GILVAN AUGUSTO ALVES

FÓTONS NÃO LINEARES:
UMA SOLUÇÃO COSMOLÓGICA NÃO SINGULAR

TESE de

MESTRADO

CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS

Rio de Janeiro, 1986

- À minha irmã Tereza
por todo o seu apoio e compreensão

AGRADECIMENTOS

. A José Martins Salim pela orientação e pela alegria que me transmitiu com seu constante bom humor.

. A Mario Novello pela sugestão do tema e por valiosas discussões.

. A Antonio Teixeira pela sua constante boa vontade nas discussões e ajuda em alguns cálculos.

. Aos Professores do CBPF que ajudaram a minha formação, em particular a Ivano Damião Soares pelas suas críticas construtivas.

. A meus pais, Norberto e Nilze, por tudo que sou.

. A meus avós, Almiro e Nair, por sua alegria de viver.

. A meus tios, Osmar e Neide pelo carinho e incentivo.

. Aos amigos do CBPF, Maurício, Renato Pires, Renato Portugal, Nelson, Sasse, João Torres, Henrique, Bartolomeu, Claudia, Léa, Tião, Ricardo, Colato, Gerson, Soares, Washington, Hilário, Heloisa, João Batista, Ligia, Luiz Alberto, Tadeu, Armando, Chaba, André, Ademir, Mario Assad e outros, com quem convivi esses anos.

. Ao pessoal do CBPF, Myriam, Vera, Fátima, Socorro, Valéria, Baiano, Elias, Zé Gordo, Sérgio e outros, pela agradável companhia.

. À Helena, pela excelente tradução e datilografia.

. Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico-CNPq, pela bolsa concedida.

RESUMO

Neste trabalho questionamos a validade do princípio de equivalência como princípio de acoplamento mínimo entre campos em interação. Analisamos então o acoplamento não-mínimo entre um campo vetorial e o campo gravitacional, e algumas consequências deste acoplamento.

Partindo de uma métrica esfericamente simétrica, resolvemos as equações para os campos acoplados, obtendo soluções exatas e interpretando estas soluções.

SUMÁRIO

Pág.

AGRADECIMENTOS iii
RESUMO iv
LISTA DE FIGURAS vi
CONVENÇÕES E NOTAÇÕES vii

INTRODUÇÃO 1

CAPÍTULO I - PRINCÍPIO DE EQUIVALÊNCIA E OBSERVÁVEIS 4

CAPÍTULO II - PRINCÍPIO VARIACIONAL E A DETERMINAÇÃO DA GEOMETRIA 10

CAPÍTULO III - SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DE CAMPO 21

CONCLUSÃO 60

APÊNDICE A - TRIESFERA 61

APÊNDICE B - FLUIDOS RELATIVÍSTICOS 67

APÊNDICE C - CAMPO DE PROCA EM ESPAÇOS CURVOS 75

BIBLIOGRAFIA 79

LISTA DE FIGURAS

FIG. Pág.

1.1 - Construção de um sistema normal de Fermi 6

3.1 - Gráficos para a função u(t) 34

3.2 - Gráfico da função a(t) para o caso $u_0 = 0$, $u_2 = 0$ 35

3.3 - Gráfico da função a(t) para o caso $u_0 > 0$ e $(u_1)^2 < 4u_0u_2$..... 36

A.1 - Coordenadas intrínsecas e extrínsecas da triesfera 62

A.2 - Coordenadas x, y, z da triesfera 63

C.1 - Gráfico da densidade como função do tempo 78

CONVENÇÕES E NOTAÇÕES

Assinatura da métrica: $(+,-,-,-)$

Sistema de unidades naturais: $c = G = 1$, $k = 8\pi$

Sistema de unidades racionais de carga: $F^{\mu\nu}{}_{\|\nu} = J^{\mu}$

$F_{\mu\nu} \equiv A_{\mu|\nu} - A_{\nu|\mu}$ tensor do campo eletromagnético

A_{μ} —— quadrivetor potencial do campo eletromagnético

$R^{\alpha}{}_{\eta\beta\gamma} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\eta|\gamma} - \Gamma^{\alpha}_{\eta\gamma|\beta} + \Gamma^{\alpha}_{\tau\gamma}\Gamma^{\tau}_{\beta\eta} - \Gamma^{\alpha}_{\tau\beta}\Gamma^{\tau}_{\gamma\eta}$ - tensor de Riemann

$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu}$ = tensor de Ricci

$R = R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$ = escalar de curvatura

$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$ = tensor de Einstein

$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta L_{mat}}{\delta g^{\mu\nu}}$ = tensor momento-energia da matéria

L_{mat} = densidade Lagrangeana da matéria

$\Phi_{|\nu} \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial x^{\nu}}$ - derivação parcial

$$\left.\begin{aligned} V^{\mu}{}_{\|\lambda} &= V^{\mu}{}_{|\lambda} + \{{}_{\lambda}{}^{\mu}{}_{\kappa}\} V^{\kappa} \\ V_{\mu\|\lambda} &= V_{\mu|\lambda} - \{{}_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\lambda}\} V_{\kappa} \end{aligned}\right\}$$ Derivação covariante no espaço de Riemann

$$\left.\begin{aligned} V^{\mu}{}_{;\nu} &= V^{\mu}{}_{|\nu} + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} V^{\lambda} \\ V_{\mu;\nu} &= V_{\mu|\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} V_{\lambda} \end{aligned}\right\}$$ Derivação covariante num espaço afim

$g_{\mu\nu}$ - tensor métrico do espaço-tempo

$g^{\mu\nu}$ - tensor métrico inverso

$V^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{ds}$ - quadrivelocidade de um observador movendo-se numa curva com parâmetro s.

$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - V_\mu V_\nu$ - Tensor de projeção no tri-espaço ortogonal a V_μ .

$^*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\, \eta^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$ - tensor dual

$\eta_{\alpha\beta\mu\nu} = \sqrt{-g}\ \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$

onde

g = determinante do tensor métrico

$\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$ = símbolo de Levi-Civita

Índices gregos são índices do espaço-tempo (α,μ,etc = 0,1,2,3)

Índices latinos são índices espaciais (i,j,etc = 1,2,3)

$E^\mu{}_\nu = \frac{1}{4\pi}\, [F^\mu{}_\alpha F^\alpha{}_\nu + \frac{1}{4}\, \delta^\mu{}_\nu F^\alpha{}_\beta F_\alpha{}^\beta]$ = Tensor momento-energia do campo eletromagnético.

À você, pessoa desconhecida, na certeza que um dia nossas linhas de universo se encontrarão e nesse evento uma nova força surgirá, que irá violar todos os princípios conhecidos, derrubando de vez toda a causalidade e casualidade.

INTRODUÇÃO

Em 1907, apenas dois anos após completar a sua Teoria da Relatividade Especial, Einstein estava convencido que a chave para a extensão do princípio da relatividade para movimentos acelerados estava na inexplicada coincidência empírica entre a massa inercial e a gravitacional. Para explicar esta coincidência, ele introduziu um novo princípio físico, o chamado "Princípio de Equivalência". Baseado neste princípio, Einstein previu a deflexão da luz pelo campo gravitacional e iniciou sua busca por uma teoria geral da relatividade. Com o término desta teoria, Einstein insistiu na importância fundamental deste princípio para a sua Teoria da Relatividade Geral.

Esta insistência criou uma polêmica no meio científico. Tem sido argumentado que na sua formulação original este princípio não faz parte da Relatividade Geral. Na sua formulação tradicional, como a que encontramos em Pauli(*) por exemplo, afirma-se que sempre podemos eliminar um campo gravitacional arbitrário em uma região infinitamente pequena no espaço-tempo, por uma transformação do sistema de coordenadas.

Muitos relativistas, tais como Synge e Eddington, criticaram esta formulação, argumentando que uma transformação de coordenadas não pode afetar a presença ou ausência de um campo gravitacional. A presença de um campo gravitacional "real" é determinada por uma característica invariante, a curvatura da métrica. O caso da Relatividade Especial, onde não existe campo gravi

(*) W. Pauli, Theory of Relativity, 2nd. ed. 1921, Oxford.

tacional, é justamente o caso em que a curvatura se anula.

Esta crítica tem consequências imediatas para o idealizado "elevador de Einstein". Neste experimento idealizado, uma pequena caixa, tal como um elevador, é acelerada de modo a anular o campo gravitacional existente ou para produzir um campo gravitacional em um elevador anteriormente livre de gravitação. No entanto em Relatividade Geral, a curvatura da métrica é responsável por forças de maré gravitacionais e seus efeitos podem ser usados por um observador dentro do elevador para distinguir entre um campo gravitacional real e os efeitos da aceleração do elevador num espaço livre de gravitação. É importante notar que os efeitos destas forças de maré não se anulam quando a caixa torna-se arbitrariamente pequena. Por exemplo(*) as deformações pelas forças de maré em uma gota de um líquido em queda livre não deixam de existir mesmo quando a gota torna-se arbitrariamente pequena (desprezando os efeitos de tensão superficial).

É possível manter um princípio de equivalência na Relatividade Geral desde que seu conteúdo seja modificado. Por exemplo, no que alguns autores chamam de sua forma fraca, o princípio afirma somente a igualdade das massas inercial e gravitacional. Alguns autores procuram manter a sua formulação tradicional, a chamada forma forte, argumentando que em regiões infinitesimais do espaço-tempo não temos acesso a certas quantidades tais como a curvatura, que são construídas com derivadas de ordem superior do tensor métrico. Neste caso, o princípio fica reduzido a um simples e, no que diz respeito aos fundamentos da teoria, um teorema matemático de pouco interesse.

(*) H.C. Ohanian, Am. Jour. Phys. 45, 903 (1977).

É nosso propósito neste trabalho esclarecer alguns pontos obscuros sobre este princípio,entre eles o de que este princípio na forma forte seria fundamental para a Relatividade. Alem disso, no que diz respeito a sistemas físicos reais e não nos idealizados, é questionada a aplicabilidade deste princípio na forma tradicional. Estes assuntos são analisados no Capítulo I, onde também serão apresentadas as motivações que nos levam a não utilização da forma forte do princípio e a consequente adoção de uma teoria com acoplamento não-mínimo entre os campos em interação.

