.30)

$$Y_{q,eq}^{nr}(x_f) = 0,145 g x_f^{3/2} e^{-x_f} \left[1 + \frac{q-1}{2} \left(\frac{15}{4} + 3x_f + x_f^2 \right) \right] (g_{*s}^q)^{-1}. \quad (2.9.11)$$

A diferencia de lo que ocurría en el caso relativista, ahora $Y_{q,eq}$ depende fuertemente de m (pues $x_f = m/T_d$). Para obtener una estimación numérica, debemos determinar T_d . Tomaremos como criterio para definir la temperatura a la que tiene lugar el desacoplamiento la condición $\Gamma \simeq H$.

Las reacciones que son capaces de cambiar el número de wimp's de tipo A , son de la forma $A\bar{A} \leftrightarrow X\bar{X}$, donde X es alguna especie de partícula genérica (la cual supondremos, por simplicidad, en equilibrio térmico). El valor promedio de σv para tal proceso de aniquilación puede ser expresado en la forma

$$\langle \sigma v \rangle \equiv \sigma_0 \left(\frac{T}{m} \right)^k. \quad (2.9.12)$$

El valor de k depende de los detalles del proceso de aniquilación dominante, usualmente es de orden 1. El valor de σ_0 depende de m y tiene una forma simple en los dos casos extremos $m \ll m_Z$ y $m \gg m_Z$, donde $m_Z \simeq 10^2$ GeV es la masa del mediador de las interacciones débiles; el bosón Z .

Analicemos el caso $m \ll m_Z$. Para wimps con $m < m_Z$, la sección eficaz σ_0 puede ser expresada mediante (véase la sección 3.4 del libro de Padmanabhan [19]),

$$\sigma_0 \simeq \frac{c}{2\pi} G_F^2 m^2, \quad (2.9.13)$$

donde G_F es la constante de Fermi y su valor está dado por $G_F^{-2} = 292,8$ GeV. El valor de la constante c depende del “tipo de fermión”. Los fermiones de spin 1/2 son clasificados como de tipo “Dirac” o “Majorana”. Un fermión de tipo Dirac será distinto de su antipartícula, mientras que uno de tipo Majorana será su propia antipartícula. Consideraremos partículas del tipo Dirac para las cuales $c \simeq 5$.

La tasa con la que ocurren las reacciones viene dada por

$$\Gamma = n_q \langle \sigma v \rangle, \quad (2.9.14)$$

o bien, teniendo en cuenta la expresión para n_q dada por (2.2.36),

$$\Gamma = \frac{\sigma_0 g_A}{(2\pi)^{3/2}} T^3 \left(\frac{m}{T}\right)^{3/2-k} e^{-m/T} \left[1 + \frac{q-1}{2} \left(\frac{15}{4} + 3\frac{m}{T} + \left(\frac{m}{T}\right)^2 \right) \right]. \quad (2.9.15)$$

La tasa de expansión H como función de la temperatura quedó definido en (2.2.69) mediante

$$H = 1,66 (g_*^q)^{1/2} \frac{T^2}{m_{Pl}}. \quad (2.9.16)$$

Con esto, la condición $\Gamma/H \simeq 1$ nos lleva a

$$1 = 3,82 \times 10^{-2} g_A (g_*^q)^{-1/2} \left(\frac{m}{T_d}\right)^{1/2-k} e^{-m/T_d} \left[1 + \frac{q-1}{2} \left(\frac{15}{4} + 3\frac{m}{T_d} + \left(\frac{m}{T_d}\right)^2 \right) \right] \sigma_0 m m_{pl}. \quad (2.9.17)$$

Resolviendo esta ecuación para e^{-m/T_d} , sustituyendo el resultado en la expresión (2.9.11) para $Y_{q,eq}^{nr}$ y calculando σ_0 utilizando la (2.9.13), obtenemos

$$Y_{q,eq}^{nr}(x_f) = 2,86 \times 10^{-9} (g_*^q)^{-1/2} \left(\frac{m}{T_d}\right)^{k+1} \left(\frac{m}{GeV}\right)^{-3}. \quad (2.9.18)$$

Para hallar el valor de la densidad numérica $n_{q,hoy} = Y_q/s_q$, recordamos que $s_{q,hoy} = 2899,41 \times [1 + 7,11(q-1)] cm^{-3}$. Reteniendo el primer orden en $(q-1)$ esto nos lleva a

$$n_q = 8,3 \times 10^{-6} (g_*^q)^{-1/2} \left(\frac{m}{T_d}\right)^{k+1} \left(\frac{m}{GeV}\right)^{-3} \times \left[1 + (q-1) \left[7,11 + \frac{1}{2} \left(\frac{15}{4} + 3\frac{m}{T_d} + \left(\frac{m}{T_d}\right)^2 \right) \right] \right]. \quad (2.9.19)$$

La densidad de energía de estas partículas hoy es, como señalamos antes, $\rho_{q,hoy} = n_{q,hoy} m$. Podemos calcular ahora la fracción de energía con la que contribuye esta especie a la densidad de energía crítica, es decir $\Omega_{q,hoy}$. Para esto recordamos que

$$\Omega_{q,hoy} h^2 = \frac{8\pi G}{3H_0} h^2 \rho_{q,hoy} \quad (2.9.20)$$

donde $G = m_{pl}^{-2}$ con $m_{pl} = 1,2211 \times 10^{19}$ GeV y h es tal que el valor de $H(t)$ hoy es $H_0 = 2,1332h10^{-42}$ GeV ($0,4 < h < 1$). Sustituyendo los valores numéricos de las constantes obtenemos:

$$\Omega_{q,hoy}h^2 = 0,79(g_\star^q)^{-1/2} \left(\frac{m}{T_d}\right)^{k+1} \left(\frac{m}{GeV}\right)^{-3} \times \left[1 + (q-1) \left[7,11 + \frac{1}{2} \left(\frac{15}{4} + 3\frac{m_d}{T} + \left(\frac{m}{T_d}\right)^2\right)\right]\right]. \quad (2.9.21)$$

Para hacer estimaciones numéricas de estas cantidades debemos resolver la ecuación $\Gamma/H = 1$ para T_d . Tomando logaritmo en (2.9.17), se llega a

$$\frac{m}{T_d} = 17,74 + \ln \left[\frac{g_A}{(g_\star^q)^{1/2}} \right] + \left(\frac{1}{2} - k\right) \ln \left[\frac{m}{T_d} \right] + 3 \ln \left[\frac{m}{GeV} \right] + \ln \left[1 + (q-1) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{15}{4} + 3\frac{m}{T_d} + \left(\frac{m}{T_d}\right)^2 \right) \right] \right]. \quad (2.9.22)$$

Esta condición determina el valor de T_d en función de m . Dado que g_\star^q es una función que varía lentamente con la temperatura, podemos resolver esta ecuación en forma iterativa.

Consideremos el caso típico de una partícula wimp con masa $m \gtrsim 1$ GeV. A partir de (2.9.22) vemos que a orden dominante $m/T_d \simeq 17,74$, suponiendo por simplicidad $k = 0$, el término $\ln(m/T_d)$ corrige el valor de m/T_d a $m/T_d \simeq 19,18$, dando $T_d \simeq 52$ MeV (m/GeV). A esta temperatura, todas las especies de partículas del Modelo Standard son relativistas y por lo tanto contribuyen en forma significativa a la densidad de energía, llevando el valor de g_\star^q al orden de 10^2 . Con esto el término $\ln((g_\star^q)^{1/2}/g_A) \simeq \ln 5 \simeq 1,61$, y el valor de m/T_d se corrige a $m/T_d \simeq 17,57$.

Analicemos ahora el término proveniente de considerar una estadística no-extensiva, este viene dado por:

$$\ln \left[1 + (q-1) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{15}{4} + 3\frac{m}{T_d} + \left(\frac{m}{T_d}\right)^2 \right) \right] \right]. \quad (2.9.23)$$

Sustituyendo en esta expresión el valor de m/T_d a orden cero, $m/T_d \simeq 17,74$, obtenemos como contribuye el cambio en la estadística a la corrección a primer orden del valor de m/T_d . A primer orden en $(q-1)$, podemos utilizar el desarrollo $\ln(1+v) \simeq v$ para obtener

$$\frac{m}{T_d} = 17,57 + 3 \ln \left(\frac{m}{GeV} \right) + (q-1)185,8 \quad (2.9.24)$$

Para masas $m \gtrsim 1$ GeV tales que no suceda $m \gg 1$ GeV, dado que la función \ln es de crecimiento relativamente lento; podemos prescindir del término $3 \ln(m/GeV)$. Hemos hallado finalmente una estimación de m/T_d ,

$$\frac{m}{T_d} = 17,57 + 3 \ln \left(\frac{m}{GeV} \right) + (q-1)185,8. \quad (2.9.25)$$

Sustituyendo este valor en (2.9.18) y (2.9.21) para $Y_{q,eq}^{nr}$ y $\Omega_{q,hoy}h^2$ respectivamente y considerando que $g_\star^q \simeq 10^2$ obtenemos

$$Y_{q,eq}^{nr} = 4,87 \times 10^{-9} [1 + 10,5(q-1)] \left(\frac{m}{GeV}\right)^{-3}. \quad (2.9.26)$$

$$\Omega_{q,hoy}h^2 = 1,34 [1 - 75,2(q-1)] \left(\frac{m}{GeV}\right)^{-2}. \quad (2.9.27)$$

El fermión A y su antipartícula \bar{A} , proveerán dos veces este valor de $\Omega_{q, hoy} h^2$, es decir

$$\Omega_{q, hoy}^{A\bar{A}} h^2 = 2,69 [1 - 75,2(q - 1)] \left(\frac{m}{\text{GeV}} \right)^{-2}. \quad (2.9.28)$$

La restricción $\Omega_{q, hoy} h^2 \lesssim 1$ da entonces una cota inferior para la masa de estas partículas

$$m > 1,64 [1 - 37,6(q - 1)] \text{ GeV}. \quad (2.9.29)$$

El análisis hecho en esta sección, revela que los wimps, en dos rangos de masa diferentes, pueden contribuir significativamente a la densidad del Universo dando $\Omega h^2 \lesssim 1$. Para $m \lesssim 10^{-2}$ eV, $T_d \simeq 1 - 3$ MeV, los wimps se desacoplan siendo aún relativistas. Su densidad numérica hoy es comparable a la de los fotones y para $m \simeq 10^2$ eV, $\Omega h^2 \simeq 1$. Si por otro lado consideramos $m \gtrsim 1$ GeV, $T_d \simeq 52$ MeV y los wimps se desacoplan siendo no relativistas. La densidad numérica de reliquias frías se ve fuertemente suprimida por el factor e^{-m/T_d} . Para $m \simeq 2$ GeV, nuevamente tenemos $\Omega h^2 \simeq 1$. Es interesante notar que consideraciones puramente cosmológicas (viz. $\Omega h^2 \lesssim 1$.) acotan la posible existencia de fermiones que interactúan débilmente en el rango de masas comprendido entre $100 \text{ eV} < m < 2 \text{ GeV}$. Sabemos que el Universo contiene una gran cantidad de masa en forma de materia oscura. Los wimps, si ellos existen, pueden proveer mucha de esta masa. Sobre el resultado (2.9.29) es también válido el comentario señalado en el último párrafo de la sección sobre reliquias relativistas.

2.10. Igualdad radiación-materia

Para una ecuación de estado de la forma $P = \omega \rho$ puede mostrarse que la densidad de energía es $\rho \propto R^{-3(1+\omega)}$ (véase la sección 5.3 de la Ref.[17]). En particular tenemos para

- Radiación: $\omega = \frac{1}{3} \implies \rho_R \propto R^{-4}$
- Materia no relativista: $\omega = 0 \implies \rho_{NR} \propto R^{-3}$

De modo que

$$\rho_{NR}(t) = \rho_{NR}(t_0) \left(\frac{R(t_0)}{R(t)} \right)^3 = \rho_c \Omega_{NR}(t_0) (1+z)^3, \quad (2.10.1)$$

$$\rho_R(t) = \rho_R(t_0) \left(\frac{R(t_0)}{R(t)} \right)^4 = \rho_c \Omega_{NR}(t_0) (1+z)^4, \quad (2.10.2)$$

donde hemos definido el corrimiento al rojo z como $1+z = R(t_0)/R(t)$.

Las observaciones sugieren que:

$$\Omega_{total}(t_0) \equiv \Omega \simeq \Omega_{NR} \gtrsim 0,2 \quad (2.10.3)$$

Vemos entonces que la materia domina sobre la radiación en el presente. Pero dado que $\rho_{NR} \propto R^{-3}$ y $\rho_R \propto R^{-4}$, se sigue que la densidad de radiación crece más rápido que la densidad de materia a medida que vamos hacia fases cada vez más tempranas del Universo (es decir hacia corrimientos al rojo mayores). De esto, se desprende que en algún tiempo $t = t_{eq}$ en el pasado (el cual corresponde a un valor del factor de escala $R = R_{eq}$ y un corrimiento al rojo $z = z_{eq}$) la radiación y la materia tuvieron densidades idénticas. De las igualdades:

$$\rho_{NR}(t_{eq}) = \rho_{NR}(t_0) \left(\frac{R(t_0)}{R(t_{eq})} \right)^3 = \rho_c \Omega_{NR}(t_0) (1+z_{eq})^3, \quad (2.10.4)$$

$$\rho_R(t_{eq}) = \rho_R(t_0) \left(\frac{R(t_0)}{R(t_{eq})} \right)^4 = \rho_c \Omega_{NR}(t_0) (1+z_{eq})^4, \quad (2.10.5)$$

se deduce

$$1 + z_{eq} = \frac{\Omega_{NR}(t_0)}{\Omega_R(t_0)} \simeq \frac{\Omega}{\Omega_R(t_0)}. \quad (2.10.6)$$

De este modo,

$$1 + z_{eq} = (\Omega_R(t_0)h^2)^{-1}\Omega h^2. \quad (2.10.7)$$

Utilizando la ecuación (2.8.8) para el valor de $\Omega_R(t_0)h^2$ en el marco no extensivo obtenemos para $1 + z_{eq}$ a primer orden en $(q - 1)$,

$$1 + z_{eq} = 2,4 \times 10^4 [1 - 9,43(q - 1)] \Omega h^2 \quad (2.10.8)$$

Este valor corresponde a una temperatura dada por $T_{eq} = T_0(1 + z_{eq})$, tomando $T_0 = 2,728$ K, obtenemos

$$T_{eq} = 5,64 [1 - 9,43(q - 1)] \Omega h^2, \quad (2.10.9)$$

mientras que el tiempo universal correspondiente viene dado por (véase la sección 2.4 de [19])

$$t_{eq} \simeq 0,39 H_0^{-1} \Omega^{-1/2} (1 + z_{eq})^{-3/2}, \quad (2.10.10)$$

tomando $H_0 = 2,1332h10^{-42}$ GeV, obtenemos a primer orden en $(q - 1)$

$$t_{eq} = 1,022 \times 10^3 [1 + 14,14(q - 1)] (\Omega h^2)^{-2} \text{años}. \quad (2.10.11)$$

Señalamos que el valor del tiempo de equivalencia también puede ser acotado utilizando medidas precisas del fondo cósmico de microondas, de donde pueden surgir cotas sobre $(q - 1)$.

Capítulo 3

Nucleosíntesis Primordial

3.1. Introducción

Los procesos de formación de elementos livianos en el universo primitivo, llamados *nucleosíntesis primordial*, proveen un escenario interesante para testear la viabilidad de teorías físicas fundamentales y, en particular, de la descripción estadística. Como ya hemos visto, los procesos térmicos son sensibles a las modificaciones en la teoría estadística y la nucleosíntesis puede entonces predecir diferentes abundancias de elementos livianos en cada teoría particular.

Los cambios producidos en las abundancias de elementos livianos en teorías no-extensivas han sido tratados en el marco de la aproximación asintótica (véase, por ejemplo, la Ref.[20]). Aquí, en cambio se seguirá trabajando con las funciones de distribución provistas por la aproximación de factorización. Dado que las expresiones analíticas han probado ser en general más sencillas en el segundo marco que en el primero, esperamos poder proseguir los cálculos en forma analítica más allá del punto alcanzado en tratamientos anteriores. Además presentaremos un análisis detallado del Principio de Balance Nuclear que es válido en situaciones no-extensivas que será útil en ambas aproximaciones.

Este capítulo se encuentra reportado en la Ref. [22] y representa una extensión de los estudios realizados en [20, 23, 24].

3.2. Nucleosíntesis como test del universo: nociones básicas

El cálculo básico de nucleosíntesis es la simulación de una cadena de reacciones nucleares en una caja en expansión. Las predicciones actuales del modelo standard se muestran en el panel izquierdo de la Fig. 3.1. Esencialmente, las predicciones de nucleosíntesis son robustas porque toda la información microfísica está bien entendida. Las energías relevantes (0.1 a 1MeV) pueden ser exploradas en el laboratorio y las incertidumbres experimentales son en general despreciables. Sin embargo, los problemas que surgen en la determinación de las abundancias primordiales son varios y complicados, siendo el más fundamental, que sólo es posible medir abundancias actuales en sitios astrofísicos selectos y luego, a partir de estos datos, inferir lo que sucedió en el universo primitivo (véanse las Refs.[17, 28]). No es nuestro interés hacer aquí una revisión de la forma en que estas observaciones son hechas, sino solamente estudiar las consecuencias a que estas observaciones conducen.

El primer gran logro del modelo standard de nucleosíntesis fue la predicción, luego apoyada por evidencia experimental, de que debería haber en el universo grandes cantidades de ${}^4\text{He}$ ($\simeq 25\%$), aún más que lo que pueden *fabricar* las estrellas. Luego, comenzó a utilizarse la abundancia de D como una medida de la densidad bariónica del universo. La producción de D como función de la densidad

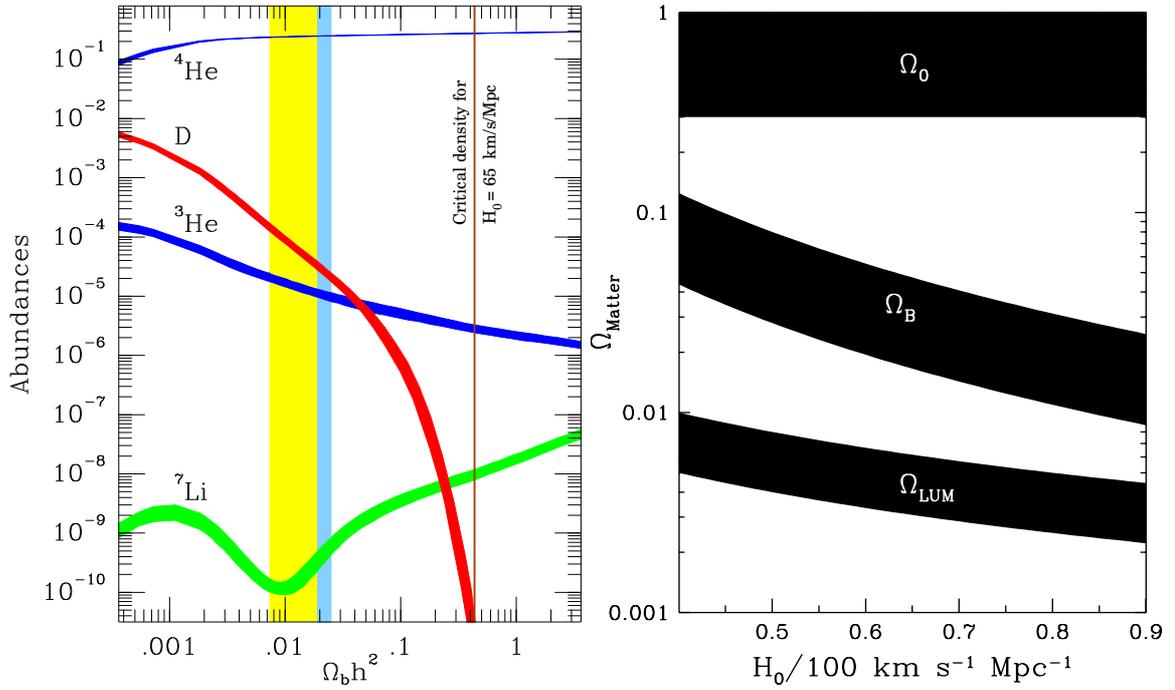


Figura 3.1: Nucleosíntesis primordial: ideas generales. A la izquierda, predicciones de abundancias primordiales de los elementos livianos (${}^4\text{He}$ está dado por su fracción de masa, el resto por sus valores relativos al hidrógeno). El ancho de las curvas indican incertidumbres teóricas. La banda vertical indica el intervalo en el que las abundancias medidas están de acuerdo con la predicción teórica y la línea vertical mas oscura, la última determinación de la abundancia de D (datos de 1998, véase la sección de últimos resultados). A la derecha, problemas concernientes a la cantidad de materia oscura: la mayor parte de la materia es no bariónica y la mayor parte de la materia bariónica es oscura.

bariónica tiene una rápida caída ($\propto \rho_b^{-1,7}$) lo que permitió excluir tempranamente modelos de universos cerrados solo por bariones. La idea es que no existe ningún proceso astrofísico realista capaz de producir grandes cantidades de D -debido a la baja energía de ligadura, éste es rápidamente dissociado-. Luego, la abundancia actual de D es un límite inferior a la producción primordial. También se utilizó el ${}^3\text{He}$, que a diferencia del D, si puede ser producido en las estrellas, por ejemplo en estrellas de baja masa durante su etapa de secuencia principal. La suma de las abundancias D + ${}^3\text{He}$ debería entonces ser constante o aumentar en los últimos Gyr's por lo que medidas actuales de esta suma limitan la producción primordial, lo que a su vez acota inferiormente la densidad bariónica.¹ Las abundancias de D, ${}^3\text{He}$ y ${}^4\text{He}$ conducen a predecir que la abundancia de ${}^7\text{Li}$ debería estar cerca de su mínimo, ${}^7\text{Li}/\text{H} \simeq 10^{-10}$. Finalmente, se llegó a la conclusión que las abundancias de los elementos producidos en el Big Bang son consistentes con las predicciones siempre que la fracción de densidad crítica provista por los bariones esté en el intervalo, $0,007 < \Omega_b h^2 < 0,024$ y el número de especies de neutrinos sea inferior a 3.7 [30]. Estos resultados corresponden a la situación de 1998, véase más abajo la sección de actualización.² El resultado anterior es la evidencia más fuerte a favor de la existencia de materia oscura no bariónica. Analicemos esto con más detalle.

Consideremos por ejemplo que la abundancia de D es igual a $D/\text{H} = (3,2 \pm 0,6) \times 10^{-5}$. Esto conduce, a través de la Fig.3.1, a $\Omega_b = (0,02 \pm 0,004)h^{-2}$. Pero medidas dinámicas de la densidad de materia

¹Esto es un poco más complejo ya que también hay estrellas que destruyen ${}^3\text{He}$. Sin embargo, éstas resultan ser masivas y también producen metales. Luego, la metalicidad de la galaxia provee una cota superior al monto de decrecimiento de D + ${}^3\text{He}$ y el razonamiento anterior es aplicable [29].

²Recordemos que la constante de Hubble $H_0 = 100h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ entra en el problema debido a la definición de la densidad crítica $\rho_c = 3H_0^2/8\pi G = 1,88h^2 \times 10^{-29} \text{ g cm}^{-3}$. Medidas recientes parecen converger hacia $h = 0,65 \pm 0,1$ [31].

en clusters -basado en determinaciones de masa galaxia-clusters, velocidades peculiares y frecuencia del fenómeno de *gravitational lensing*- indican que Ω_M es al menos 0.3 (véase la Ref.[32]). El primer problema aparece entonces: *en el caso en que $\Omega_M \lesssim 1$ la mayor parte de la materia es no bariónica*. Pero asimismo, ya que toda la materia luminosa contribuye en menos del 1% a la densidad crítica ($\Omega_{lum} \simeq 0,003h^{-1}$), *la mayor parte de la materia bariónica es oscura*. Estos problemas está gráficamente representados en el panel derecho de la Fig.3.1.

Para terminar, señalemos que la física de partículas también se ha visto beneficiada con cotas provenientes de estudios de nucleosíntesis primordial. Steigman et al. (Ref.[33]) notaron hace ya dos décadas que un límite observacional superior sobre la abundancia de ${}^4\text{He}$ podría usarse para derivar un límite superior a las familias de neutrinos.

En conclusión, la nucleosíntesis primordial es probablemente la herramienta más poderosa para testear una teoría a nivel cosmológico, ya que provee información precisa y experimentalmente confirmada de la situación del universo a pocos segundos luego del Bang. Toda teoría alternativa de estadística o de gravitación debe ser entonces filtrada por sus predicciones de formación de nucleidos.

3.3. Ultimos resultados: la era inesperada de la precisión

Un cambio dramático ocurrió en 1998 cuando la abundancia de D fue medida en nubes hidrógeno de grandes corrimientos al rojo iluminadas por quasars aún más distantes. Basándose en medidas obtenidas de 9 de tales nubes (véase la Ref.[34]) se determinó que $(\text{D}/\text{H})_p = (3,3 \pm 0,5) \times 10^{-5}$ (a 95 % CL). A partir de esto la abundancia de bariones es

$$\Omega_b h^2 = 0,0190 \pm 0,0018 \quad 95\% \text{CL}, \quad (3.3.1)$$

mientras que para la densidad obtenemos

$$\rho = 1,88(\Omega_b h^2) \times 10^{-29} \text{g cm}^{-3}. \quad (3.3.2)$$

Medidas de la radiación de fondo de microondas, en particular de sus anisotropías a gran escala, también son útiles para determinar la densidad bariónica con una precisión del 1%.

El primer paso en la medida de $\Omega_b h^2$ utilizando la radiación cósmica de fondo fue realizado por los experimentos BOOMERanG y MAXIMA quienes reportaron (Ref.[35])

$$\Omega_b h^2 = 0,032_{-0,008}^{+0,009} \quad 95\% \text{CL}, \quad (3.3.3)$$

lo cual claramente no es compatible con el valor obtenido utilizando el modelo standard de la nucleosíntesis primordial.

La nucleosíntesis primordial es incompatible con el valor de $\Omega_b h^2$ dado por (3.3.3) por tres razones (Ref.[36])

- para tal valor de $\Omega_b h^2 (\simeq 0,03)$ la abundancia de deuterio, D/H, sería $(1,6 \pm 0,12) \times 10^{-5}$,
- la abundancia de ${}^7\text{Li}$: $(8,5 \pm 0,7) \times 10^{-10}$,
- la abundancia de ${}^4\text{He}$: $0,251 \pm 0,001$,

y las tres están en significativo conflicto con las observaciones. Por ejemplo para el ${}^4\text{He}$ los diferentes estudios arrojan $0,244 \pm 0,004$ y $0,234 \pm 0,004$ (Ref.[34]) que, siendo sólo marginalmente consistentes entre sí, son incompatibles con el valor 0.251.

El rango de valores de $\Omega_b h^2$ obtenido a partir de la nucleosíntesis primordial parece bien justificado y un tratamiento excesivo de los errores puede empujar $\Omega_b h^2$ hacia arriba a no más de 0.025. Inclusive en este límite el desacuerdo entre teoría y observación para diferentes elementos livianos empieza a notarse.

Hay entonces claramente un conflicto inesperado: si experimentos con el fondo cósmico de microondas confirman un valor tan alto de $\Omega_b h^2$ se señalaría la existencia de física más allá del modelo standard.