No Capítulo II estabelecemos as equações que derivam de um acoplamento não mínimo entre os campos gravitacionais e eletromagnético e destacamos o papel deste acoplamento na determinação da geometria.

No Capítulo III obtemos soluções exatas para as equações de campo, para uma métrica esfericamente simétrica e analisamos as soluções do ponto de vista cosmológico. Destas soluções uma em particular,dedicamos uma análise mais profunda comparando-a com o modelo padrão. Esta solução além de não apresentar singularidades pode representar o universo observado, escolhendo-se convenientemente os parâmetros livres.

No Apêndice A são apresentadas as generalidades sobre a geometria da triesfera. No Apêndice B desenvolve-se o tratamento de fluídos em Relatividade Geral, e no Apêndice C derivamos as equações provenientes da inserção de um campo de Proca num espaço-tempo curvo.

CAPÍTULO I

PRINCÍPIO DE EQUIVALÊNCIA E OBSERVÁVEIS

Neste capítulo pretendemos analisar o princípio de equivalência e suas implicações na forma de acoplamento da gravitação com outros campos. A partir da definição de coordenadas em espaços curvos, vamos encontrar a motivação para não utilizarmos este princípio na forma em que é usualmente colocado.

A forma do princípio de equivalência usualmente aceita por diversos autores estabelece que[1] : "Não podemos distinguir entre os efeitos dinâmicos das forças inerciais e gravitacionais que atuam em partículas teste numa posição fixa no espaço e no tempo". Muitos autores também denominam a esta forma de forma forte do princípio de equivalência distinguindo-a da forma fraca que estabelece a unicidade da queda livre baseada no experimento de Eötvös. Em todos os casos, os autores consideram o princípio de equivalência forte como fundamental para a Teoria da Relatividade Geral, o que não é de todo correto pois segundo Anderson[2] o princípio de equivalência forte é um princípio separado da Relatividade Geral e cuja validade não afeta a validade desta última, a característica essencial da Relatividade Geral é o princípio da invariância geral. De acordo com este princípio o menor grupo de invariância dos sistemas físicos é o grupo de mapeamentos arbitrários da variedade quadridimensional es-

paço-tempo nela mesma (M.M.G.). Uma consequência imediata deste princípio é que, como o M.M.G. é um grupo mais geral que o grupo de Lorentz da Relatividade Especial, devemos introduzir pelo menos um objeto dinâmico adicional para a descrição dos sistemas físicos(*), além daqueles usados na Relatividade Especial (por exemplo, a afinidade para a construção das derivadas covariantes). O que este princípio não diz é de quantos objetos dinâmicos são necessários, ou seja como eles se acoplam a um sistema físico. É exatamente este o papel do princípio de equivalência forte que assegura que o campo gravitacional quando acoplado a outros sistemas físicos se acopla de maneira que somente o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ e suas derivadas de 1ª ordem aparecem nas equações dinâmicas que descrevem esses sistemas. Por isso o princípio de equivalência forte é chamado também de princípio de acoplamento mínimo.

No entanto é possível construir equações dinâmicas razoáveis que violem tal princípio,como é o caso das teorias de corpos girantes desenvolvidas por Papapetrou(3) e outros, onde o tensor de Riemann aparece explicitamente nas equações dinâmicas. Além disso Drummond e Hathrell(4) mostraram que o efeito de polarização do vácuo da Q.E.D. em presença de um campo gravitacional, gera o aparecimento de forças de maré gravitacionais no par virtual formado. em consequência disso, o princípio de equivalência forte não é mais aplicável neste sistema e assim aparecem termos de acoplamento não-mínimo na ação do campo eletromagnético e consequente alteração na equação de movimento do fóton.

Estes trabalhos acima parecem indicar que não existem concretamente sistemas físicos locais como exige o princípio

(*) Sistema físico em todos os casos quer dizer um campo eletromagnético, um

de equivalência forte, isto é, sistemas físicos com uma extensão tal que permita estabelecer uma equivalência entre referenciais do espaço plano e do espaço curvo (com campo gravitacional).

Para analisar esta questão, vamos construir um sistema de referência no espaço curvo seguindo a técnica para a construção de um sistema normal de Fermi. Esse sistema de referência seria o sistema segundo o qual um observador geodésico poderia descrever suas observações e experimentos locais. A construção deste sistema é feita detalhadamente por Manasse e Misner (5), basicamente (ver Fig. 1.1) escolhemos um ponto P_0 como origem para um conjunto de vetores $\vec{e}_\alpha$ ortonormais ($\alpha = 0,1,2,3$), por este ponto p_0 encontra-se a geodésica Γ que passa por p_0 e tem como tangente o vetor $\vec{e}_0$ neste ponto. Como Γ é uma geodésica,

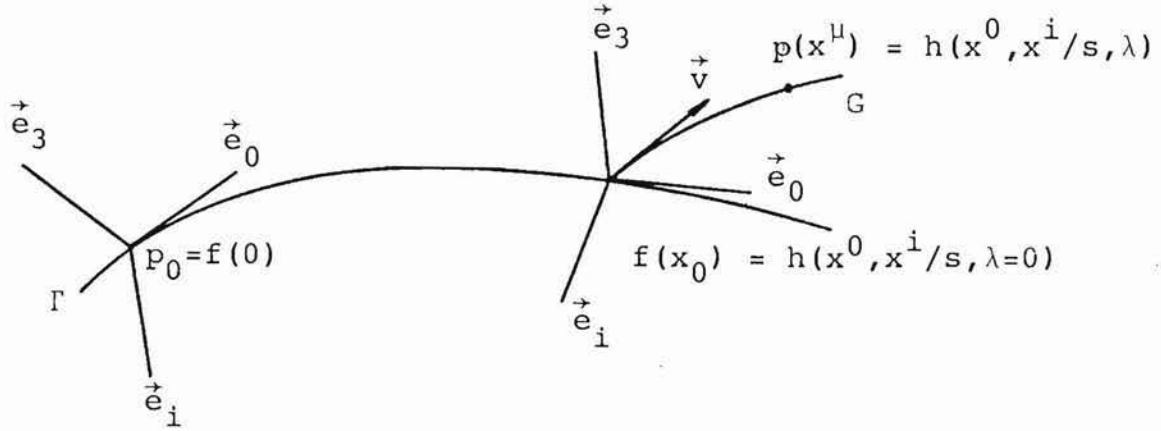


FIGURA 1.1 - Construção de um sistema normal de Fermi.

a sua tangente em cada ponto está relacionada com $\vec{e}_0$ por transporte paralelo. Assim para cada ponto $p = f(\tau)$, onde τ é o parâmetro sobre a geodésica Γ tal que $p_0 = f(0)$, obtemos uma tangente $\vec{e}_0(\tau)$. De maneira análoga podemos definir $\vec{e}_i(\tau)$ ($e=1,2,3$) como vetores em $p = f(\tau)$ obtidos a partir dos vetores $\vec{e}_i(0)$ por

tonormal de vetores $\vec{e}_\alpha(\tau)$ para cada ponto $p = f(\tau)$ de Γ .

Vamos supor que $\vec{e}_0$ seja do tipo tempo e os $\vec{e}_i$ do tipo espaço. Um ponto $P(x^\mu)$ com coordenadas de Fermi x^μ é obtido primeiro seguindo-se a geodésica Γ por um tempo próprio $\tau = x^0$ e daí segue-se em uma certa geodésica ortogonal a Γ por uma distância (espacial) $s = [(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2]^{1/2}$. Esta geodésica tipo espaço $G = h(x^0, x^i, \lambda)$, onde λ é o parâmetro da geodésica, é escolhida de forma que para $\lambda = 0$ (onde G intercepta Γ) a sua tangente $\vec{v}$ tenha cossenos diretores x^i/s relativos aos vetores de base $e_i(\tau = x^0)$, isto é, $\vec{v} = \alpha^i \vec{e}_i(x^0)$ com $\alpha^i = x^i/s$.

Nesta construção fica claro o significado das coordenadas x^μ para um observador que se utiliza deste sistema de referência para descrever suas observações e experiências locais.Elas representam intervalos ou distâncias espaciais e temporais medidas ao longo de geodésicas características do espaço-tempo onde encontra-se o observador.

Mostra-se[5] que neste sistema de referência a métrica pode ser expandida numa série de potências do tipo

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \frac{1}{3} [R_{\alpha\mu\beta\nu}]_\Gamma \; x^\alpha x^\beta + O(x^3) \qquad (1.1)$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski, $[R_{\alpha\mu\beta\nu}]_\Gamma$ é o tensor de Riemann calculado sobre a geodésica Γ e a expansão é feita em termos da distância normal à geodésica Γ . Podemos notar que só em segunda ordem aparecem os efeitos da curvatura, isto é uma característica deste sistema onde a afinidade se anula ao longo da curva Γ .

Podemos agora utilizar este sistema de referência pa-

$$F^{\mu\nu}{}_{|\nu} = J^{\mu} + \frac{1}{3}\,[R_{\lambda\nu}]_{\Gamma}\, x^{\nu}\, F^{\mu\lambda} + \frac{1}{6}\, F^{\mu\lambda}\eta^{\alpha\beta}[R_{\alpha\mu\beta\nu}]_{\Gamma}|_{\lambda} x^{\mu}x^{\nu} \qquad (1.5)$$

Vemos que para essa expressão ser equivalente à de um referencial do espaço plano, como requer o Princípio de Equivalência Forte, é necessário que $x^{\nu} = 0$, ou seja, o sistema físico sob observação não deve possuir nenhuma extensão,por menor que seja. Tal imposição nos parece um tanto artificial visto que até mesmo um objeto simples como o fóton já adquire uma extensão, levando em conta os efeitos da Mecânica Quântica (4).

Neste trabalho vamos permitir que nossos observáveis tenham uma extensão não nula, de modo que o Princípio de Equivalência Forte não se aplica a tais sistemas físicos. Veremos no que se segue que apesar da perda na simplicidade da teoria, esta forma de abordagem fornece uma teoria mais rica e em certos aspectos mais abrangente que a teoria usual.