3.4. Formación primordial de ${}^4\text{He}$

Son muchas y variadas las presentaciones que pueden encontrarse sobre la nucleosíntesis primordial. A los efectos de este capítulo, haremos una breve revisión del tema. Valiosas introducciones pueden verse en el libro de Kolb y Turner [17] y en el de Coles y Lucchin [28].³

Básicamente, la formación de ${}^4\text{He}$ primordial ocurre a través de la siguiente serie de eventos. A tiempos tempranos, cuando la temperatura del universo era del orden de las centenas de MeV, la energía y la densidad numérica de partículas estaba dominada por partículas relativistas: leptones – electrones, positrones y neutrinos – y fotones. Todas las partículas estaban en equilibrio térmico, debido a colisiones gobernadas por la interacción débil que rige las reacciones:

$$n + \nu_e \rightleftharpoons p + e^-, \quad (3.4.1)$$

$$n + e^+ \rightleftharpoons p + \bar{\nu}_e, \quad (3.4.2)$$

$$n \rightleftharpoons p + e^- + \bar{\nu}_e. \quad (3.4.3)$$

Es una suposición del modelo que los neutrinos y antineutrinos se encontraban en igual cantidad mientras que los electrones y protones mantenían –y aún lo hacen– la neutralidad de carga. Bajo estas suposiciones, la densidad numérica de neutrones a protones estaba dado por el factor de Boltzmann:

$$\frac{n_n(T)}{n_p(T)} = \exp\left[-\frac{\Delta m}{kT}\right], \quad (3.4.4)$$

donde $\Delta m = m_n - m_p \simeq 1,29\text{MeV}$. A una temperatura inicial de 100MeV , la razón de neutrones a protones era muy cercana a la unidad. Es posible definir entonces la razón de la densidad neutrónica a la densidad total de bariones como,

$$X_n(T) = \frac{n_n(T)}{n_n(T) + n_p(T)}, \quad (3.4.5)$$

y escribir para esta variable una ecuación cinética,

$$\frac{dX_n}{dt} = -\lambda_{np}X_n + \lambda_{pn}(1 - X_n), \quad (3.4.6)$$

donde λ_{np} y λ_{pn} son las tasas totales de transición de los procesos que transforman neutrones en protones y viceversa. Estas tasas son calculadas dentro de la teoría de Fermi de interacciones débiles [27]. Notemos que la condición inicial de (3.4.6) está fija: para $kT \gg \Delta m$, (*i.e.* $t \rightarrow 0$), $X_n(T) \rightarrow 1/2$. Esto es independiente del modelo cosmológico particular elegido para describir el universo temprano, siempre y cuando exista en él un estado inicial denso de alta temperatura. De hecho, ahora podemos

³Esta sección está adaptada de la Tesis Doctoral de D.F. Torres, UNLP, 1998.

plantear en términos cualitativos cuál es el problema a resolver, se debe llevar a cabo una integración numérica de las ecuaciones de cinética nuclear

$$\frac{dY_i}{dt} = \pm \sum \lambda_j Y_j \pm \sum \beta_{jk} Y_j Y_k, \quad (3.4.7)$$

donde $Y_j = n_i/(n_n + n_p)$ es la fracción del i -ésimo nucleido, y la suma incluye todos los procesos que llevan a la formación de cada núcleo (signo $+$) y a la destrucción de los mismos (signo $-$) siendo λ_j y β_{jk} las respectivas tasas de reacción. Las primeras de tales integraciones fueron llevadas a cabo por Peebles y por Wagoner et al. Consideremos las ecuaciones de Einstein. En la época que nos ocupa, el término de curvatura es despreciable por razones anteriormente expuestas. En una métrica plana de Friedmann-Robertson-Walker se obtiene, para la ecuación tipo tiempo,

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho, \quad (3.4.8)$$

donde como es usual, R es el factor de escala, G es la constante de gravitación y ρ la densidad de energía. Esta densidad de energía está dominada por partículas sin masa,

$$\rho = g_\star \frac{\pi^2}{30} T^4, \quad (3.4.9)$$

con g_\star , el número efectivo de grados de libertad. A un tiempo t_f , o equivalentemente una temperatura T_f , la tasa de expansión $H = \dot{R}/R$ excede la tasa Γ a la cual ocurren las reacciones (3.4.1), (3.4.2) y (3.4.3) que mantienen el equilibrio químico entre leptones y bariones. En este tiempo, la razón neutrón-protón se *congela*,

$$X(T \simeq 0) = X_{eq}(T_f), \quad (3.4.10)$$

y es modificada sólo por el decaimiento del neutrón, dado por (3.4.3). La tasa de reacción Γ es básicamente igual a,

$$\Gamma(T) = n_\nu(T) \langle \sigma v \rangle_T, \quad (3.4.11)$$

donde $n_\nu(T)$ es la densidad numérica de neutrinos electrónicos y $\langle \sigma v \rangle_T$ es un promedio de la sección eficaz de reacción multiplicada por la velocidad relativa de los interactuantes. Ya que $n_\nu(T) \propto T^3$ y $\sigma \propto G_F^2 T^2$, con G_F la constante de Fermi y $v \simeq c = 1$, obtenemos:

$$\Gamma \simeq G_F^2 T^5. \quad (3.4.12)$$

El tiempo de congelamiento estará dado por la igualdad,

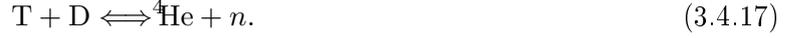
$$\Gamma \simeq \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)_{t=t_f}, \quad (3.4.13)$$

que, utilizando (3.4.8), conduce a

$$T_f^3 \simeq \frac{g_\star^{\frac{1}{2}} G^{\frac{1}{2}}}{G_F^2}. \quad (3.4.14)$$

Teniendo en cuenta que $G_F \simeq 1 \times 10^{-5} \text{GeV}^{-2}$, se obtiene $T_f \simeq g_\star^{\frac{1}{6}} \times 1 \text{MeV}$. A temperaturas del orden de T_f se encuentra la esencia del proceso de nucleosíntesis. Esta es la competencia cualitativa entre la tasa de expansión del universo y la tasa a la cual ocurren las interacciones débiles. A $T = T_f$, el D, T, ${}^3\text{He}$ y ${}^4\text{He}$ son mantenidos en equilibrio por reacciones como:





Cuando la temperatura es lo suficientemente baja comparada con la energía de ligadura del deuterio ($\epsilon_D = 2,23\text{MeV}$) estas reacciones ocurren principalmente hacia la derecha (es decir, los fotones ya no pueden disociar al D). Luego, debido a la alta energía de ligadura del ${}^4\text{He}$ ($\epsilon_{{}^4\text{He}}=28.3\text{MeV}$), a la no existencia de núcleos estables con número atómico 5 y 8 y al aumento de las barreras coulombianas, casi todos los neutrones originales presentes en la temperatura de congelamiento son convertidos en ${}^4\text{He}$. La razón entre núcleos de ${}^4\text{He}$ y el número total de bariones es entonces:

$$X_4 \simeq \frac{1}{2}X_n(T \simeq 0), \quad (3.4.18)$$

o, equivalentemente, la fracción de masa del ${}^4\text{He}$ puede ser estimada como

$$Y_p = \frac{m_{{}^4\text{He}}}{m_{total}} = 4 \frac{n_{{}^4\text{He}}}{n_{total}} \simeq 4 \frac{1}{2}X_n(T \simeq 0). \quad (3.4.19)$$

En conclusión, el valor de X_n en el tiempo de congelamiento fija la cantidad de ${}^4\text{He}$ producido. Notemos, sin embargo, que la fórmula anterior es una aproximación y que sólo una integración numérica del problema podrá dar mayor certidumbre. El hecho que las reacciones (3.4.15), (3.4.16) y (3.4.17) sean de dos cuerpos puede entenderse en la baja probabilidad de que se produzcan reacciones de más cuerpos, debido a la baja densidad bariónica. El primer paso, ecuación (3.4.15), se conoce como *cuello de botella del D*: como la energía de ligadura del D es baja, muchos fotones serán capaces de disociarlo y los pasos siguientes sólo podrán continuar a medida que el universo se enfríe. El número de fotones capaces de disociar al D varía como:

$$\left(\frac{n_\gamma^D}{n_N} \right) = \frac{1}{\eta} \exp \left[-\frac{\epsilon_D}{kT} \right], \quad (3.4.20)$$

donde η es la razón actual de bariones a fotones. La temperatura a la cual el D es suficientemente abundante como para que los pasos (3.4.16), (3.4.17) y sus intermedios:



prosigan, dependerá del valor de η . A través de η , la densidad de materia entra en juego. Debido a que la temperatura de la radiación cósmica de fondo se conoce en forma muy precisa ($T = 2,7277\text{K} \pm 0,002\text{K}$), η y la densidad bariónica están directamente relacionados,

$$\rho_b = 6,84 \times 10^{-22} \eta \text{ g cm}^{-3}, \quad (3.4.25)$$

o, equivalentemente,

$$\Omega_b h^2 = 3,64 \times 10^7 \eta. \quad (3.4.26)$$

3.5. Razón neutrón-protón en el Universo en expansión

En esta sección describiremos un modelo para tratar la abundancia de neutrones en el Universo en expansión en el marco de la teoría estadística no extensiva. Para esto, seguiremos las ideas principales de Bernstein et al. (Ref.[25]). Denotaremos por $\lambda_{pn}(T(t))$ la tasa con la que tienen lugar los procesos débiles que convierten protones en neutrones y por $\lambda_{np}(T(t))$ la tasa para los procesos inversos. $X(T(t))$ será, como es habitual, la razón entre la densidad numérica de neutrones y la densidad numérica de bariones. Habiendo definido estas cantidades, podemos escribir la ecuación cinética que da cuenta de la variación temporal de X ,

$$\frac{dX(t)}{dt} = \lambda_{pn}(T)(1 - X(t)) - \lambda_{np}(T)X(t). \quad (3.5.1)$$

La solución de esta ecuación viene dada por:

$$X(T) = \int_{t_0}^t dt' I(t, t') \lambda_{pn}(t') + X(t_0) I(t, t_0), \quad (3.5.2)$$

donde denotamos por $I(t, t')$ el factor integrante

$$I(t, t') = \exp\left(-\int_{t'}^t dt' \Lambda(t')\right), \quad (3.5.3)$$

con

$$\Lambda(t) = \lambda_{pn}(t) + \lambda_{np}(t). \quad (3.5.4)$$

Notemos que la forma de la solución no depende de la estadística utilizada. Sin embargo el hecho de cambiar la estadística, producirá cambios en las tasas de reacción, y esto hará que la solución difiera de la standard. La expresión (3.5.2) se simplifica tomando el valor de $t_0 = 0$. Es de esperar que λ_{np} y λ_{pn} sean muy grandes para tiempos tempranos y altas temperaturas. De este modo, el factor integrante $I(t, t')$ será muy pequeño para tiempos del orden de $t \simeq 1/\Lambda(t_0)$ y entonces el término $X(t_0)I(t, t_0)$ puede ser omitido. Esperamos además que, debido a los grandes valores para las tasas, la integral en el primer término de (3.5.2) sea insensible al cambio de t_0 por 0. Con estas aproximaciones, tenemos ahora:

$$X(t) = \int_0^t dt' I(t, t') \lambda_{pn}(t'). \quad (3.5.5)$$

Finalmente, podemos notar que:

$$I(t, t') = \frac{1}{\Lambda(t')} \frac{d}{dt'} I(t, t'), \quad (3.5.6)$$

o, integrando por partes:

$$X(t) = \frac{\lambda_{pn}(t)}{\Lambda(t)} - \int_0^t dt' I(t, t') \frac{d}{dt'} \left(\frac{\lambda_{pn}(t')}{\Lambda(t')} \right). \quad (3.5.7)$$

3.6. Tasas de reacción

Para calcular en forma explícita (3.5.7), necesitamos conocer la forma funcional de las tasas de reacción. Consideremos la tasa de reacción $\lambda_{np}(t)$. Esta es la suma de las tasas de reacción de tres procesos individuales,

$$\lambda_{np} = \lambda_{\nu+n \rightarrow p+e^-} + \lambda_{e^+n \rightarrow p+\bar{\nu}} + \lambda_{n \rightarrow p+e^-+\bar{\nu}} \quad (3.6.1)$$

los cuales estan dados por (véase la sección 7 del capítulo 15 del libro de Weinberg Ref.[27]):

$$\lambda_{\nu+n \rightarrow p+e^-} = A \int_0^\infty dp_\nu p_\nu^2 p_e E_e (1 - f^e) f^\nu, \quad (3.6.2)$$

$$\lambda_{e^+ + n \rightarrow p + \bar{\nu}} = A \int_0^\infty dp_e p_e^2 p_\nu E_\nu (1 - f^\nu) f^e, \quad (3.6.3)$$

$$\lambda_{n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}} = A \int_0^{p_0} dp_e p_e^2 p_\nu E_\nu (1 - f^\nu) (1 - f^e), \quad (3.6.4)$$

donde A es una constante global de acoplamiento fijada por el valor experimental de $\lambda_{n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}}$, $p_{\nu,e}$ son las magnitudes de los momentos de los neutrinos y de los electrones y $E_{\nu,e}$ son las correspondientes. En el dominio de energías relativamente bajas que nos concierne, los retrocesos que sufren los nucleones en cada colisión, pueden ser despreciados. Esto nos permite escribir la ecuación de la conservación de la energía como $E_\nu + m_n = E_e + m_p$ para (3.6.2) y como $E_\nu + m_p = E_e + m_n$ para (3.6.3). Estas ecuaciones deben ser usadas en forma explícita para resolver las integrales. En (3.6.4), $E_\nu = \Delta m - E_e > 0$, con $\Delta m = m_n - m_p = 1,29\text{MeV}$ y de esta condición proviene el valor del límite superior en el rango de integración. Finalmente, $f^{\nu,e}$ son las funciones de distribución y $(1 - f^{\nu,e})$ son los factores de bloqueo de Pauli (que representan la probabilidad de que los estados finales se encuentren desocupados).