CAPÍTULO II

PRINCÍPIO VARIACIONAL E A DETERMINAÇÃO DA GEOMETRIA

Neste Capítulo vamos estabelecer as equações para os campos gravitacional e eletromagnético acoplados não minimalmente. Partindo de uma ação para os campos, utilizaremos o método variacional de Palatini. Na obtenção das equações de campo e comparando com as equações obtidas usualmente, mostraremos as diferenças existentes e a implicação da utilização do método de Palatini na determinação da geometria do espaço-tempo.

De uma forma geral, aceita-se que as equações que descrevem os campos da Física podem ser obtidas a partir de uma ação construida com os campos e utilizando-se o Princípio de Mínima Ação.

A ação para um campo qualquer deve ser construida em termos de uma integral sobre o quadrivolume de escalares do campo. No caso do campo gravitacional temos[6] 14 escalares, construídos com o tensor métrico e suas derivadas, que a princípio poderiam ser usados na construção da ação para o campo gravitacional. A escolha usual de R (escalar de curvatura) como o único invariante na construção da ação é devida a dois motivos[6]:

1º) Simplicidade: outra escolha forneceria equações mais complicadas;

2º) A construção de uma ação contendo outros invariantes que não

R não fornecem equações de campo que no caso de campos fracos se reduzam às da Gravitação Newtoniana.

Para o campo eletromagnético temos apenas um invariante $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$, onde $F^{\mu\nu}$ é o tensor do campo eletromagnético pois (7) $F_{\mu\nu}{}^*F^{\mu\nu}$, onde $^*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$ é o tensor dual, se reduz a uma quadridivergência total sendo eliminada da integral de ação pelo Teorema de Gauss.

Quando temos o campo gravitacional interagindo com outros campos, a ação para esses campos é construída usualmente obedecendo-se ao Princípio de Acoplamento Mínimo, que, como vimos, só permite que o tensor métrico e suas derivadas primeiras (com que se constroem as afinidades) apareçam nas equações dinâmicas dos sistemas acoplados com a gravitação. Sendo assim, ficam excluidos da ação para os campos acoplados minimalmente termos que misturem os invariantes dos campos com o invariante R do campo gravitacional, pois certamente tais termos conduziriam a equações dinâmicas para os campos nas quais o escalar de curvatura apareceria explicitamente.

Vejamos por exemplo o caso do campo eletromagnético acoplado com o campo gravitacional. Pelo Princípio de Acoplamento Mínimo, a ação para os campos acoplados deve conter apenas os dois invariantes dos campos somados às fontes. É fácil ver que a ação neste caso se escreve como (10):

$$S = \int \left\{ \frac{\sqrt{-g}}{16\pi} \left[R - F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right] + L_M \right\} d^4x \qquad (2.1)$$

onde L_M é o termo da ação que inclue o conteúdo material e o termo de corrente (fonte) do campo eletromagnético.

Por outro lado, o que foi visto no Capítulo I acerca do aparecimento de termos de curvatura associados a uma "extensão" não nula para os sistemas físicos acoplados com a gravitação, bem como resultados desagradáveis da Relatividade Geral, no que diz respeito ao problema da singularidade inicial nas soluções cosmológicas das equações de Einstein e a incompatibilidade do campo eletromagnético como fonte de geometrias homogêneas e isotrópicas (Friedmann-Robertson-Walker), havendo necessidade de recorrer a "médias" para descrever esse campo nestas geometrias, nos levam a abandonar o Princípio de Acoplamento Mínimo na tentativa de obter resultados satisfatórios para esses problemas. Resultados satisfatórios já foram obtidos por Novello e Salim(8) e servem como motivação para tentarmos alterar a ação para os campos acoplados. Nesse trabalho citado(8) parte-se de uma lagrangeana geral para os campos acoplados da seguinte forma:

$$L = \frac{\sqrt{-g}}{16\pi} [R + \lambda R A_\mu A^\mu + \gamma R_{\mu\nu} A^\mu A^\nu - F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}]$$

onde λ e γ são constantes e A^μ é o quadrivetor potencial do campo eletromagnético.

Nessa lagrangeana são excluídos os termos do tipo $RF_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ pois esses termos resultam em equações de campo que contêm derivadas de R e portanto, derivadas de 3ª ordem em $g_{\mu\nu}$. O termo $\gamma R_{\mu\nu} A^\mu A^\nu$ foi analisado em (10). Em vista de ser um termo de mesma ordem que o termo $\lambda R A^\mu A_\mu$ e de introduzir complicações desnecessárias nos cálculos, não trataremos desse termo na análise que se segue.

Vamos, portanto, partir da seguinte ação para o cam-

po eletromagnético acoplado não minimalmente com a gravitação:

$$S = \int \left\{ \frac{\sqrt{-g}}{16\pi} \left[R+\lambda R A^{\mu} A_{\mu} - F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}\right] + L_M \right\} d^4x \qquad (2.2)$$

onde A_μ é o quadrivetor potencial do campo eletromagnético, L_M é o termo da ação que inclue o conteúdo material e o termo de fonte do campo eletromagnético. λ é uma constante, adimensional neste sistema de unidade ($C = G = 1$).

Costuma-se obter as equações para o campo gravitacional efetuando variações em relação à métrica, considerando-se a afinidade definida em termos das derivadas de $g_{\mu\nu}$. Desse modo a geometria é determinada a priori como sendo Riemanniana. Com esse método obtemos (10) as seguintes equações:

$$(1+\lambda A^2)\overset{(0)}{G}_{\mu\nu} + \lambda \overset{(0)}{R} A_\mu A_\nu + \lambda A^2_{|\mu||\nu} - \lambda \Box A^2 g_{\mu\nu} = -k(E_{\mu\nu}+T_{\mu\nu}) \qquad (2.3)$$

Nas equações acima, duas barras significa derivada covariante no espaço de Riemann, $\overset{(0)}{R}$ e $\overset{(0)}{G}_{\mu\nu}$ são as expressões para o escalar de curvatura e o tensor de Einstein no espaço de Riemann, $A^2 = A^\mu A_\mu$, $E_{\mu\nu}$ é o tensor momento-energia do campo eletromagnético e $T_{\mu\nu}$ o tensor momento-energia da matéria.

Em nosso trabalho vamos utilizar o método variacional de Palatini (11,18), desse modo permitimos que as afinidades variem independentemente de $g_{\mu\nu}$, não havendo conexão entre métrica e afinidade. Como veremos esta conexão aparece como resultado da variação em relação às afinidades.

Variações da ação (2.2) em relação a $g_{\mu\nu}$ fornecem:

$$\delta_g S = \int \frac{1}{16\pi} \{\delta(\sqrt{-g})[R+\lambda RA^2-F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}] +$$

$$+ \delta L_M + \sqrt{-g}\ [\delta R+\lambda\delta RA^2+\lambda R\delta A^2-\delta(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu})\}\ d^4x$$

Utilizando os seguintes resultados conhecidos:

$$\delta L_M = \frac{\sqrt{-g}}{2}\ T_{\mu\nu}\ \delta g^{\mu\nu}$$

$$\delta(\sqrt{-g})F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \delta(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu})\sqrt{-g} = -\ 8\pi\ \sqrt{-g}\ E_{\mu\nu}$$

$$\delta\sqrt{-g} = -\ \frac{1}{2}\ \sqrt{-g}\ g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$$

$$\delta R = R_{\mu\nu}\ \delta\ g^{\mu\nu}$$

$$\delta A^2 = A_\mu A_\nu \delta g^{\mu\nu}$$

obtemos as seguintes equações:

$$(1+\lambda A^2)G_{\mu\nu} + \lambda RA_\mu A_\nu = -\ k(E_{\mu\nu}+T_{\mu\nu}) \qquad (2.4)$$

onde $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein e R o escalar de curvatura numa geometria afim (onde não há relação entre a afinidade Γ e a métrica).

Para determinar a conexão entre a afinidade Γ, a métrica e o potencial A_μ, efetuamos variações em relação à afinidade.

Como apenas R depende de Γ a variação de (2.2), em relação a Γ é:

$$\delta_\Gamma S = \int \{\frac{\sqrt{-g}}{16\pi}\ [(1+\lambda A^2)\delta R]\}\ d^4x \qquad (2.5)$$

Sabemos que $\delta R = g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}$.

Utilizando-se um sistema de coordenadas local, onde a afinidade se anula, temos:

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha;\nu} - \delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu;\alpha} \tag{2.6}$$

Utilizando este resultado em (2.5) juntamente com a definição $(1+\lambda A^2) = \Omega^2$, obtemos:

$$\delta_\Gamma S = \int \frac{1}{16\pi} \{[\sqrt{-g}\ g^{\mu\nu}\Omega^2\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha}]_{;\nu} - [\sqrt{-g}\ g^{\mu\nu}\ \Omega^2\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}]_{;\alpha} -$$

$$- [\sqrt{-g}\ g^{\mu\nu}\Omega^2]_{;\nu}\ \delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha} + [\sqrt{-g}\ g^{\mu\nu}\Omega^2]_{;\alpha}\ \delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\}\ d^4x \tag{2.7}$$

A densidade escalar $\sqrt{-g}$ tem peso 1, assim os dois primeiros termos em (2.7) representam divergências de densidades vetoriais de peso 1 e como sabemos, para uma densidade A^μ de peso 1 segue a expressão[6]:

$$A^{\mu}{}_{;\mu} = A^{\mu}|_{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\mu}A^{\alpha} - \Gamma_{\rho}{}^{\rho}{}_{\lambda}A^{\lambda} = A^{\mu}|_{\mu} \quad .$$

Estes termos representam pois divergências totais que podem ser eliminadas pelo teorema de Gauss. Assim ficamos com a expressão:

$$\delta_\Gamma S = \int \frac{1}{16\pi} \{[\sqrt{-g}\ g^{\mu\nu}\Omega^2]_{;\alpha} - \delta^{\mu}_{\alpha}[\sqrt{-g}\ g^{\mu\sigma}\Omega^2]_{;\sigma}\}\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\ d^4x \quad . \tag{2.8}$$

Pelo princípio da mínima ação temos que:

$$[\sqrt{-g}\ g^{\mu\nu}\Omega^2]_{;\alpha} - \frac{1}{2}\ \delta^{\nu}_{\alpha}[\sqrt{-g}\ g^{\mu\sigma}\Omega^2]_{;\sigma} - \frac{1}{2}\ \delta^{\mu}_{\alpha}[\sqrt{-g}\ g^{\nu\sigma}\Omega^2]_{;\sigma} = 0 \tag{2.9}$$

Este resultado implica que a densidade $G^{\mu\nu} = \sqrt{-g}\ \Omega^2 g^{\mu\nu}$ obedece ao seguinte sistema de equações

$$G^{\mu\nu}{}_{;\alpha} - \frac{1}{2}\ \delta^{\nu}_{\alpha}\ G^{\mu\sigma}{}_{;\sigma} - \frac{1}{2}\ \delta^{\mu}_{\alpha}\ G^{\nu\sigma}{}_{;\sigma} = 0 \tag{2.10}$$

Tomando-se o traço $\nu = \alpha$ obtemos de (2.10)

$$G^{\mu\lambda}{}_{;\lambda} = 0 \quad \text{logo,} \quad G^{\mu\nu}{}_{;\alpha} = 0 \tag{2.11}$$

A partir de (2.11) podemos obter explicitamente a conexão procurada:

$$g_{\mu\nu;\alpha} = g_{\mu\nu|\alpha} - \Gamma^{\varepsilon}_{\mu\alpha}\ g_{\varepsilon\nu} - \Gamma^{\varepsilon}_{\nu\alpha}\ g_{\varepsilon\mu}$$
$$g_{\nu\alpha;\mu} = g_{\nu\alpha|\mu} - \Gamma^{\varepsilon}_{\nu\mu}\ g_{\varepsilon\alpha} - \Gamma^{\varepsilon}_{\alpha\mu}\ g_{\nu\varepsilon}$$
$$g_{\alpha\mu;\nu} = g_{\alpha\mu|\nu} - \Gamma^{\varepsilon}_{\alpha\nu}\ g_{\varepsilon\mu} - \Gamma^{\varepsilon}_{\mu\nu}\ g_{\alpha\varepsilon}$$

Denotando-se

$$g_{\mu\nu;\alpha} = Q_{\mu\nu\alpha} \tag{2.12}$$

temos que:

$$\frac{1}{2}\ (Q_{\mu\nu\alpha} + Q_{\nu\alpha\mu} - Q_{\alpha\mu\nu})\, g^{\lambda\nu} = \{{}^{\lambda}_{\mu\ \alpha}\} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\alpha}$$

onde $\{{}^{\lambda}_{\mu\ \alpha}\}$ são os símbolos de Christoffel.

Assim, as afinidades

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\alpha} = \{{}^{\lambda}_{\mu\ \alpha}\} - \frac{1}{2}\ g^{\lambda\nu}(Q_{\mu\nu\alpha} + Q_{\nu\alpha\mu} - Q_{\alpha\mu\nu}) \tag{2.13}$$

Agora de (2.11) temos

$$(\sqrt{-g}\ \Omega^2 g^{\mu\nu})_{;\alpha} = 0$$

$$g^{\mu\nu}(\sqrt{-g}\ \Omega^2)_{;\alpha} + \sqrt{-g}\ \Omega^2\ g^{\mu\nu}{}_{;\alpha} = 0 \qquad (2.14)$$

De (2.12) vem

$$g^{\mu\nu}{}_{;\alpha} = -\ Q^{\mu\nu}{}_{\alpha}$$

Utilizando esta expressão juntamente com a da derivada covariante de uma densidade de escalar de peso 1 dada por $\omega;^{\alpha} = \omega|_{\alpha} - \Gamma^{\varepsilon}_{\varepsilon\alpha}\omega$ obtemos de (2.14)

$$g^{\mu\nu}[\sqrt{-g}|_{\alpha}\Omega^2 + \sqrt{-g}\ \Omega^2|_{\alpha} - \Gamma^{\varepsilon}_{\varepsilon\alpha}\sqrt{-g}\Omega^2] - \sqrt{-g}\ \Omega^2\ Q^{\mu\nu}{}_{\alpha} = 0 \qquad (2.15)$$

De (2.13) fazendo $\mu = \lambda$ temos que

$$\Gamma^{\varepsilon}_{\varepsilon\alpha} = \left\{ {\varepsilon \atop \varepsilon\ \alpha} \right\} - \frac{1}{2}\ Q_{\varepsilon}{}^{\varepsilon}{}_{\alpha}$$

já que $Q_{\mu\nu\alpha} = Q_{\nu\mu\alpha}$.

Assim, (2.15) fica

$$g^{\mu\nu}[\sqrt{-g}|_{\alpha}\Omega^2 + \sqrt{-g}\Omega^2|_{\alpha} - \left\{ {\varepsilon \atop \varepsilon\ \alpha} \right\}\sqrt{-g}\Omega^2 + \frac{1}{2}\ Q_{\varepsilon}{}^{\varepsilon}{}_{\alpha}\sqrt{-g}\Omega^2] - \Omega^2\sqrt{-g}\ Q^{\mu\nu}{}_{\alpha} = 0$$

Utilizando o resultado conhecido[6] $\left\{ {\varepsilon \atop \varepsilon\ \alpha} \right\} = \dfrac{\sqrt{-g}|_{\alpha}}{\sqrt{-g}}$ ficamos com

$$g^{\mu\nu}[\sqrt{-g}\ \Omega^2|_{\alpha} + \frac{1}{2}\ Q_{\varepsilon}{}^{\varepsilon}{}_{\alpha}\sqrt{-g}\ \Omega^2] - \sqrt{-g}\ \Omega^2\ Q^{\mu\nu}{}_{\alpha} = 0 \qquad (2.16)$$

Tomando-se o traço de (2.16) encontramos

$$Q_{\varepsilon}{}^{\varepsilon}{}_{\alpha} = -\ \frac{4\Omega^2|_{\alpha}}{\Omega^2}$$

Assim, substituindo em (2.16) obtemos:

$$Q^{\mu\nu}{}_{\alpha} = -\frac{\Omega^2{}_{|\alpha}}{\Omega^2} g^{\mu\nu}$$

ou

$$Q_{\mu\nu\alpha} = -\frac{\Omega^2{}_{|\alpha}}{\Omega^2} g_{\mu\nu}$$

isto é,

$$g_{\mu\nu;\alpha} = -\frac{\Omega^2{}_{|\alpha}}{\Omega^2} g_{\mu\nu} \tag{2.17}$$

Esta equação pode ser entendida como a equação de definição de um espaço-tempo de Weyl integrável (W.I.S.T) pois, conforme Novello[11]

$$g_{\mu\nu;\lambda} = -\Phi_{|\lambda} g_{\mu\nu}$$

é uma condição necessária e suficiente para um W.I.S.T., no nosso caso $\Phi = \ell n(\Omega^2)$.

Não impomos nenhuma relação entre métrica e afinidade, permitimos que as duas variassem independentemente. O princípio da mínima ação forneceu então a conexão entre métrica, afinidade e o potencial A_μ, determinando a geometria do espaço-tempo.

No caso em que temos o campo eletromagnético acoplado minimalmente com a gravitação, obtemos que a estrutura do espaço-tempo é Riemanniana, mas no caso do acoplamento não-mínimo a estrutura do espaço não é mais, em geral, Riemanniana.

Vamos agora, utilizando a afinidade definida por (2.13) e (2.17), reescrever as equações para o campo gravitacional (2.4) de modo a compará-las com as equações obtidas pela variação usual (2.3).

Usando a notação $g_{\mu\nu;\lambda} = \omega_\lambda g_{\mu\nu}$ com $\omega_\lambda = -\dfrac{\Omega^2|_\lambda}{\Omega^2}$, encontramos:

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \{{}^\alpha_{\mu\ \nu}\} - \frac{1}{2}\,\omega_\mu\,\delta^\alpha_\nu - \frac{1}{2}\,\omega_\nu\,\delta^\alpha_\mu + \frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}\omega^\alpha \qquad (2.18)$$

Com esta expressão para as afinidades obtemos:

$$R_{\mu\nu} = \overset{(0)}{R}_{\mu\nu} - \frac{3}{2}\,\omega_{\mu\|\nu} + \frac{1}{2}\,\omega_{\nu\|\mu} - \frac{1}{2}\,\omega^\alpha{}_{\|\alpha}\,g_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,\omega_\mu\omega_\nu + \frac{1}{2}\,\omega_\varepsilon\omega^\varepsilon g_{\mu\nu} \qquad (2.19)$$

$$R = \overset{(0)}{R} + \frac{3}{2}\,\omega_\alpha\omega^\alpha - 3\,\omega^\alpha{}_{\|\alpha} \qquad (2.20)$$

onde $\overset{(0)}{R}_{\mu\nu}$ e $\overset{(0)}{R}$ são o tensor de Ricci e o escalar de curvatura na geometria de Riemann (construídos com os símbolos de Christoffel) e as duas barras derivada covariante na geometria de Riemann.

De (2.19) e (2.20) chegamos à expressão para o tensor de Einstein

$$G_{\mu\nu} = \overset{(0)}{G}_{\mu\nu} - \frac{3}{2}\,\omega_{\mu\|\nu} + \frac{1}{2}\,\omega_{\nu\|\mu} + \omega^\alpha{}_{\|\alpha}\,g_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,\omega_\mu\omega_\nu - \frac{1}{4}\,\omega_\alpha\omega_\alpha g_{\mu\nu} \qquad (2.21)$$

Substituindo essas expressões em (2.4) encontramos:

$$(1+A^2)\,\overset{(0)}{G}_{\mu\nu} + \lambda\,\overset{(0)}{R}\,A_\mu A_\nu + \lambda A^2{}_{|\mu\|\nu} - \lambda\,\Box\,A^2 g_{\mu\nu} - \frac{3}{2}\,\frac{\lambda^2 A^2{}_{|\mu} A^2{}_{|\nu}}{(1+\lambda A^2)} +$$
$$+ \frac{3}{4}\,\frac{\lambda^2 A^2{}^{|\alpha} A^2{}_{|\alpha} g_{\mu\nu}}{(1+\lambda A^2)} + \frac{3\lambda^2\,\Box\,A^2 A_\mu A_\nu}{(1+\lambda A^2)} - \frac{3}{2}\,\frac{\lambda^3 A^2{}^{|\alpha} A^2{}_{|\alpha} A_\mu A_\nu}{(1+\lambda A^2)^2} =$$

$$= -\kappa(E_{\mu\nu}+T_{\mu\nu}) \qquad (2.22)$$

Comparando com (2.3) vemos que até primeira ordem em

λ as expressões coincidem perfeitamente, no que diz respeito à estrutura do espaço-tempo. Só podemos decidir se este é Riemanniano ou não a partir dos efeitos dos termos de ordem superior em λ. O caso particular A^2 = cte. fornece as mesmas equações, o que era de se esperar pois de (2.17) $g_{\mu\nu;\lambda} = 0$ e o espaço-tempo é Riemanniano.