En la sección siguiente llevaremos a cabo cálculos que involucran a las tasas de los procesos inversos vinculados con (3.6.2) y (3.6.3). Por completitud damos aquí sus expresiones (véase la Ref.[27]),

$$\lambda_{e^- + p \rightarrow n + \nu} = A \int_{p_e^0}^\infty dp_e p_e^2 p_\nu E_\nu (1 - f^\nu) f^e, \quad (3.6.5)$$

$$\lambda_{\bar{\nu} + p \rightarrow n + e^+} = A \int_{\Delta m}^\infty dp_\nu p_\nu^2 p_e E_e (1 - f^e) f^\nu, \quad (3.6.6)$$

donde debe cumplirse que $E_\nu + m_n = E_e + m_p$ para (3.6.5) y que $E_\nu + m_p = E_e + m_n$ para (3.6.6). El límite inferior de la integral (3.6.5) viene dado por el momento mínimo que deben tener los electrones, $p_e^0 = (\Delta m^2 - m_e^2)^{1/2}$, para que resulte $E_\nu > 0$. Por otro lado el límite inferior en la integral (3.6.6) se debe a que $E_\nu = E_e + \Delta m > \Delta m$, pues suponemos que los estados finales son no ligados.

En el esquema standard $f^{\nu,e}$ son las funciones de distribución usuales dadas por la estadística de Fermi-Dirac, mientras que aquí consideraremos las funciones de distribución $f_q^{\nu,e}$ con las que hemos estado trabajando hasta el momento. Esta elección particular para las funciones de distribución nos llevará a resultados generalizados de todas las cantidades definidas desde el comienzo de esta sección. Como siempre a estos los distinguiremos con el índice q .

En la sección 2.5 mencionamos que, en general, la temperatura de los electrones y de los neutrinos, T_e y T_ν , pueden diferir debido a que sobre el final del período de “freeze out”, los electrones y positrones se aniquilan, interactuando solamente con los fotones. Por el momento, siguiendo a Bernstein et al., tomaremos todas estas temperaturas iguales, $T = T_e = T_\nu = T_\gamma$. Cuando se trabaja con las funciones de distribución de Boltzmann (tomadas como límite de las de Fermi-Dirac) el solo hecho de asumir una única temperatura de equilibrio, asegura que las tasas de las reacciones inversas, tales como $e^- + p \rightarrow n + \nu$, obedezcan el Principio del Balance Detallado (PBD). La sección que sigue trata sobre la validez de este punto en un marco no-extensivo.

3.7. Principio de balance detallado

El principio de balance detallado establece que si conocemos una tasa de reacción (digamos λ_{np}) entonces ésta se encuentra relacionada con la tasa de la reacción inversa (λ_{pn}) mediante un factor exponencial; esto es

$$\lambda_{pn} = e^{-\Delta m/T} \lambda_{np}. \quad (3.7.1)$$

Analicemos ahora si esto se cumple en el caso no extensivo. Para esto consideramos por separado cada una de las reacciones que aparecen en (3.6.1).

3.7.1. Reacción $\nu + n \leftrightarrow p + e^-$

Pretendemos ver entonces que relación existe entre: $\lambda_{e^-+p \rightarrow n+\nu}^q$ y $\lambda_{\nu+n \rightarrow p+e^-}^q$, con

$$\lambda_{e^-+p \rightarrow n+\nu}^q = A \int_{p_e^0}^{\infty} dp_e p_e^2 p_\nu E_\nu (1 - f_q^\nu) f_q^e \quad (3.7.2)$$

y

$$\lambda_{\nu+n \rightarrow p+e^-}^q = A \int_0^{\infty} dp_\nu p_\nu^2 p_e E_e (1 - f_q^e) f_q^\nu. \quad (3.7.3)$$

Partiendo de la expresión para $\lambda_{e^-+p \rightarrow n+\nu}^q$, teniendo en cuenta que $p_e dp_e = E_e dE_e$, $E_\nu = E_e - \Delta m$ y que $E_\nu = p_\nu$, es posible obtener mediante cambios de variable,

$$\lambda_{e^-+p \rightarrow n+\nu}^q = A \int_0^{\infty} dp_\nu p_\nu^2 p_e E_e (1 - f_q^\nu) f_q^e. \quad (3.7.4)$$

Como ya hemos visto en la sección 2.2, en el régimen $x = E/T \gg 1$, la función de distribución f_q^i puede aproximarse por

$$f_q^i = e^{-x_i} + \frac{q-1}{2} x_i^2 e^{-x_i} \quad \text{con } x_i = E_i/T. \quad (3.7.5)$$

Dado que durante el período de “freeze out” la temperatura T es baja en comparación con las energías típicas E que aparecen en las integrales para las tasas de reacción, resulta una buena aproximación despreciar los factores de bloqueo de Pauli. Es decir, podemos considerar que $1 - f_q^i \simeq 1$. De esta manera para analizar la relación que existe entre

$$\lambda_{e^-+p \rightarrow n+\nu}^q = A \int_0^{\infty} dp_\nu p_\nu^2 p_e E_e f_q^e \quad (3.7.6)$$

y

$$\lambda_{\nu+n \rightarrow p+e^-}^q = A \int_0^{\infty} dp_\nu p_\nu^2 p_e E_e f_q^\nu, \quad (3.7.7)$$

basta ver como se relacionan f_q^e y f_q^ν .

A partir de (3.7.5) y teniendo en cuenta que para la reacción $\nu + n \leftrightarrow p + e^-$ debe cumplirse que $E_\nu = E_e - \Delta m$, podemos reescribir f_q^e en términos de f_q^ν . Esto otorga

$$f_q^e = e^{-\Delta m/T} f_q^\nu + e^{-\Delta m/T} \frac{q-1}{2} (2E_\nu \Delta m + \Delta m^2) \frac{e^{-E_\nu/T}}{T^2}. \quad (3.7.8)$$

Vemos entonces que en el marco estadístico no-extensivo el PBD ya no es válido. En este caso las tasas de reacción están relacionadas mediante

$$\lambda_{e^-+p \rightarrow n+\nu}^q = e^{-\Delta m/T} \lambda_{\nu+n \rightarrow p+e^-}^q + \frac{q-1}{2} e^{-\Delta m/T} \frac{A}{T^2} \int_0^{\infty} dp_\nu p_\nu^2 p_e E_e (2E_\nu \Delta m + \Delta m^2) e^{-E_\nu/T} \quad (3.7.9)$$

con $E_\nu = E_e - \Delta m$. Diremos entonces estamos trabajando en un Principio de Balance Detallado con Correcciones No-Extensivas o para abreviar; Balance No-Extensivo (BNE).

Sin embargo, es oportuno señalar aquí que es posible obtener una relación aproximada entre las tasas análoga a la que se da en la situación standard. En efecto, utilizando que $E_\nu/T \gg 1$ en la ecuación (3.7.8), la relación entre f_q^e y f_q^ν se simplifica para dar

$$f_q^e = e^{-\Delta m/T} f_q^\nu, \quad (3.7.10)$$

lo cual lleva en forma inmediata a que la relación válida entre las tasas sea

$$\lambda_{e^-+p \rightarrow n+\nu}^q = e^{-\Delta m/T} \lambda_{\nu+n \rightarrow p+e^-}^q. \quad (3.7.11)$$

De esta manera vemos que aún en el marco no extensivo es posible recuperar el PBD. Cuando invoquemos esta aproximación adicional diremos que estamos trabajando con el Principio de Balance Detallado Standard, o en forma abreviada, con el Balance Standard (BST).

En lo que sigue mostraremos resultados usando tanto el BNE como el BST y discutiremos el rango de validez y utilidad de la aproximación (3.7.10).

3.7.2. Reacción $e^+ + n \leftrightarrow p + \bar{\nu}$

Llevando a cabo un análisis completamente análogo al que acabamos de realizar en el BNE pero considerando las tasas de reacción $\lambda_{e^++n \rightarrow p+\bar{\nu}}^q$ y $\lambda_{\bar{\nu}+p \rightarrow n+e^+}^q$, obtenemos un resultado similar al anterior,

$$\lambda_{e^++n \rightarrow p+\bar{\nu}}^q = e^{-\Delta m/T} \lambda_{\bar{\nu}+p \rightarrow n+e^+}^q + \frac{q-1}{2} e^{-\Delta m/T} \frac{A}{T^2} \int_0^\infty dp_e p_e^2 p_\nu E_\nu (2E_\nu \Delta m + \Delta m^2) e^{-E_e/T}, \quad (3.7.12)$$

donde $E_\nu = E_e + \Delta m$ y se ha despreciado la masa del electrón frente a las energías en juego. De hecho, analizando con cuidado cada una de las integrales que aparecen en (3.7.9) y (3.7.12) vemos que ambas son, en realidad, idénticas.

Por otro lado, cuando consideramos el BST la relación entre las tasas se simplifica nuevamente para dar

$$\lambda_{e^++n \rightarrow p+\bar{\nu}}^q = e^{-\Delta m/T} \lambda_{\bar{\nu}+p \rightarrow n+e^+}^q. \quad (3.7.13)$$

3.7.3. Reacción $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$

En lo que concierne al decaimiento libre de neutrones, el hecho de considerar una estadística no-extensiva no representa cambio alguno en el marco de las aproximaciones en que estamos trabajando. Esto se debe a que al tomar los factores de bloqueo de Pauli $1 - f_q^i$ como 1 en (3.6.4), no quedan rastros de las funciones de distribución. Aquí no podemos despreciar la masa del electrón y el resultado standard sigue siendo válido:

$$\frac{1}{\tau} = \lambda_{n \rightarrow p+e^-+\bar{\nu}} = 0,0157 A \Delta m^5. \quad (3.7.14)$$

Esto nos permite eliminar A en favor de una cantidad medible τ , es decir, la vida media del neutrón

$$A = \frac{a}{\tau} \frac{1}{4} \Delta m^5, \quad a = 255. \quad (3.7.15)$$

A lo largo de esta sección, despreciaremos el decaimiento libre del neutrón cuando calculemos la tasa total λ_{np} .

El hecho de despreciar el decaimiento libre de neutrones, lleva a que (3.6.1) tome la forma: $\lambda_{np}^q = \lambda_{\nu+n \rightarrow p+e^-}^q + \lambda_{e^++n \rightarrow p+\bar{\nu}}^q$. Ahora bien, despreciando los factores de bloqueo en (3.6.2) y (3.6.3) es evidente que estos dos términos son idénticos. Lo mismo sucede con (3.6.5) y (3.6.6), pero en este caso debemos

despreciar además la masa del electrón para que p_0 coincida con Δm . Debido a esto, $\lambda_{np}^q = 2\lambda_{\nu+n \rightarrow p+e^-}^q$ y $\lambda_{pn}^q = 2\lambda_{e^-+p \rightarrow n+\nu}^q$.

Finalizamos esta sección dando la relación válida entre λ_{np}^q y λ_{pn}^q tanto en el BNE como en el BST. A partir de (3.7.9) y de lo mencionado en el párrafo anterior, podemos escribir en el BNE:

$$\lambda_{pn}^q = e^{-\Delta m/T} \lambda_{np}^q + (q-1)e^{-\Delta m/T} I, \quad (3.7.16)$$

donde hemos definido

$$I = \frac{A}{T^2} \int_0^\infty dp_\nu p_\nu^2 p_e E_e (2E_\nu \Delta m + \Delta m^2) e^{-E_\nu/T} \quad (3.7.17)$$

con $E_e = E_\nu + \Delta m$. Mientras que en el BST esta relación deviene,

$$\lambda_{pn}^q = e^{-\Delta m/T} \lambda_{np}^q. \quad (3.7.18)$$

3.8. Cálculo de las tasas de reacción

En esta sección calcularemos en forma explícita las tasas de reacción λ_{np}^q y λ_{pn}^q . Con lo mencionado sobre el final de la sección anterior, es claro que para alcanzar nuestros fines basta con calcular sólo una tasa de reacción; por ejemplo: $\lambda_{\nu+n \rightarrow p+e^-}^q$ y la integral I definida en (3.7.17).

Podemos hallar la tasa de reacción $\lambda_{\nu+n \rightarrow p+e^-}^q$ a partir de (3.7.7). La función de distribución que debemos considerar está dada por (3.7.5). En este caso $E_e = E_\nu + \Delta m$. Si además despreciamos la masa del electrón, $E_e = p_e$; y dado que $p_\nu = E_\nu$, la integral que debemos calcular se reduce a,

$$\lambda_{\nu+n \rightarrow p+e^-}^q = A \int_0^\infty dE_\nu E_\nu^2 (E_\nu + \Delta m)^2 f_q^\nu. \quad (3.8.1)$$

Las integrales que se obtienen a partir de esta mediante el cambio de variable $x = E_\nu/T$, son fácilmente calculables utilizando la forma integral de la función $\Gamma(n)$ definida en (2.2.12). Teniendo en cuenta que $\Gamma(n+1) = n!$ para $n \in \mathbb{Z}$, definiendo $y = \Delta m/T$ y eliminando A en término de la vida media del neutrón (3.7.14), obtenemos

$$\lambda_{\nu+n \rightarrow p+e^-}^q = \frac{1}{2} \frac{a}{\tau y^5} [12 + 6y + y^2] + \frac{a}{\tau y^5} (q-1) [180 + 60y + 6y^2]. \quad (3.8.2)$$

Las consideraciones que hemos hecho para calcular $\lambda_{\nu+n \rightarrow p+e^-}^q$, son también útiles para hallar I . Su cálculo procede en forma completamente análoga al anterior. En términos de la variable y y de la vida media del neutrón τ , se obtiene

$$I(y) = \frac{1}{2} \frac{a}{\tau y^5} [120y + 60y^2 + 12y^3 + y^4]. \quad (3.8.3)$$

3.8.1. Tasa de reacción λ_{np}^q

Estamos ahora en condiciones de escribir λ_{np}^q pues, como ya hemos mencionado, $\lambda_{np}^q = 2\lambda_{\nu+n \rightarrow p+e^-}^q$, es decir

$$\lambda_{np}^q(y) = \frac{a}{\tau y^5} [12 + 6y + y^2] + \frac{a}{\tau y^5} (q-1) [180 + 60y + 6y^2]. \quad (3.8.4)$$

Esta ecuación es válida tanto en el BNE como en el BST.