Para obtermos as equações para o campo eletromagnético temos somente que variar a ação (2.2) em relação ao potencial A_μ, obtendo:

$$F^{\mu\nu}{}_{\|\nu} = -\frac{\lambda}{2} RA^\mu + J^\mu \tag{2.23}$$

onde J^μ é o termo de fonte que vem de L_M (2.2), duas barras significa derivação covariante no espaço de Riemann e R o escalar de curvatura para uma geometria afim.

Escolhendo a estrutura do espaço-tempo como Riemanniana a priori (10), as equações se reduzem a:

$$F^{\mu\nu}{}_{\|\nu} = -\frac{\lambda}{2} \overset{(0)}{R} A^\mu + J^\mu \tag{2.24}$$

No caso que estamos tratando o espaço-tempo não é Riemanniano em geral, assim utilizando (2.20) em (2.23) encontramos:

$$F^{\mu\nu}{}_{\|\nu} = -\frac{\lambda}{2} \overset{(0)}{R} A^\mu - \frac{3}{2} \frac{\lambda^2 A^\mu \Box A^2}{(1+\lambda A^2)} + \frac{3}{4} \frac{\lambda^3 A^\mu A^2{}_{|\alpha} A^2{}_{|\alpha}}{(1+\lambda A^2)^2} + J^\mu \tag{2.25}$$

Como no caso das equações do campo gravitacional, aqui também a diferença na estrutura do espaço-tempo se faz notar através dos termos de ordem superior em λ.

CAPÍTULO III

SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DE CAMPO

Neste capítulo vamos obter e analisar soluções exatas para as equações de campo obtidas no capítulo anterior.

Vamos nos deter apenas na análise de soluções para a representação da estrutura global do espaço-tempo, isto é, os chamados Modelos Cosmológicos.

Estamos particularmente interessados em analisar as condições que levam à violação dos teoremas da singularidade, em alguns modelos cosmológicos obtidos a partir das equações de campo modificadas.

Temos então o seguinte sistema de equações

$$(1+\lambda A^2)\overset{(0)}{G}_{\mu\nu} + \lambda \overset{(0)}{R} A_\mu A_\nu + \lambda A^2_{|\mu\|\nu} - \lambda \Box A^2 g_{\mu\nu} - \frac{3}{2}\frac{\lambda^2 A^2_{|\mu} A^2_{|\nu}}{(1+\lambda A^2)} +$$

$$+ \frac{3}{4}\frac{\lambda^2 A^{2|\alpha} A^2_{|\alpha}}{(1+\lambda A^2)} g_{\mu\nu} + \frac{3\lambda^2 \Box A^2 A_\mu A_\nu}{(1+\lambda A^2)} - \frac{3}{2}\frac{\lambda^3 A^{2|\alpha} A^2_{|\alpha} A_\mu A_\nu}{(1+\lambda A^2)^2} = -8\pi(E_{\mu\nu}+T_{\mu\nu}) \qquad (3.1)\ ^*$$

$$F^{\mu\nu}{}_{\|\nu} = -\frac{\lambda}{2}\overset{(0)}{R} A^\mu + J^\mu - \frac{3}{2}\frac{\lambda^2 A^\mu \Box A^2}{(1+\lambda A^2)} + \frac{3}{4}\frac{\lambda^3 A^\mu A^{2|\alpha} A^2_{|\alpha}}{(1+\lambda A^2)^2} \qquad (3.2)\ ^*$$

onde usamos o sistema natural de unidades $c = G = 1$ e $k = 8\pi$ e

---

* Observação: daqui por diante vamos omitir o sobrescrito (0).

o sistema de unidades racionais de carga[12].

Vamos procurar soluções para essas equações em espaços homogêneos e isotrópicos, que representam razoavelmente bem o universo atual. Assim escolhemos o seguinte elemento de linha:

$$ds^2 = dt^2 - a(t)\, d\sigma^2 \tag{3.3}$$

com

$$d\sigma^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{\ell^2}$$

onde

$$\ell = 1 + \frac{\varepsilon}{4}(x^2+y^2+z^2) \ , \ \varepsilon = \pm 1, 0$$

O caso particular $a(t) = cte$ e $\varepsilon = 1$ representa o elemento de linha do universo de Einstein. Vamos analisar este caso com detalhe.

O elemento de linha do universo de Einstein se escreve como:

$$ds^2 = dt^2 - a^2 \frac{(dx^2+dy^2+dz^2)}{[1 + \frac{1}{4}(x^2+y^2+z^2)]^2} \tag{3.4}$$

com $a^2 = cte = 1$ este elemento de linha caracteriza uma 3-esfera imersa num espaço quadridimensional com seu raio constante e igual à unidade.

Um cálculo direto nos fornece:

$$R^0{}_0 = 0$$

$$R^1{}_1 = R^2{}_2 = R^3{}_3 = 2$$

$$R = R^0{}_0 + R^1{}_1 + R^2{}_2 + R^3{}_3 = 6$$

Com isso temos

$$G^0{}_0 = -3$$

$$G^1{}_1 = G^2{}_2 = G^3{}_3 = -1$$

Para o quadripotencial A^μ faremos a escolha

$$A^\mu = (0, \alpha\eta^1, \alpha\eta^2, \alpha\eta^3) \tag{3.5a}$$

onde α é uma constante e η^i são as componentes de um vetor tangente às paratáticas(*) da 3-esfera(9), que neste sistema de coordenadas tem componentes:

$$\eta^1 = -\chi y + \frac{1}{2} xz$$

$$\eta^2 = \chi x + \frac{1}{2} yz \qquad \chi = \pm 1 \tag{3.5b}$$

$$\eta^3 = 1 - \frac{1}{4} (x^2+y^2-z^2)$$

Para cada ponto (x,y,z) da 3-esfera prova-se(16)* que se podem traçar duas paratáticas (geodésicas equidistantes) ao eixo z (ele mesmo uma geodésica), cada uma delas tendo como tangente nesse ponto o vetor $\vec{\eta}$, para cada um dos valores de χ da expressão (3.5b). Facilmente demonstra-se, pela isotropia do tri-espaço, de que a situação descrita acima para o eixo z é válida também para os eixos x e y, isto é, podemos traçar por qualquer ponto (x, y,z) da 3-esfera paratáticas a estes eixos, as tangentes a essas paratáticas estando relacionadas com $\vec{\eta}$ por permutações cíclicas de (3.5)*. Assim sendo, podemos, sem perda de generalidade, utilizar apenas o vetor $\vec{\eta}$ em nossa análise futura.

(*) São geodésicas equidistantes características da 3-esfera (ver Apêndice A).

* Apêndice A

É importante notar que o vetor A^{μ} além de ser tangente a geodésicas é também vetor de Killing do espaço-tempo pois satisfaz às equações:

$$A^{\mu}A^{\nu}{}_{\|\mu} = 0 \qquad . \qquad \text{Equação da geodésica}$$

$$A_{\mu\|\nu} + A_{\nu\|\mu} = 0 \qquad \text{Equação de Killing}$$

Além disso

$$A^2 = A^{\mu}A_{\mu} = -\alpha^2 = \text{cte} \tag{3.6}$$

Com isso temos de (2.17) que a estrutura do espaço-tempo é Riemanniana neste caso e além disso:

$$F_{oi} = 0 \qquad F_{ij} = \frac{2\alpha\chi}{f^3}\,\varepsilon_{ijk}\eta^k \tag{3.7}$$

onde $F_{\mu\nu} = A_{\mu|\nu} - A_{\nu|\mu}$ é o tensor do campo eletromagnético

ε_{ijk} é o símbolo totalmente antissimétrico de Levi-Civita e

$f = 1 + \frac{1}{4}\,(x^2+y^2+z^2)$.

O tensor momento-energia do campo eletromagnético cuja definição é

$$E_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\,[F_{\mu}{}^{\alpha}F_{\alpha\nu} + \frac{1}{4}\,g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}] \tag{3.7a}$$

tem componentes

$$E^0{}_0 = \frac{\alpha^2}{2\pi}$$

$$E^i{}_j = -\frac{1}{2\pi}\,[\alpha^2\delta^i{}_j + 2\alpha^2\eta^i\eta_j]$$

$$E^o{}_i = 0$$

De (3.6) temos que as equações para o campo gravitacio

nal (3.1) se reduzem a:

$$(1-\lambda\alpha^2)G^{\mu}{}_{\nu} + \lambda R A^{\mu} A_{\nu} = -8\pi\ (E^{\mu}{}_{\nu} + T^{\mu}{}_{\nu}) \tag{3.8}$$

Tomando $kT^{\mu}{}_{\nu} = -\Lambda\delta^{\mu}{}_{\nu}$ onde Λ é uma constante, ficamos com o seguinte sistema de equações:

$$\binom{i}{j}\ i\neq j \quad 6\lambda\alpha^2\eta^i\eta_j = 8\alpha^2\eta^i\eta_j \tag{3.9}$$

de onde se obtem

$$\lambda = \frac{4}{3} \tag{3.10}$$

$$\binom{o}{o}\ 3(1-\lambda\alpha^2) = 4\alpha^2 - \Lambda \tag{3.11}$$

$$\binom{i}{j}\ i=j \quad -(1-\lambda\alpha^2) = 4\alpha^2 + \Lambda \tag{3.12}$$

(3.11) e (3.12) dão

$$-\frac{4\alpha^2}{3} + \frac{\Lambda}{3} = 4\alpha^2 + \Lambda$$

de onde vem

$$\Lambda = -8\alpha^2 \tag{3.13}$$

Para o campo eletromagnético temos de (3.6) e (3.2):

$$F^{\mu\nu}{}_{\|\nu} = -\frac{\lambda}{2} R A^{\mu} + J^{\mu}$$

com $R = 6$ e $\lambda = \frac{4}{3}$.

Como $F^{oi} = 0$ e $A^{o} = 0$

$$F^{oi}{}_{\|i} = J^{0} = 0 \tag{3.14}$$

A outra equação nos fornece a corrente

$$F^{ij}{}_{\|j} = \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g}\, F^{ij})_{|j} = 4\alpha\eta^i$$

$$F^{ij}{}_{\|j} = -4\alpha\eta^i + J^i$$

de onde vem

$$J^i = 8\alpha\eta^i \tag{3.15}$$

Vemos que há o aparecimento de uma corrente proporcional ao potencial vetor $A^i = \alpha\eta^i$ embora a densidade de carga seja nula. Podemos entender este resultado levando em conta que essa teoria não é invariante ou gauge devido ao termo $\lambda R A^\mu A_\mu$ na lagrangeana, o que já se vê de (3.2) onde A^μ aparece explicitamente nas equações de campo.

É importante notar também que dentro do esquema de acoplamento não-mínimo temos um campo que define uma direção privilegiada, como o campo eletromagnético, servindo de fonte para uma geometria homogênea e isotrópica sem recorrer a nenhum artifício.

Tomando o resultado acima como ponto de partida, vamos agora investir em situações mais complexas. Para isso tomaremos o seguinte quadrivetor potencial:

$$A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3)$$

com

$$\begin{aligned} A^0 &= \beta(t) \\ A^i &= \alpha(t)\eta^i \end{aligned} \tag{3.16}$$

onde η^i são as componentes do vetor de Killing da 3-esfera, já visto anteriormente (3.5), que agora vai representar as componentes de um vetor de Killing das hipersuperfícies t = cte da seguinte geometria:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\ \frac{(dx^2+dy^2+dz^2)}{f^2} \tag{3.17}$$

onde

$$f = 1 + \frac{1}{4}\ (x^2+y^2+z^2)$$

Verifica-se que o potencial A^μ definido por (3.16) é tangente às geodésicas de (3.17) pois $A^\mu A^\nu{}_{\|\mu} = 0$ mas não satisfaz à equação de Killing $A_{\mu\|\nu} + A_{\nu\|\mu} \neq 0$ e também sua divergência vale

$$A^\mu{}_{\|\mu} = \dot{\beta} + 3\ \frac{\dot{a}}{a}\ \beta \tag{3.18}$$

Além disso,

$$A^2 = A^\mu A_\mu = \beta^2 - \alpha^2 a^2 \tag{3.19}$$

Queremos encontrar soluções para as equações (3.1) e (3.2)

$$(1+\lambda A^2)G_{\mu\nu} + \lambda R A_\mu A_\nu - \lambda \Box A^2 g_{\mu\nu} + \lambda A^2{}_{|\mu\|\nu} - \frac{3}{2}\ \frac{\lambda^2 A^2{}_{|\mu} A^2{}_{|\nu}}{(1+\lambda A^2)} +$$

$$+ \frac{3}{4}\ \frac{\lambda^2 A^2{}_{|\alpha} A^2{}_{|\alpha} g_{\mu\nu}}{(1+\lambda A^2)} + \frac{3\lambda^2 \Box A^2 A_\mu A_\nu}{(1+\lambda A^2)} - \frac{3}{2}\ \frac{\lambda^3 A^2{}_{|\alpha} A^2{}_{|\alpha} A_\mu A_\nu}{(1+\lambda A^2)^2} = -8\pi(E_{\mu\nu}+T_{\mu\nu}) \tag{3.1}$$

$$F^{\mu\nu}{}_{\|\nu} = -\frac{\lambda}{2}\ R A^\mu - \frac{3}{2}\ \frac{\lambda^2 A^\mu \Box A^2}{(1+A^2)} + \frac{3}{4}\ \frac{\lambda^3 A^\mu A^2{}_{|\alpha} A^2{}_{|\alpha}}{(1+A^2)^2} + J^\mu \tag{3.2}$$

Para o elemento de linha (3.17) encontra-se

$$R^0{}_0 = 3\ \frac{\ddot{a}}{a}$$

$$R^1{}_1 = R^2{}_2 = R^3{}_3 = \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2}{a^2}\ (a^2+1)$$

$$R = 6\,\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{6}{a^2}\,(\dot{a}^2+1)$$

Com isso temos que

$$G^0{}_0 = -\,\frac{3}{a^2}\,(\dot{a}^2 + 1) \tag{3.20}$$

$$G^1{}_1 = G^2{}_2 = G^3{}_3 = -\,2\,\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{1}{a^2}\,(\dot{a}^2+1) \tag{3.21}$$

De (3.16) obtemos

$$F_{oi} = -\,\alpha[2\,\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{\alpha}}{\alpha}]g_{ij}\eta^j \tag{3.22}$$

$$F_{ij} = 2\alpha\,\frac{a^2\chi}{f^3}\varepsilon_{ijk}\eta^k \tag{3.23}$$

Com isso, o tensor $E_{\mu\nu}$ definido por (3.7a) tem componentes:

$$E^0{}_0 = \frac{1}{8\pi}\,[4\alpha^2 + \alpha^2 a^2\,(2\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{\alpha}}{\alpha})^2] \tag{3.24}$$

$$E^i{}_j = -\,\frac{1}{8\pi}\,\{[4\alpha^2+\alpha^2a^2(2\frac{\dot{a}}{a}+\frac{\dot{\alpha}}{\alpha})^2]\delta^i{}_j + [8\frac{\alpha^2}{a^2} + 2\alpha^2(2\frac{\dot{a}}{a}+\frac{\dot{\alpha}}{\alpha})^2]\eta^i\eta_j\} \tag{3.25}$$

A solução do sistema (3.1), (3.2) para o caso geral se apresentou praticamente impossível, mesmo no caso particular $\underline{A}^2$ = cte. onde o espaço-tempo é Riemanniano e as equações se reduzem a:

$$(1+\lambda A^2)G_{\mu\nu} + \lambda R A_\mu A_\nu = -\,8\pi(E_{\mu\nu}+T_{\mu\nu})$$

$$F^{\mu\nu}{}_{\|\nu} = -\,\frac{\lambda}{2}\,RA^\mu + J^\mu$$

No entanto o caso particular A^2 = cte = 0 fornece uma solução

bem simples que passamos a descrever:

Vamos tomar

$$A^2 = \beta^2 - \alpha^2 a^2 = 0 \qquad \beta^2 = \alpha^2 a^2 \tag{3.26}$$

Escolhendo

$$\alpha(t) = \frac{\alpha_0}{a^2} \qquad \alpha_0 = cte \tag{3.27}$$

temos que

$$\beta(t) = \pm \frac{\alpha_0}{\alpha} \tag{3.28}$$

o sistema de equações (3.1), (3.2) se reduz a:

$$G^{\mu}{}_{\nu} + \lambda R A^{\mu} A_{\nu} = -8\pi \left(E^{\mu}{}_{\nu} + T^{\mu}{}_{\nu}\right) \tag{3.29}$$

$$F^{\mu\nu}{}_{\|\nu} = -\frac{\lambda}{2} R A^{\mu} + J^{\mu} \tag{3.30}$$

Com a escolha (3.27) obtemos de (3.22), (3.23), (3.24) e (3.25)

$$F_{oi} = 0 \tag{3.31}$$

$$F_{ij} = \frac{2\alpha a^2 \chi}{f^3} \varepsilon_{ijk} \eta^k \tag{3.32}$$

$$E^0{}_0 = \frac{\alpha^2}{2\pi} \tag{3.33}$$

$$E^i{}_j = -\left[\frac{\alpha^2}{2} \delta^i{}_j + \frac{\alpha^2}{\pi a^2} \eta^i \eta_j\right] \tag{3.34}$$

$$E^0{}_i = 0$$

Sabemos pela radiação de fundo de 3 graus Kelvin que o

nosso universo passou por uma fase quente onde a temperatura da matéria era muito alta. Nesta fase é de se esperar que tenham havido grandes gradientes de temperatura e outros processos de condução de calor para atingir-se um estado de equilíbrio térmico no universo. Com base nesse fato, vamos representar o conteúdo material do universo por um fluido imperfeito com fluxo de calor, ou seja,

$$T_{\mu\nu} = \rho V_\mu V_\nu - p h_{\mu\nu} + q_\mu V_\nu + q_\nu V_\mu \tag{3.35}$$

onde: ρ é a densidade de matéria

p é a pressão isotrópica

q_μ é o vetor fluxo de calor

V_μ é a quadrivelocidade do fluxo

$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - V_\mu V_\nu$ é o tensor de projeção no triespaço ortogonal a V_μ.