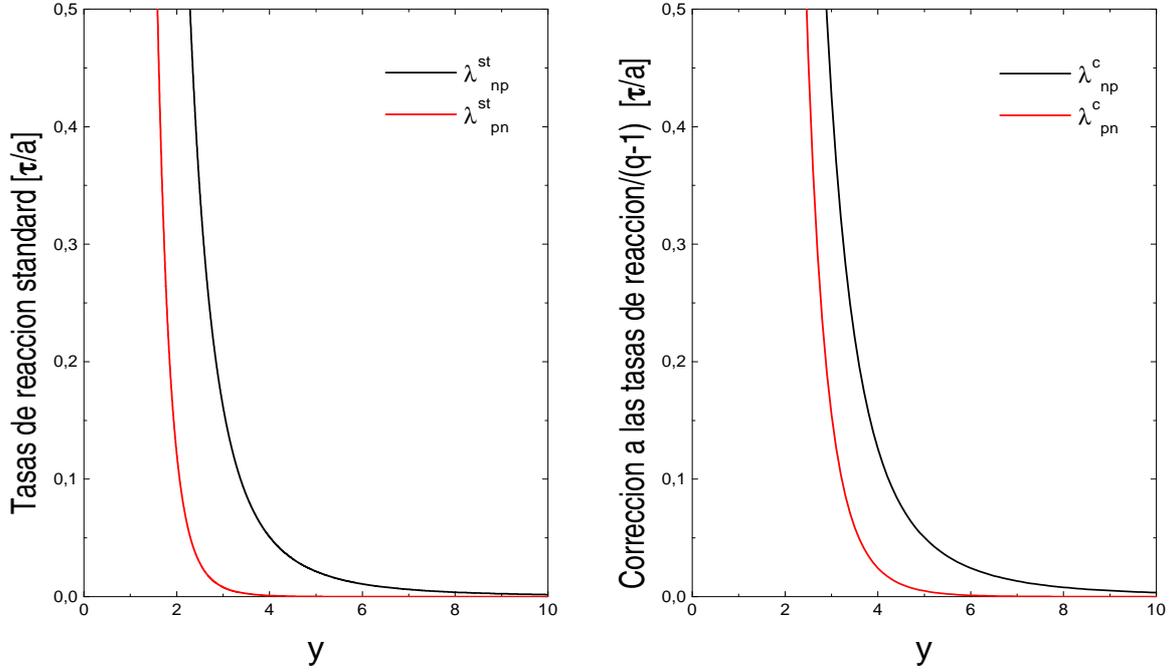


Figura 3.2: A la izquierda, tasas de reacción standard $\lambda_{np}^{st}(y)$ y $\lambda_{pn}^{st}(y)$. A la derecha, correcciones a las tasas standard (normalizadas por el valor de $(q-1)$) en el marco del BNE.

3.8.2. Tasa de reacción λ_{pn}^q

A partir de (3.7.16) y de (3.8.3) podemos escribir la tasa de reacción $\lambda_{pn}^q(y)$ en el BNE. En términos de la variable y ,

$$\lambda_{pn}^q(y) = e^{-y}\lambda_{np}^q(y) + \frac{q-1}{2} \frac{a}{\tau y^5} e^{-y} [120y + 60y^2 + 12y^3 + y^4]. \quad (3.8.5)$$

Por último, es inmediato escribir la tasa de reacción $\lambda_{pn}^q(y)$ en el BST, esto es

$$\lambda_{pn}^q(y) = e^{-y}\lambda_{np}^q(y). \quad (3.8.6)$$

Esta última ecuación fue utilizada en el cálculo realizado por Torres y Vucetich (Ref.[20]), en donde a pesar de trabajar en un contexto no extensivo, se supone la validez del PBD.

Es importante notar que debido a que las tasas de reacción $\lambda_{pn}^{st}(y)$ y $\lambda_{np}^{st}(y)$ tienen un comportamiento asintótico análogo al de las tasas standard (ver Fig.(3.2)) también esperamos en este caso que en el límite de bajas temperaturas (i.e. $y \rightarrow \infty$) la abundancia de neutrones tienda a un valor constante. Esto es, para temperaturas suficientemente bajas las tasas de reacción son prácticamente nulas y con esto los procesos que intercambian neutrones en protones y viceversa son despreciables. De este modo la cantidad $X^q(y \rightarrow \infty)$ tiende a un valor fijo.

3.9. Evolución de la abundancia de neutrones

La solución formal para la evolución de la abundancia de neutrones, está dada por (3.5.7). En esta sección daremos la expresión para X^q que luego utilizaremos en distintos contextos para hallar la abundancia de neutrones en el marco no extensivo. Es conveniente poner como variable independiente en (3.5.7) a $y = \Delta m/T$. De esta manera obtenemos,

$$X^q(y) = \frac{\lambda_{pn}^q(y)}{\Lambda^q(y)} - \int_0^y dy' I^q(y, y') \frac{d}{dy'} \left(\frac{\lambda_{pn}^q(y')}{\Lambda^q(y')} \right). \quad (3.9.1)$$

El factor integrante es ahora,

$$I^q(y, y') = \exp \left(- \int_{y'}^y d\hat{y} \left(\frac{d\hat{t}}{d\hat{y}} \right) \Lambda^q(\hat{y}) \right). \quad (3.9.2)$$

Para evaluar el jacobiano $d\hat{t}/d\hat{y}$, debemos recordar que el factor de escala del Universo, R , en una métrica de Friedmann-Robertson-Walker, va como $R \simeq 1/T$, independientemente de la estadística bajo consideración [37]. De modo que $\dot{T}/T = -\dot{R}/R$, y el lado derecho está dado por las ecuaciones de Einstein:

$$\frac{\dot{R}}{R} = \left(\frac{8\pi G}{3} \rho_q \right)^{1/2}. \quad (3.9.3)$$

Aquí ρ_q es la densidad de energía provista por las especies relativistas en el marco no-extensivo, y está dada por (2.2.25). A temperaturas suficientemente altas, la energía del Universo está esencialmente dominada por la contribución de e^- , e^+ , ν y γ 's. Las interacciones entre estas partículas, las mantienen aproximadamente a la misma temperatura. De acuerdo a esto $g_b = 2$, $g_f = 2 + 2 + 2 \times 3 = 10$ y $g = \sum_b g^b + \frac{7}{8} \sum_f g^f = 43/4$. Con estos valores obtenemos,

$$\rho_q = \frac{\pi^2}{30} [g + 35,85(q-1)] T^4. \quad (3.9.4)$$

Podemos ahora calcular dt/dy ,

$$\frac{dt}{dy} = \frac{dt}{dT} \frac{dT}{dy} = -\frac{1}{\dot{T}} \frac{\Delta m}{y^2} \quad (3.9.5)$$

Dado que $\dot{T}/T = -\dot{R}/R$,

$$\dot{T} = -T \left(\frac{8\pi G}{3} \rho_q \right)^{1/2}, \quad (3.9.6)$$

y a primer orden en $(q-1)$ obtenemos

$$\frac{1}{\dot{T}} = -\frac{1}{T^3} \left(\frac{45}{4\pi^3 G g} \right)^{1/2} \left[1 - \frac{15}{g\pi^2} 35,85(q-1) \right]. \quad (3.9.7)$$

De esta manera vemos que

$$\frac{dt}{dy} = \frac{\tau}{a} b y [1 - c(q-1)], \quad (3.9.8)$$

donde hemos definido las constantes b y c mediante

$$b = \left(\frac{45}{4\pi^3 G g} \right)^{1/2} \frac{a}{\tau \Delta m^2}, \quad c = \frac{15}{g\pi^2} 35,85. \quad (3.9.9)$$

Los valores numéricos de estas constantes pueden hallarse teniendo en cuenta que: $a = 255$, $g = 43/4$, $\Delta m = 1,29\text{MeV}$, $\tau = 887 \pm 2\text{s}$ (véase la sección 9.5 del libro de Peacock [21]) y $G = m_{pl}^{-2}$. Estos resultan ser $b = 0,25$ y $c = 5,07$.

Con todo la anterior, el factor integrante (3.5.3) deviene,

$$I^q(y, y') = \exp (K^q(y) - K^q(y')), \quad (3.9.10)$$

con $K^q(y)$ dado por

$$K^q(y) = - \int d\hat{y} \left(\frac{d\hat{t}}{d\hat{y}} \right) \Lambda^q(\hat{y}), \quad (3.9.11)$$

o bien, utilizando (3.9.8),

$$K^q(y) = -\frac{\tau b}{a}(1 - c(q - 1)) \int d\hat{y} \hat{y} \Lambda^q(\hat{y}). \quad (3.9.12)$$

De esta manera vemos que los pasos necesarios para conocer la evolución de X^q con y son: hallar por integración la función $K^q(y)$ dada por (3.9.12), sustituir este resultado en la expresión (3.9.10) para $I^q(y, y')$, y finalmente resolver la integral involucrada en (3.9.1). La complejidad de las funciones en juego requiere que esta integral sea calculada en forma numérica para cada valor de y . Sin embargo, nuestro interés no estará centrado primariamente en dicha evolución, sino que pretendemos estudiar como se ve afectado el valor asintótico de $X^q(y \rightarrow \infty)$ (es decir, $X^q(T \rightarrow 0)$), como función del parámetro $(q - 1)$. La razón para esto, se encuentra fundada en la ecuación (3.4.18) donde queda claro que $X^q(\infty)$ es la cantidad relevante para hallar la abundancia de ${}^4\text{He}$ hoy, que es a la vez lo que puede contrastarse con las observaciones.

En la próxima sección discutiremos como hallar el valor asintótico de $X^q(\infty)$ como función de $(q - 1)$ en el caso en el que se supone válido el BST. Una vez que tengamos una idea de cómo difieren los resultados obtenidos en el contexto no-extensivo en el marco de esta aproximación con respecto a la standard, abordaremos el caso más complejo en el que la relación válida entre las tasas esté dada por (3.8.5), es decir en el BNE. Finalmente, un análisis conjunto de los resultados obtenidos nos permitirá testear que tan bueno resulta considerar el BST en el contexto no-extensivo.

3.10. Balance standard

La simplificación más inmediata proveniente de considerar el BST es que el cociente $\lambda^q(y)/\Lambda^q(y)$ coincide con su análogo standard $\lambda^{st}(y)/\Lambda^{st}(y)$. En efecto, por definición $\Lambda^q(y) = \lambda_{pn}^q(y) + \lambda_{np}^q(y)$, y dado que el BST establece que $\lambda_{pn}^q(y) = e^{-y} \lambda_{np}^q(y)$, obtenemos $\lambda^q(y)/\Lambda^q(y) = (1 + e^y)^{-1} = \lambda^{st}(y)/\Lambda^{st}$.

Podemos hallar $K^q(y)$ teniendo en cuenta que, utilizando (3.8.4) y (3.8.5), se tiene

$$\Lambda^q(y) = \frac{a}{\tau y^5} (1 + e^y) [12 + 6y + y^2] + (q - 1) [180 + 60y + 6y^2]. \quad (3.10.1)$$

Calculando la integral en (3.9.12) obtenemos

$$K^q(y) = b(1 - c(q - 1)) [K_1(y) + \frac{q - 1}{2} K_2(y)]. \quad (3.10.2)$$

con

$$K_1(y) = \left[\left(\frac{4}{y^3} + \frac{3}{y^2} + \frac{1}{y} \right) + \left(\frac{4}{y^3} + \frac{1}{y^2} \right) e^{-y} \right] \quad (3.10.3)$$

y

$$K_2(y) = \left[\left(\frac{30}{y^3} + \frac{15}{y^2} + \frac{3}{y} \right) + \left(\frac{30}{y^3} + \frac{3}{y} \right) e^{-y} - 3Ei(1, y) \right] \quad (3.10.4)$$

donde las funciones $Ei(1, y)$ son las funciones integro-exponenciales definidas por:

$$Ei(1, y) = \int_1^\infty \frac{e^{-yt}}{t} dt. \quad (3.10.5)$$

Reconocemos en la expresión (3.10.2) el término $K^{st}(y) = bK_1(y)$. La presencia del factor $b(1 - c(q - 1))$ en el jacobiano dt/dy hace que en $K_2(y)$ aparezca un término cuadrático en $(q - 1)$. Es importante notar que debido a que esta función diverge como y^{-3} en el origen, no es en principio obvio que podamos retener solamente el término lineal en $(q - 1)$ como sí lo hemos hecho en casos en donde las funciones que multiplicaban a $(q - 1)$ estaban acotadas o tenían un valor bien determinado; sobre este punto volveremos más tarde.

Por el motivo recién mencionado y en vistas del alto grado de no-linealidad involucrado en la ecuación (3.9.1), debido a la presencia de $I(y, y')$, nos alejaremos aquí del procedimiento de desarrollar resultados intermedios e intentaremos hallar la solución completa sin linealizar ninguna de las funciones que involucran el parámetro q a orden $(q - 1)$.

Habiendo mostrado que $\lambda^q(y)/\Lambda^q(y) = (1 + e^y)^{-1}$ podemos escribir a partir de (3.9.1) el valor asintótico que nos interesa, $X^q(\infty) \equiv \lim_{y \rightarrow \infty} X^q(y)$, como

$$X^q(\infty) = \lim_{y \rightarrow \infty} e^{K^q(y)} \int_0^y e^{-K^q(y')} \frac{e^{y'}}{(1 + e^{y'})^2} dy'. \quad (3.10.6)$$

La expresión anterior permite un análisis analítico notable. En base a la conducta divergente de la función K^q en el origen y gracias al buen comportamiento de la función

$$\frac{d}{dy'} \left(\frac{\lambda_{pm}^q(y')}{\Lambda^q(y')} \right) = \frac{e^{y'}}{(1 + e^{y'})^2}, \quad (3.10.7)$$

en un entorno del 0, es posible descartar *a priori* el rango de valores de $(q - 1)$ tales que la teoría estadística no-extensiva considerando el BST pierda sentido (i.e. los valores asintóticos predichos para X^q estén fuera del rango $[0, 1/2]$). En efecto, para que el integrando en (3.10.6) no tenga problemas en el origen, $K^q(y)$ debe ser positivo cuando $y \rightarrow 0$. A partir de las ecuaciones (3.10.2), (3.10.3) y (3.10.4), esta condición se traduce en forma inmediata sobre el valor de $(q - 1)$ pues

$$\lim_{y \rightarrow 0} K^q(y) \simeq \lim_{y \rightarrow 0} b(1 - c(q - 1)) \left[\frac{4}{y^3} + \frac{4}{y^3} e^{-y} + \frac{q - 1}{2} \left(\frac{30}{y^3} + \frac{30}{y} e^{-y} \right) \right], \quad (3.10.8)$$

es decir

$$\lim_{y \rightarrow 0} K^q(y) \simeq b(1 - c(q - 1)) \left[\frac{8}{y^3} + (q - 1) \frac{30}{y^3} \right]. \quad (3.10.9)$$

Es inmediato ver que para que resulte $K^q(y) > 0$, $(q - 1)$ debe hallarse en el rango $-8/30 \lesssim (q - 1) \lesssim 1/c$. Recordando que $c = 5,07$ vemos que los valores de $(q - 1)$ que no cumplan la condición

$$-0,27 \lesssim (q - 1) \lesssim 0,2 \quad (3.10.10)$$

deben ser automáticamente descartados sin necesidad de comparación alguna con el experimento. Mencionemos además que sin importar el signo de K^q , el factor $e^{K^q(y)}$ que multiplica a la integral en (3.10.6) tiende a 1 cuando $y \rightarrow \infty$.