Com isso resolvemos as equações do campo gravitacional:

$$\binom{i}{j} \quad i \neq j \qquad \lambda R A^i A_j = \frac{8}{a^2} A^i A_j$$

ou seja,

$$\ddot{a}a + \dot{a}^2 + 1 - \frac{8}{6\lambda} = 0 \tag{3.36}$$

Chamando $a^2 = u$, (3.36) fica,

$$\ddot{u} - u_c = 0$$

onde

$$u_c = -2 + \frac{8}{3\lambda} \tag{3.37}$$

Resolvendo essa equação encontramos

$$u(t) = + u_0 t^2 + u_1 t + u_2$$

u_1 e u_2 são constantes arbitrárias, e

$$u_0 = u_c/2 = \frac{4}{3\lambda} - 1$$

Finalmente a solução de (3.36) é:

$$a(t) = (+ u_0 t^2 + u_1 t + u_2)^{1/2} \tag{3.38}$$

As outras equações do campo gravitacional são:

$$\binom{0}{0} \quad -\frac{3}{a^2} - \frac{3}{4}\frac{(+2u_0 t+u_1)^2}{a^4} + \frac{12\alpha_0^2}{a^4} = -8\pi T^0{}_0 \tag{3.39}$$

$$\binom{i}{j} \; i = j \quad \frac{(+2u_0 t+u_1)^2}{4\,a^4} + \frac{1}{a^2} - \frac{4\alpha_0^2}{a^4} - \frac{8}{3\lambda a^2} = -8\pi\, T^i{}_i \text{ (sem soma)} \tag{3.40}$$

$$\binom{o}{i} \quad -\frac{8\alpha_0\beta}{a^4}\,\eta_i = 8\pi\, T^0{}_i \tag{3.41}$$

Para uma classe de observadores com quadrivelocidade tangente às curvas coordenadas x^i = cte., ou seja, $V^\mu = \delta^\mu_0$ o tensor momento-energia (3.35) se decompõe como:

$$T^0{}_0 = \rho$$

$$T^i{}_i = -3p$$

$$T^0{}_i = q_i$$

Assim, de (3.39), (3.40) e (3.41) obtemos:

$$8\pi\rho = \frac{3}{a^2} + \frac{3}{4}\frac{(+2u_0t+u_1)^2}{a^4} - \frac{12\alpha_0{}^2}{a^4} \tag{3.42}$$

$$8\pi p = \frac{1}{a^2} + \frac{(+2u_0t+u_1)^2}{4\ a^4} - \frac{4\alpha_0{}^2}{a^4} - \frac{8}{3\lambda a^2} \tag{3.43}$$

$$8\pi q_i = -\frac{8\alpha_0\beta}{a^4}\eta_i \tag{3.44}$$

Como $\beta = \pm\frac{\alpha_0}{a}$ temos de (3.44) que o fluxo de calor pode estar entrando ou saindo da região dependendo da escolha de β .

As equações do campo eletromagnético nos fornecem

$$F^{\mu\nu}{}_{\|\nu} = -\frac{\lambda}{2}RA^{\mu}+J^{\mu}$$

para $\mu = 0$

$$F^{0\nu}{}_{\|\nu} = 0 = -\frac{\lambda}{2}RA^0+J^0$$

daí,

$$J^0 = \frac{4\beta}{a^2} \tag{3.45}$$

Para $\mu = i$

$$F^{i\nu}{}_{\|\nu} = \frac{4\alpha_0}{a^4}\eta^i = -\frac{\lambda}{2}RA^i + J^i$$

então,

$$J^i = \frac{8\alpha_0}{a^4}\eta^i \tag{3.46}$$

Vemos que aqui tambem a escolha do sinal de β vai determinar o sinal de J^0.

É interessante notar que este modelo satisfaz às condições de conservação de energia e carga pois no caso geral:

$$T^{\mu\nu} = -\frac{1}{8\pi}\,[E^{\mu\nu} + G^{\mu\nu} + \lambda R A^{\mu}A^{\nu}]$$

$$T^{\mu\nu}{}_{\|\nu} = -\frac{1}{8\pi}\,[E^{\mu\nu}{}_{\|\nu} + \lambda (RA^{\mu}A^{\nu})_{\|\nu}]$$

pois $G^{\mu\nu}{}_{\|\nu} \equiv 0$

Assim

$$T^{\mu\nu}{}_{\|\nu} \neq 0 \quad \text{em geral.}$$

Mas, no nosso caso, devido às simetrias e à escolha particular do potencial A^{μ}, temos que:

$$E^{\mu\nu}{}_{\|\nu} \equiv 0 \quad \text{e} \quad (RA^{\mu}A^{\nu})_{\|\nu} \equiv 0$$

já que da equação da geodésica, $A^{\nu}A^{\mu}{}_{\|\nu} \equiv 0$ e verifica-se que

$$(RA^{\nu})_{\|\nu} \equiv 0 \tag{3.47}$$

Assim

$$T^{\mu\nu}{}_{\|\nu} \equiv 0.$$

Da mesma forma

$$J^{\mu}{}_{\|\mu} = \frac{\lambda}{2}\,(RA^{\mu})_{\|\mu}$$

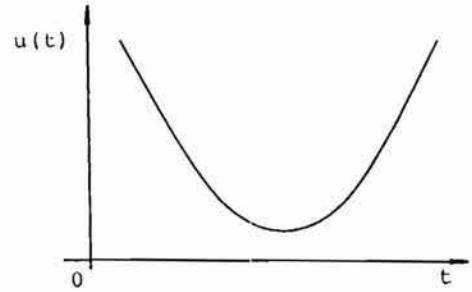
que em geral é diferente de zero, não havendo conservação do quadrivetor corrente. No nosso caso, no entanto, devido a(3.47) temos que $J^{\mu}{}_{\|\mu} = 0$ e J^{μ} é conservado.

Vamos agora analisar mais detalhadamente alguns aspectos desta solução.

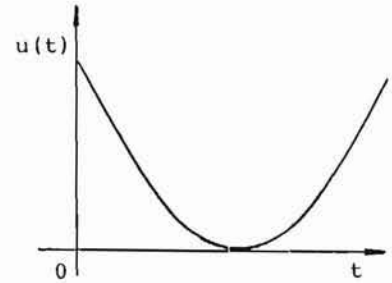
De (3.38) vemos que $a(t)$ é real somente se $u(t) = u_0t^2+u_1t+u_2 \geq 0$. Temos vários casos em que $u(t) \geq 0$:

1) $u_0 > 0$ temos os casos:

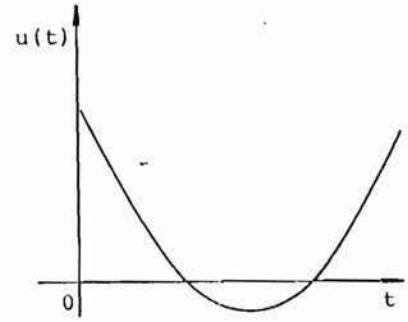
a) $(u_1)^2 < 4u_0u_2$



b) $(u_1)^2 = 4u_0u_2$



c) $(u_1)^2 > 4u_0u_2$



2) $u_0 < 0$, $(u_1)^2 > 4u_0u_2$

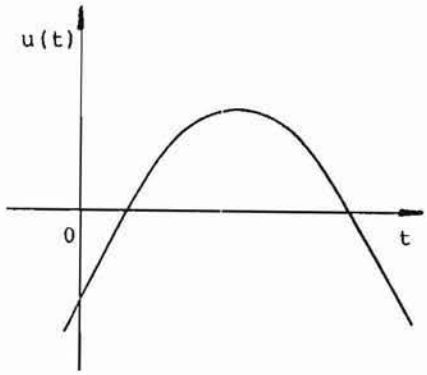


FIGURA 3.1 - Gráficos para a função u(t).

Os intervalos onde u(t) assume valores negativos não são permitidos fisicamente, pois neles a(t) assume valores imaginários.

Temos ainda o caso particular $u_0 = -1 + \frac{4}{3} = 0$. Neste

caso,

$$\bar{a}(t) = (u_1 t + u_2)^{1/2}$$

$$\bar{a}(t) = 0 \qquad \text{para} \qquad t = -\frac{u_2}{u_1}$$

Assim temos uma singularidade nesta solução. Para $\underline{t} = -\frac{u_2}{u_1}$, como u_2 e u_1 são inteiramente arbitrárias, poderíamos utilizar os parâmetros observáveis: $H = \dot{a}/a$ (constante de Hublle) e $q = -\ddot{a}/a\ (1/H^2)$ (parâmetro de desaceleração) para determinar os valores dessas constantes de modo a torná-la compatível com as observações.

É interessante notar que o fator de escala dessa solução ($\bar{a}(t)$) tem um comportamento assintótico, para $t \to \infty$ dado por $\bar{a}(t) \propto t^{1/2}$ semelhante ao modelo de Friedmann seção euclideana cuja fonte de curvatura é a radiação (Fig. 3.2).

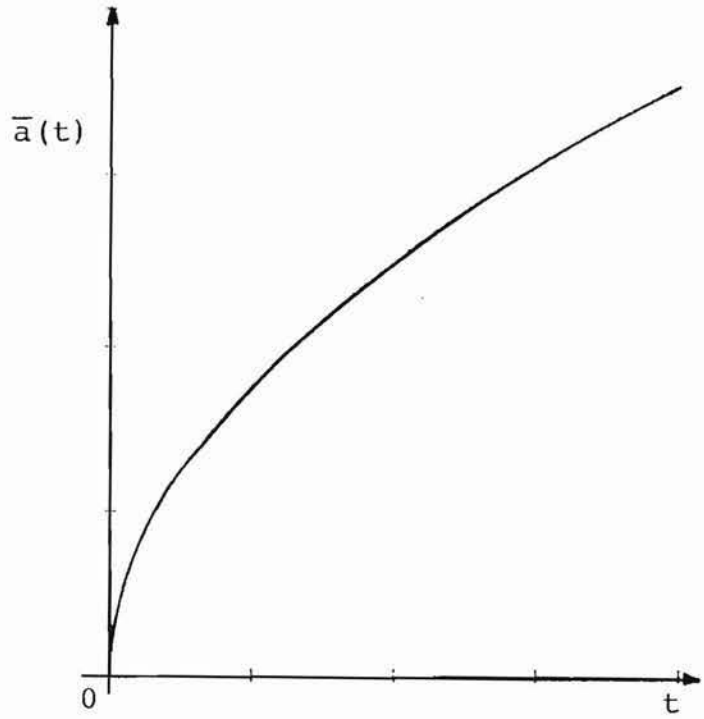


FIGURA 3.2 - Gráfico da função a(t) para o caso $u_0 = 0$, $u_2 = 0$.

Ainda nesse caso, as equações que definem a densidade e a pressão para um observador com $V^{\mu} = \delta^{\mu}_{0}$ são:

$$\binom{0}{0} \qquad 8\pi\rho = \frac{3}{\bar{a}^2} + \frac{3}{4}\frac{u_1^2}{\bar{a}^4} - \frac{12\alpha_0^2}{\bar{a}^4}$$

$$\binom{i}{j} \; i=j \quad 8\pi p = \frac{u_1^2}{4\bar{a}^4} - \frac{1}{\bar{a}^3} - \frac{4\alpha_0^2}{\bar{a}^4}$$

As outras quantidades permanecem inalteradas.

O caso que mais nos interessa é o caso em que $u_0 > 0$ e $(u_1)^2 < 4u_0u_2$, pois neste caso $a(t) > 0$ para qualquer $\underline{t}$ não havendo portanto singularidades na solução. A este caso será devotado o restante de nossa discussão (Fig. 3.3).