En la Fig.(3.3) se muestra el comportamiento del integrando de la ecuación (3.10.6) para distintos valores de $(q - 1)$. Es de notar el cambio abrupto que presentan las gráficas para valores de $(q - 1)$ cerca de los extremos del rango dado por (3.10.10). La deducción analítica que hemos hecho acerca del rango de validez del parámetro $(q - 1)$ se ve reforzada por los gráficos de la Fig.(3.3) y queda completamente confirmado cuando se realizan los cálculos numéricamente. Estos muestran que la integral (3.10.6) crece sin límite para valores de $(q - 1)$ fuera del rango dado por (3.10.10).

Con este análisis hemos visto que existe un rango de valores de $(q - 1)$ tales que el valor asintótico $X^q(\infty)$ tiene sentido físico. Cabe preguntarse entonces si existe un conjunto de valores de $(q - 1) \in [-0,27, 0,2]$ tales que $X^q(\infty)$ obtenido a partir de un desarrollo a primer orden en $(q - 1)$ sea consistente con el cálculo completo. Esto será así si podemos comprobar que en un entorno de $(q - 1) = 0$ los valores obtenidos a partir de los desarrollos a primer orden no difieren demasiado del resultado verdadero $X^q(\infty)$ como función de $(q - 1)$ que ya hemos hallado.

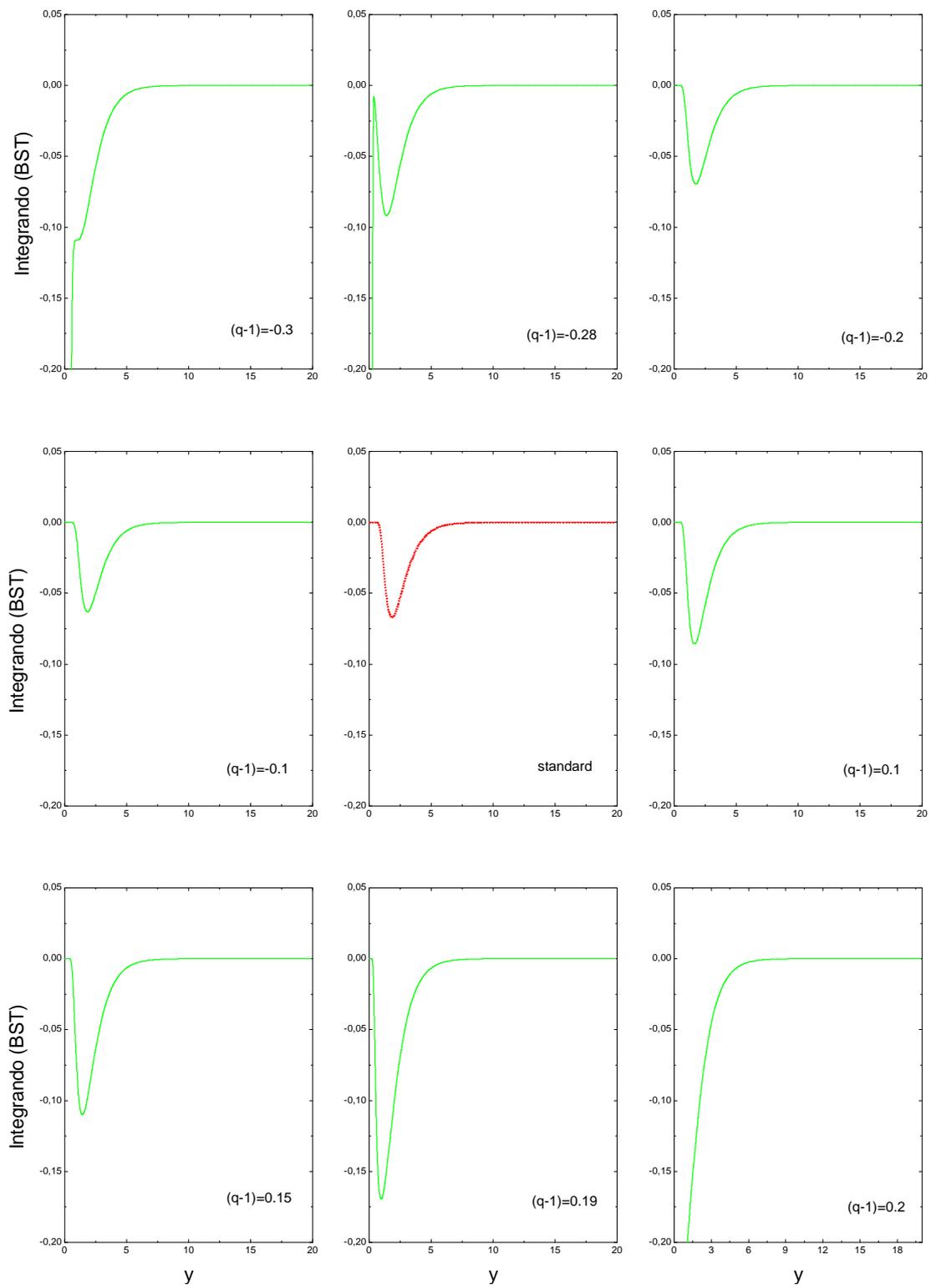


Figura 3.3: Comportamiento del integrando involucrado en el cálculo de $X^q(\infty)$ para distintos valores de $(q - 1)$ (BST).

3.10.1. Cálculo a primer orden

Para calcular $X^q(\infty)$ a primer orden en $(q-1)$, necesitamos escribir una versión de la ecuación (3.10.6) en donde sólo se retengan los términos dominantes en $(q-1)$. A tal fin, debemos hacer básicamente dos cosas: despreciar los términos cuadráticos en $(q-1)$ en la expresión para $K^q(y)$ dada por (3.10.2) y desarrollar las exponenciales en (3.10.6). El primer paso es sencillo y obtenemos

$$K^q(y) = K^{st}(y) + (q-1)K^c(y), \quad (3.10.11)$$

con

$$K^{st}(y) = b \left[\left(\frac{4}{y^3} + \frac{3}{y^2} + \frac{1}{y} \right) + \left(\frac{4}{y^3} + \frac{1}{y^2} \right) e^{-y} \right], \quad (3.10.12)$$

y

$$K^c(y) = \frac{b}{2} \left[\left(\frac{30}{y^3} + \frac{15}{y^2} + \frac{3}{y} \right) + \left(\frac{30}{y^3} + \frac{3}{y} \right) e^{-y} - 3Ei(1, y) \right] - cK^{st}. \quad (3.10.13)$$

Para el segundo paso, basta escribir e^{K^q} a primer orden en $(q-1)$,

$$e^{K^q} = e^{K^{st}} e^{(q-1)K^c} \simeq e^{K^{st}} [1 + (q-1)K^c]. \quad (3.10.14)$$

Sustituyendo este desarrollo en (3.10.6) y reteniendo solo el término lineal en $(q-1)$, obtenemos

$$X^q(\infty) = X^{st}(\infty) + (q-1)X^c(\infty), \quad (3.10.15)$$

con

$$X^{st}(\infty) = \lim_{y \rightarrow \infty} e^{K^{st}(y)} \int_0^y e^{-K^{st}(y')} \frac{e^{y'}}{(1+e^{y'})^2} dy' \quad (3.10.16)$$

y

$$X^c(\infty) = \lim_{y \rightarrow \infty} e^{K^{st}(y)} \int_0^y e^{-K^{st}(y')} [K^c(y) - K^c(y')] \frac{e^{y'}}{(1+e^{y'})^2} dy' \quad (3.10.17)$$

Estas integrales pueden calcularse en forma numérica y el resultado es,

$$X^q(\infty) = 0,15 + (q-1)0,18 \quad (3.10.18)$$

donde el valor $X^{st}(\infty) = 0,15$ es el que se obtiene en la teoría standard. En la Fig.(3.4) se muestra la dependencia lineal de $X^q(\infty)$ con $(q-1)$ provista por la ecuación (3.10.18) superpuesta con la solución numérica completa de la ecuación (3.10.6). Vemos de esta manera, que en efecto, ambas soluciones coinciden para valores de $(q-1)$ cercanos a 0, esto es, para pequeñas desviaciones de la situación standard. Una ecuación análoga a (3.10.18) fue presentada por Torres y Vucetich en [20], en el marco de la aproximación asintótica. Lo que hemos mostrado aquí es lo que sustenta aquella aproximación y dado el rango de su validez.

3.11. Balance con correcciones no-extensivas

En esta sección resolveremos la ecuación (3.9.1) sin ningún tipo de aproximación, esto es tomaremos para λ_{pn}^q y λ_{np}^q las expresiones dadas por (3.8.4) y (3.8.5) respectivamente. Nuestro objetivo será cuantificar la desviación que se produce entre los resultados obtenidos con el BST y aquellos que surgen del análisis completo, es decir considerando el BNE.

Por definición, $\Lambda^q(y) = \lambda_{pn}^q(y) + \lambda_{np}^q(y)$, sumando las ecuaciones (3.8.4) y (3.8.5) vemos que $\Lambda^q(y)$ queda separado naturalmente en un término standard y un término correctivo,

$$\Lambda^{st}(y) = \frac{a}{\tau y^5} (12 + 6y + y^2) [1 + e^{-y}], \quad (3.11.1)$$

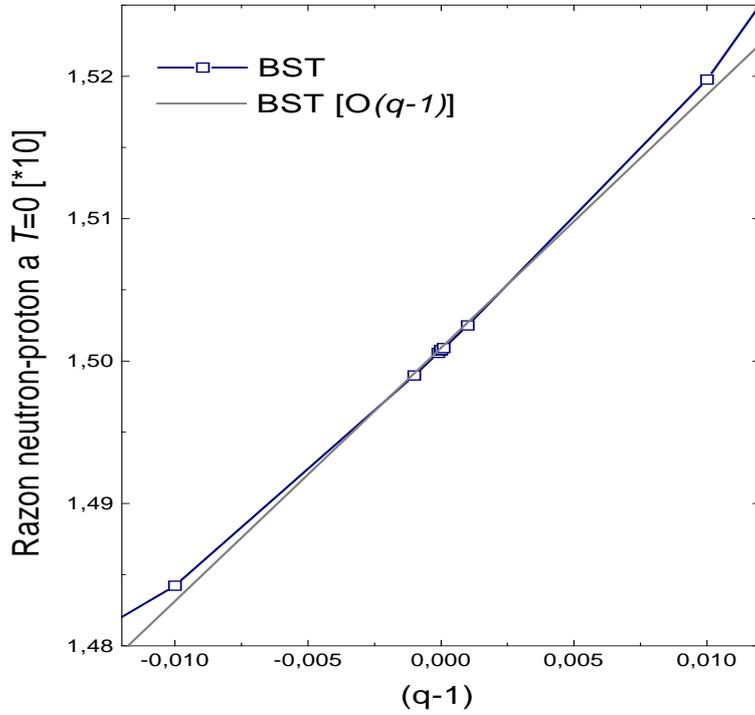


Figura 3.4: Comparación entre $X^q(\infty)$ como función de $(q - 1)$ en los casos en que se considera la aproximación a primer orden y la solución numérica completa. Ambos obtenidos en el marco del BST.

$$\Lambda^c(y) = \frac{1}{2} \frac{a}{\tau y^5} [90 [1 + e^{-y}] + 30y [1 + 5e^{-y}] + y^2 [1 + 21e^{-y}] + 12y^3 + y^4]. \quad (3.11.2)$$

Debido a la linealidad del operador integral, lo mismo sucede para $K^q(y)$ en (3.9.12). Utilizando las expresiones halladas para $\Lambda^{st}(y)$ y $\Lambda^c(y)$ y llevando a cabo las integrales correspondientes obtenemos,

$$K^q(y) = b(1 - c(q - 1))[\hat{K}_1(y) + \frac{q-1}{2}\hat{K}_2(y)]. \quad (3.11.3)$$

con

$$\hat{K}_1(y) = \left[\left(\frac{4}{y^3} + \frac{3}{y^2} + \frac{1}{y} \right) + \left(\frac{4}{y^3} + \frac{1}{y^2} \right) e^{-y} \right] \quad (3.11.4)$$

y

$$\hat{K}_2(y) = \left[\left(\frac{30}{y^3} + \frac{15}{y^2} + \frac{3}{y} \right) + \left(\frac{30}{y^3} + \frac{60}{y^2} + \frac{3}{y} \right) e^{-y} - y - 12 \ln y - 3Ei(1, y) \right] \quad (3.11.5)$$

donde las funciones $Ei(1, y)$ son nuevamente las funciones integro-exponenciales definidas en (3.10.5). Como antes, reconocemos en la expresión (3.11.3) el término standard, $K^{st}(y) = b\hat{K}_1(y)$.

Al igual que cuando se considera el BST, en el marco del BNE también sucede que

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{pn}^q(y)}{\Lambda^q(y)} = 0. \quad (3.11.6)$$

En efecto, dado que en el BNE en el límite $y \rightarrow \infty$ es $\lambda_{pn}^q(y) \propto y^{-3}$ y $\lambda_{np}^q(y) \propto y^{-1}e^{-y}$, se tiene

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{pn}^q(y)}{\Lambda^q(y)} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \lambda_{pn}^q(y)/\Lambda^q(y)} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + e^y} = 0. \quad (3.11.7)$$

De esta manera el análogo de la ecuación (3.10.6) es

$$X^q(\infty) = - \lim_{y \rightarrow \infty} e^{K^q(y)} \int_0^y e^{-K^q(y')} \frac{d}{dy'} \left(\frac{\lambda_{np}^q(y)}{\lambda_{pn}^q(y)} \right) dy'. \quad (3.11.8)$$

Es importante notar que debido a que esta función diverge como (y^{-3}) en el origen y como $(-y)$ en el infinito un análisis similar al que hicimos cuando tratamos el caso del BST nos muestra que, a diferencia de lo que sucedía en aquel, cuando consideramos el BNE los desarrollos a primer orden no tendrán éxito. Esto es así debido a que cuando uno de estos dos términos dominantes tenga el signo adecuado para que la integral en (3.11.8) converja en el origen, el otro será el responsable de que la integral diverja en el infinito y viceversa.

Desafortunadamente, la compleja dependencia del integrando de (3.9.1) en $(q - 1)$ hace mucho más difícil un análisis analítico *a priori* como el que hicimos en el caso del BST para determinar el rango de valores del parámetro $(q - 1)$ para los cuales la teoría estadística resulta siquiera viable. De todas maneras es aún posible un estudio detallado del comportamiento de la derivada de la función $\lambda_{pn}^q(y)/\Lambda^q(y)$ y del integrando de (3.9.1) para distintos valores de $(q - 1)$. Esto es lo que hemos hecho en las figuras Fig.(3.5) y Fig.(3.6)

Del análisis de estas figuras vemos que el hecho de considerar el BST en vez de el BNE se traduce en una diferencia fundamental en la dependencia funcional de los integrandos en juego en $X^q(\infty)$. Cuando el BNE es considerado, y debido al comportamiento de la derivada de la función $\lambda_{pn}^q(y)/\Lambda^q(y)$ para valores negativos de $(q - 1)$, ya no está garantizado que el integrando de (3.9.1) sea siempre negativo. Para valores de $(q - 1) < -0,1$ la integral de (3.9.1) es positiva (i.e. $X^q(\infty) < 0$). Con esto quedan descartados los valores de $(q - 1) < -0,1$. Por otro lado, analizando los gráficos de la Fig.(3.5) para valores positivos de $(q - 1)$ vemos que la derivada de $\lambda_{pn}^q(y)/\Lambda^q(y)$ no cambia demasiado respecto del comportamiento standard. Debido a que los problemas de convergencia se encuentran en el origen y dado que $K^q(y)$ tiene esencialmente el mismo comportamiento (i.e. $K^q(y) \simeq y^{-3}$) que en el BST, es de esperar que los argumentos que dimos en la sección anterior para imponer el límite superior al rango de valores de $(q - 1)$ aceptables; sean aún válidos. Efectivamente esto sucede, como se comprueba del análisis de los gráficos de la Fig.(3.6) para valores de $(q - 1) > 0$. Allí vemos que no sólo existe una cota superior para $(q - 1)$ sino que además esta se encuentra entre 0.19 y 0.2 al igual que en el BST.

De esta manera, cuando consideramos el BNE, los valores de $(q - 1)$ para los cuales la teoría estadística tiene sentido físico quedan acotados en el rango

$$-0,1 \lesssim (q - 1) \lesssim 0,2. \quad (3.11.9)$$

Vemos así que el hecho de considerar el BNE impone un rango más estricto que el BST. Para valores de $(q - 1)$ fuera del intervalo dado por (3.11.9) el sentido físico de la descripción se pierde.

3.12. Discusión y conclusiones

Comparemos entonces los resultados obtenidos en las secciones 3.10 y 3.11. Para esto observemos la figura Fig.(3.7), donde se muestra $X^q(\infty)$ para distintos valores de $(q - 1)$ tanto en el BST como en el BNE. Como claramente se nota a partir del gráfico, las diferencias son notables, y crecen cuando $|q - 1|$ tiende a sus valores límites. La tabla (3.1) da los valores explícitos de $X^q(\infty)$ obtenidos según la integración numérica para el BST, el BNE y la analítica a primer orden en $(q - 1)$ en el marco del BST. Como puede verse, para valores de $(q - 1)$ cercanos a 0 el cálculo para el BST está perfectamente descrito por la aproximación lineal.

La desviación del caso standard es, para el BNE, mayor que la que provee el BST, para un mismo valor de $(q - 1)$. Esto puede verse directamente de la figura Fig.(3.7) o analíticamente de la tabla (3.2) donde hemos escrito los coeficientes del ajuste lineal de $X^q(\infty)$ cerca de 0 tanto en el BST como en el BNE. Por completitud también se muestra el resultado obtenido en el BST a primer orden en $(q - 1)$, el cual como ya hemos mencionado coincide con el ajuste lineal de la curva obtenida para $X^q(\infty)$ para valores de $(q - 1)$ pequeños.

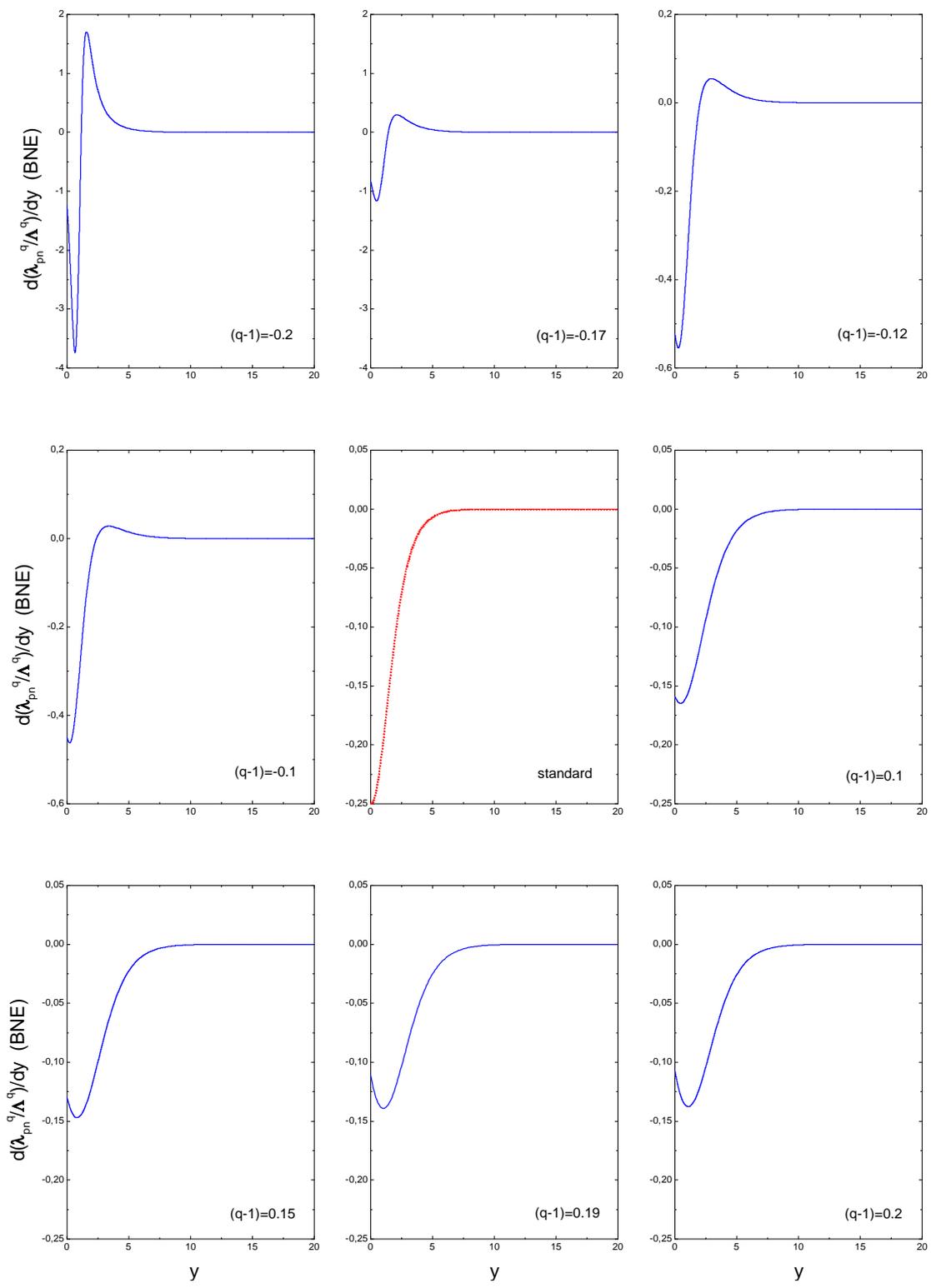


Figura 3.5: Comportamiento de la derivada de la función $\lambda_{pn}^q(y)/\Lambda^q(y)$ para distintos valores de $(q-1)$.

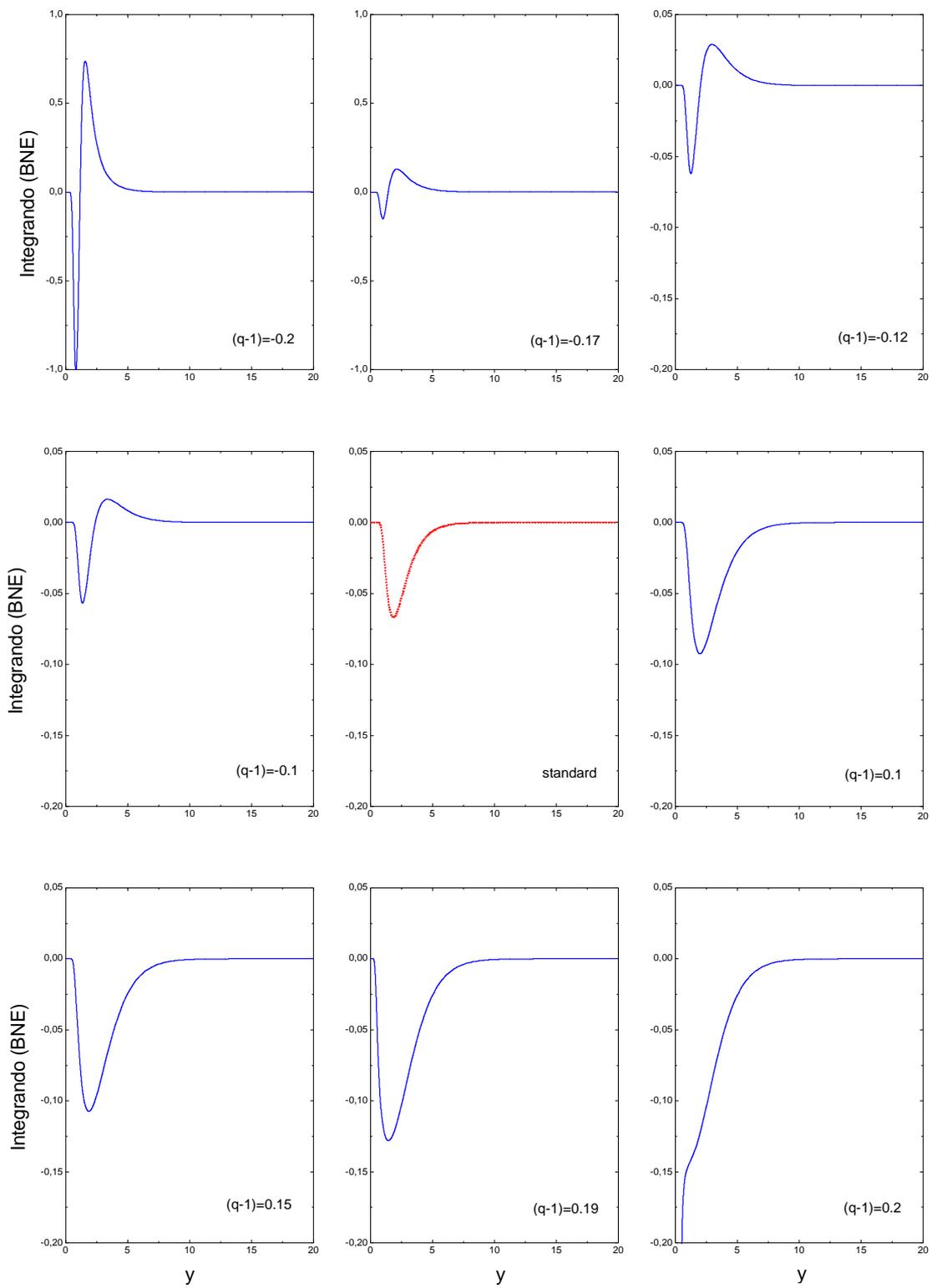


Figura 3.6: Comportamiento del integrando involucrado en el cálculo de $X^q(\infty)$ para distintos valores de $(q - 1)$ (BNE).

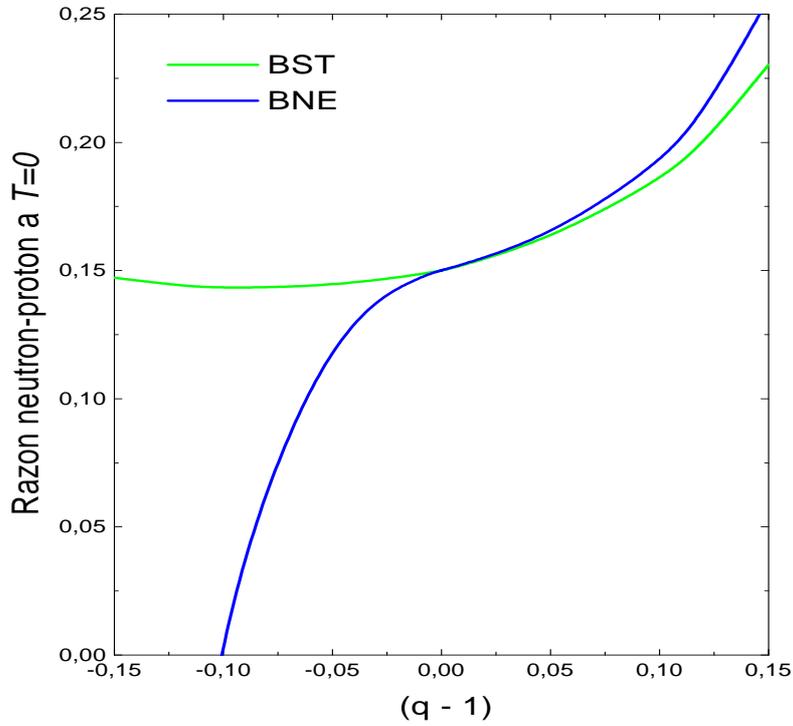


Figura 3.7: $X^q(\infty)$ como función de $(q - 1)$ en los casos BST y BNE.

$(q - 1)$	X^q (BST)	X^q (BST) ($\mathcal{O}(q - 1)$)	X^q (BNE)
-0.150	0.1472	0.1230	-0.6571
-0.120	0.1441	0.1284	-0.1061
-0.100	0.1431	0.1320	0.0261
-0.050	0.1440	0.1410	0.1299
-0.010	0.1484	0.1482	0.1476
-0.001	0.1499	0.1498	0.1498
0.0	0.1500	0.1500	0.1500
0.001	0.1502	0.1502	0.1503
0.010	0.1520	0.1518	0.1523
0.050	0.1625	0.1590	0.1635
0.100	0.1851	0.1680	0.1915
0.120	0.1991	0.1716	0.2109
0.150	0.2303	0.1770	0.2561

Cuadro 3.1: Comparación de los valores de $X^q(\infty)$ como función de $(q - 1)$ cuando se consideran los distintos balances (BST y BNE).

Caso	X^{st}	X^c
BST	0.15	0.18
BST $\mathcal{O}(q - 1)$	0.15	0.18
BNE	0.15	0.23

Cuadro 3.2: Coeficientes del ajuste lineal de $X^q(\infty)$ cerca de 0 para el BNE y BST y comparación con el cálculo a primer orden (BST $\mathcal{O}(q - 1)$).

Hasta ahora hemos discutido la viabilidad física de la descripción estadística. Hemos establecido (tanto en el BST como en el BNE) el rango de valores de $(q - 1)$ físicamente inviables, esto es aquellos para los cuales $X^q(\infty)$ es < 0 o bien $> 0,5$, aún antes de contrastar los resultados obtenidos con el experimento. Recordemos que $X(\infty)$ es la razón neutrón-barión por lo que claramente un valor negativo de $X(\infty)$ carece de sentido. Asimismo un valor de $X(\infty)$ mayor que 0.5 está en conflicto con la dependencia de las tasas de reacción con la temperatura, siendo que $X = 0,5$ es la condición inicial para la ecuación cinética (3.5.1), cuando $T \rightarrow \infty$ (es decir, $y \rightarrow 0$).

Dentro del rango de viabilidad física nos resta aún acotar, mediante la comparación con las observaciones, el valor de $(q - 1)$.

Para obtener una cota directa sobre $(q - 1)$ a partir de la abundancia de ${}^4\text{He}$ es necesario hacer un estudio en detalle del proceso de decaimiento de neutrones entre el momento en el que ocurre el congelamiento ($t \simeq 1$ segundo) y el momento en que tiene lugar la nucleosíntesis ($t \simeq 3$ minutos).

Al incluir los efectos del decaimiento del neutrón en la ecuación para $X^q(t)$ se tiene

$$X^q(t) = \exp(-t/\tau)\bar{X}^q(t), \quad (3.12.1)$$

donde \bar{X}^q es la razón neutrón-barión ya obtenida y τ es la vida media del neutrón.

En el momento de captura $t = t_c$, cuando la temperatura cae por debajo de la energía de ligadura del D (2.23 MeV), los neutrones son capturados en deuterones. Luego, éstos colisionan y prácticamente todos los neutrones presentes en $t = t_c$ son convertidos en ${}^4\text{He}$.

Sustituyendo el valor para t_c en la ecuación (3.12.1) y utilizando el valor asintótico $\bar{X}^q(\infty)$ hallado en la sección anterior, obtendremos la mitad de la fracción de masa de helio producido en el Universo primitivo. Para hallar un valor preciso de t_c , debemos analizar las reacciones dadas por las ecuaciones (3.4.15), (3.4.16) y (3.4.17). Esto sin embargo, supera los objetivos del presente trabajo⁴, y por el momento nos contentaremos con el valor de t_c obtenido para el caso standard (para un cálculo detallado de t_c , véase la Ref.[25]) $\exp(t_c/\tau) \simeq 0,8$. Utilizando este valor obtenemos,

$$Y_p^q \equiv 2X_4^q \simeq e^{-t_c/\tau}2X^q(\infty) \quad (3.12.2)$$

$$= 0,8 \times 2[0,15 + (q - 1)0,23] \quad (3.12.3)$$

$$= 0,24 + (q - 1)0,37. \quad (3.12.4)$$

Es notable el acuerdo entre el cálculo analítico standard y el valor medio de las observaciones. Como dijimos, no hay aún un consenso absoluto sobre la abundancia observacional de ${}^4\text{He}$ las dos compilaciones más grandes sobre estas abundancias arrojan [36],

$$Y_p = 0,244 \pm 0,004 \quad \text{y} \quad Y_p = 0,234 \pm 0,004, \quad (3.12.5)$$

que son sólo marginalmente consistentes.

A los efectos de considerar un caso típico, promediamos los valores medios y duplicamos el valor del error,

$$Y_p^{obs} = 0,239 \pm 0,008. \quad (3.12.6)$$

Si al mismo tiempo despreciamos la diferencia entre el valor observacional y el valor teórico en el caso standard ⁵(que es 0.001) podemos obtener una cota para $(q - 1)$ a partir de la ecuación (3.12.4) exigiendo que $|q - 1|0,37 < 0,008$, esto otorga,

$$|q - 1| < 0,021. \quad (3.12.7)$$

⁴Nótese sin embargo que las herramientas para obtener t_c en el marco estadístico no extensivo fueron deducidas en el Capítulo 2

⁵Esto es a los efectos de obtener una primera cota, ya que un estudio más detallado podría señalar un valor de $(q - 1)$ que, teniendo en cuenta su error, no incluya al cero. Sin embargo, para esto es necesario un análisis numérico.

Vemos entonces que, basándonos en las predicción de la abundancia de ${}^4\text{He}$ primordial, son permitidos apartamientos de $(q - 1)$ respecto de 0 de orden 10^{-2} sin que la teoría entren en conflicto con las observaciones dentro de los errores experimentales actuales.

Finalmente, mencionamos de paso que aún sin calcular en detalle las reacciones que involucran al D, es posible mejorar este cálculo si consideramos que es la temperatura de captura, T_c , (en lugar del tiempo t_c) la que es igual que en el caso standard.

Epílogo

En esta Tesis de Licenciatura se ha estudiado cómo la descripción estadística que se supone válida afecta diferentes eventos cosmológicos a lo largo de la evolución térmica del Universo. En particular, hemos visto que se modifican la densidad de energía y la de partículas, los números conservados y hasta las propias relaciones entre tiempo y temperatura. Esto conlleva variaciones en los procesos de desacoplamiento y de recombinación, así como también en la relación entre la temperatura de los fotones y la de los neutrinos. Muchos de estos procesos tienen implicancias observables, y entonces pueden imponerse cotas o rangos de validez sobre las descripciones estadísticas.

Una de las etapas más importantes de la evolución del Universo es el periodo de nucleosíntesis. La nucleosíntesis primordial otorga el test más temprano al cual puede ser sometida cualquier teoría física. Este es también el caso para la descripción estadística, i.e. correcciones a las funciones de distribución standard. En este trabajo se ha estudiado también, la formación primordial de ${}^4\text{He}$ en forma analítica en un contexto levemente no extensivo. Hemos analizado varios tipos del Principio de Balance Detallado Nuclear y se han impuesto cotas estudiando el rango de validez físico (es decir, cotas que surgen *a priori* sin ninguna necesidad de contrastar los resultados obtenidos con las observaciones) y comparado las predicciones con las medidas más recientes.

Esperamos que esta Tesis de Licenciatura sirva como base para estudios posteriores del tema, en particular cómo se ve afectado el proceso de captura electrónica, el desacoplamiento radiación materia y una extensión analítica del proceso de nucleosíntesis que incluya la formación de deuterio.

Apéndice I

Recordamos aquí los factores de conversión, y los valores de algunas de las constantes fundamentales.

Factores de conversión

$$1 \text{ eV} = 1.6022 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$1 \text{ GeV} = 1,1605 \times 10^{13} \text{ K}$$

$$1 \text{ GeV}^{-1} = 1,9733 \times 10^{-14} \text{ cm} = 6,5822 \times 10^{-25} \text{ s}$$

$$1 \text{ J} = 1 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2}$$

$$1 \text{ erg} = 10^{-7} \text{ J}$$

Constantes Fundamentales y masas de partículas fundamentales

$$G = 6,67 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

$$m_{\text{pl}} = 1,22 \times 10^{19} \text{ GeV}$$

$$c = 2,998 \times 10^{10} \text{ cm s}^{-1}$$

$$\hbar = 1,05 \times 10^{-32} \text{ J s}$$

$$m_e = 0.511 \text{ MeV}$$

$$m_p = 938.3 \text{ MeV}$$

$$m_n = 939.6 \text{ MeV}$$

Magnitudes astrofísicas y cosmológicas

$$H_0^{-1} = 3000h^{-1} \text{ Mpc} = 9,78h^{-1} \times 10^9 \text{ yr}$$

$$\rho_c = 1,88h^2 \times 10^{-29} \text{ g cm}^{-3} = 1,05h^2 \times 10^4 \text{ eV cm}^{-3}$$

Bibliografía

- [1] C. Tsallis, cond-mat/9903356
- [2] C. Tsallis, Fractals 6 539 (1995)
- [3] C. Tsallis, Physica **A221**, 227 (1995)
- [4] C. Tsallis, J. Stat. Phys. **52**, 479 (1988)
- [5] R.J.V. Santos & J. Math. Phys. **38**, 4104 (1997)
- [6] E.M.F. Curado & C.Tsallis J. Phys. **A24**, (1991) L69; Corrigenda: 24 (1991) 3187 & 25 (1992) 1019.
- [7] A. Plastino, C. Tsallis & R.S. Mendes, Physica **A261**, 534 (1998)
- [8] A. Plastino & A.R. Plastino, Phys. Lett **A226** (1997) 257
- [9] U. Tirnaklı & D. F. Torres, Eur. Phys. J. **B14**, 691 (2000), cond-mat/9904097; D. F. Torres & U. Tirnaklı, Physica A261, 499, (1998), cond-mat/9904098
- [10] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu & F. Laloë, *Quantum Mechanics, Vol. 2*, 2th edition (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1977).
- [11] F. Büyükkılıç, D. Demirhan & A. Güleç, Phys. Lett **A197** 209 (1995).
- [12] U. Tirnaklı, F. Büyükkılıç, D. Demirhan, Physica **A240**, 657 (1997).
- [13] M. E. Pessah, D. F. Torres, & H. Vucetich, Physica **A297**, 164 (2001); gr-qc/0105017
- [14] K. Huang, *Statistical Mechanics* (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1963)
- [15] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics, 2nd edition* (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1975)
- [16] L. D. Landau & E. M. Lifchitz, *The classical theory of fields, 4th edition* (Pergamon, Oxford, UK, 1975).
- [17] E.Kolb & M. Turner, *The Early Universe*, (Addison Wesley, New York, 1990)
- [18] I.S. Gradshteyn & I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series & Products, 2nd edition* (Academic Press, USA, 1981)
- [19] T. Padmanabhan, *Structure formation in the universe* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995)
- [20] D. F. Torres & H. Vucetich, Physica **A259**, 397 (1998), astro-ph/9807043; D. F. Torres, Physica **A261**, 512 (1998), astro-ph/9809035; ibid, Phys.Lett. **B359**, 249 (1995)

- [21] J. Peacock, *Cosmological Physics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1999)
- [22] M. E. Pessah & D. F. Torres, *Physica* **A297**, 201 (2001); gr-qc/0105018
- [23] U. Tirnaklı & D. F. Torres, *Physica* **A268**, 225 (1999); cond-mat/9904099
- [24] D. F. Torres, H. Vucetich, & A. Plastino, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 1588 (1997); astro-ph/9705068
- [25] J. Bernstein, L. S. Brown & G. Feimberg, *Rev. Mod. Phys.* **61**, 25 (1989)
- [26] P. Peebles, *Principles of Physical Cosmology* (Princeton University Press, Princeton, 1993)
- [27] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, (Addison Wesley, New York, 1972)
- [28] P. Coles & F. Lucchin, *Cosmology*, (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1995)
- [29] C. J. Copi, D. N. Schramm & M. S. Turner, *Astrophys. J.* **455**, L95 (1995).
- [30] C. J. Copi, D. N. Schramm & M. S. Turner, *Science* **267**, 192 (1995).
- [31] W. Freedman, en *Proceedings of the 18th Texas Symposium on Relativistic Astrophysics and Cosmology*, A. Olinto et al. Eds. (World Scientific, Singapore, 1997).
- [32] J. A. Willick, M. A. Strauss, A. Dekel & T. Kolatt, *Astrophys. J.* **436**, 627 (1997).
- [33] G. Steigman, D. N. Schramm & J. E. Gunn, *Phys. Lett.* **B66**, 202 (1977).
- [34] D. Tyler et al. *Physica Scripta* **T85**, 12 (2000) astro-ph 0001318
- [35] A. H. Jeffe et al., astro-ph/0007333
- [36] S. Beuler, K. M. Nollett & M. S. Turner astro-ph 0008495
- [37] V. H. Hamity & D. E. Barraco, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 25 (1996).