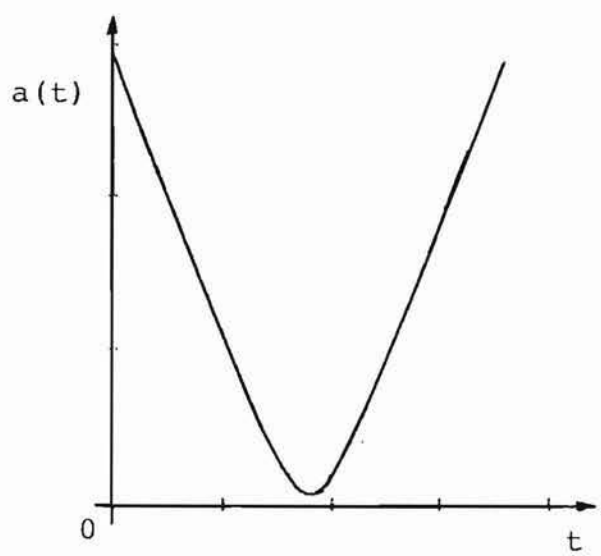


FIGURA 3.3 - Gráfico da função a(t) para o caso $u_0 > 0$ e $(u_1)^2 < 4u_0u_2$.

Analisando as equações (3.42) e (3.43), vemos que a densidade e pressão estão relacionadas através de:

$$p = \frac{1}{3}\rho - \frac{8}{3\lambda 8\pi a^2} \tag{3.48}$$

ou seja(*) :

(*)

$$p = p^* - \xi\theta \qquad \text{com} \qquad p^* = \frac{1}{3}\rho \qquad \xi = (9\pi\lambda\dot{a}a)^{-1}$$

p^* sendo a pressão termodinâmica; ξ o coeficiente de viscosidade volumar (bulk)† ; $\theta = 3\,\frac{\dot{a}}{a}$ o parâmetro de expansão.

Para garantir que o tensor momento energia, definido por (3.35), (3.42) e (3.44) seja um objeto fisicamente aceitável, devemos impor sobre o mesmo certas condições chamadas condições de energia(17). Temos dois tipos de condições de energia, a saber:

1) A condição de energia fraca(17), que se escreve como:

$T_{\mu\nu}V^{\mu}V^{\nu} \geqq 0 \quad \forall \quad V^{\mu}$ do tipo tempo ou nulo, ou ainda como

$$\rho \geqq 0 \qquad \rho + p \geqq 0 \tag{3.49}$$

2) A condição de energia dominante(17) que expressa o fato que a velocidade do som num fluido é sempre menor que a velocidade da luz neste meio. Para fluidos adiabáticos esta condição se escreve como:

$$\rho \geqq 0 \qquad -\rho \leqq p \leqq \rho \tag{3.50}$$

A condição (3.49) é satisfeita ajustando-se os parâmetros livres.

Para $\rho \geqq 0$ devemos satisfazer à desigualdade:

$$\frac{3}{a^2} + \frac{3}{4}\,\frac{(4u_0{}^2t^2 + 4u_0u_1t + u_1{}^2)}{a^4} - \frac{12\;{}_0{}^2}{a^4} \geqq 0$$

Como a^4 é sempre positivo, devemos ter:

---

† No caso geral ξ depende de p, ρ, do volume $\underline{V}$ da temperatura $\underline{T}$ e no caso do fluido executar movimentos periódicos, do período τ do movimento (ver Ref.

$$12(u_0t^2+u_1t+u_2) + 12\ u_0^2t^2 + 12\ u_0u_1t + 3\ u_1^2-48\alpha_0^2 \geq 0$$

$$12(u_0+u_0^2)t^2 + 12(u_1+u_0u_1)t + 12\ u_2 + 3u_1^2 - 48\alpha_0^2 \geq 0$$

Essa desigualdade é satisfeita para todo tempo $\underline{t}$ se

$$u_0+u_0^2 > 0, \text{ ou seja } \ u_0 > 0$$

e, além disso,

$$\Delta = [12(u_1+u_0u_1)]^2 - 4[12(u_0+u_0^2)(12u_2+3u_1^2-48\alpha_0^2)] < 0 \tag{3.51}$$

Como u_1 e u_2 são inteiramente arbitrárias, podemos , sem perda de generalidade, escolher $u_1 = 0$ (que corresponde a uma translação temporal da origem) e assim obter de (3.51) a relação:

$$4(\alpha_0^2u_0+\alpha_0^2u_0^2) < u_0^2u_2+u_0u_2$$

que é satisfeita se

$$u_2 > 0 \quad 4\alpha_0^2 < u_2$$

Já a condição $\rho+p \geq 0$ será satisfeita se

$$\frac{2}{a^2} + \frac{(2u_0t+u_1)^2}{a^4} - 2\ \frac{u_0}{a^2} - \frac{16\alpha_0^2}{a^4} \geq 0$$

Com $u_1 = 0$ essa condição se resume em

$$2(u_0+u_0^2)t^2 + 2u_2 - 2u_0u_2 - 16\alpha_0^2 \geq 0$$

que será satisfeita regular

$$u_0+u_0^2 > 0 \implies u_0 > 0$$

e além disso

$$\Delta = -8(u_0+u_0^2)(2u_2-2u_0u_2-16\alpha_0^2) < 0 \qquad (3.52)$$

Temos de (3.52) que a relação

$$u_0u_2 > u_0^3u_2 + 8u_0\alpha_0^2 + 8u_0^2\alpha_0^2$$

deve ser satisfeita, e para isso devemos ter

$$0 < u_0 < 1 \quad , \quad u_2 > 0 \quad e \quad u_2 > 8\alpha_0^2 \qquad (3.53)$$

Com estas restrições, a condição (3.49) é satisfeita.
De mesma forma, a condição (3.50) também é satisfeita pois ρ é sempre positiva e $\rho+p > 0$ sempre, logo, a pressão nunca se torna maior que a densidade, mesmo com a pressão sendo negativa em algumas etapas da evolução do modelo.

É importante aqui salientar o significado físico dessas condições. A condição fraca é uma imposição de que a densidade de energia medida por qualquer observador(*) é sempre não negativa.

Já a condição dominante está ligada ao fato de que num fluido a velocidade do som não pode superar à da luz pois, conforme Hawking(17) $dp/d\rho$ mede a velocidade do som num fluido adiabático, logo p deve ser menor que ρ para que a velocidade do som seja sempre menor que c.

(*) Por qualquer observador queremos dizer que um observador caracterizado por sua quadrivelocidade V^μ, pode ter qualquer V^μ tipo tempo ou nulo.

Muitos autores costumam apresentar além dessas condições, também a condição $\rho+3p \geqq 0$ como uma condição de energia. No entanto, conforme Hawking[17], esta condição não diz respeito à energia do fluido e sim à convergência das curvas do tipo tempo, mais precisamente, a partir da equação de Raychaudhuri para um fluido perfeito:

$$\dot{\theta} = R_{\mu\nu}V^{\mu}V^{\nu} - \frac{\theta^2}{3}$$

e das equações de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}R = -kT_{\mu\nu}$$

Segue que como $T_{\mu\nu}V^{\mu}V^{\nu}$ é a densidade de energia local, $R_{\mu\nu}V^{\mu}V^{\nu}$ seria sempre negativo, e o mesmo acontecendo com $\dot{\theta}$, ou seja, θ seria monotonicamente decrescente, havendo portanto uma convergência no passado das curvas tipo tempo ou nulas dos observadores V^{μ}. No nosso caso, no entanto, as equações do campo gravitacional estão modificadas:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}R + \lambda RA_{\mu}A_{\nu} = -k\overset{*}{T}_{\mu\nu}$$

onde

$$\overset{*}{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + E_{\mu\nu}$$

e para um observador com $V^{\mu} = \delta^{\mu}{}_{0}$ temos

$$R_{\mu\nu}V^{\mu}V^{\nu} = R_{00} = -k\overset{*}{T}_{00} + \frac{1}{2} g_{00}R - \lambda RA_0A_0$$

$$R_{00} = \frac{3u_0}{a^2} - \frac{3u_0{}^2t^2}{a^4}$$

Assim, a equação de Raychaudhuri fica:

$$\dot{\theta} = \frac{3u_0}{2} - \frac{3u_0{}^2t^2}{4} - \frac{3u_0{}^2t^2}{4}$$

$$\dot{\theta} = \frac{3u_0}{a^2} - \frac{6u_0{}^2t^2}{a^4} \qquad \dot{\theta} = 0 \Longrightarrow t = \pm\sqrt{u_2/u_0}$$

É óbvio por esta expressão que θ não é monoticamente decrescente havendo um tempo em que θ muda de sinal. Isso já era previsto pois nosso modelo, como vimos, não apresenta singularidades, logo θ deve mudar de sinal quando passa pelo ponto onde o fator de escala $\underline{a(t)}$ é mínimo. Por esse motivo a imposição $\rho+3p > 0$ se apresenta incompatível com as características do presente modelo.

Com relação às outras componentes do tensor momento-energia, podemos observar que a equação (3.44), que define o vetor fluxo de calor

$$8\pi q^i = -\frac{8\alpha_0{}^\beta}{a^4}\eta^i \tag{3.44}$$

não tem semelhança com a conhecida expressão fenomenológica[13]

$$q_\alpha = h_\alpha{}^\beta\kappa(T_{|\beta}-Ta_\beta) \tag{3.54}$$

onde κ é o coeficiente de condução de calor; T é a temperatura do fluido e $a_\alpha = V_{\alpha\|\mu}V^\mu$ a aceleração da congruência de curvas, definida em função da quadrivelocidade do fluido.

A expressão (3.44) não pode ser colocada na forma (3.44), pois η^i não pode ser escrito como gradiente de um escalar. Além disso, escolhemos a congruência normal $V^\mu = \delta_0{}^\mu$ e a aceleração dessa congruência é nula.

Vemos que o fluxo de calor em (3.44) tem a direção definida pela parte espacial do potencial A^μ. Isso nos leva a pensar que nesta teoria, que não é mais invariante de Gauge, as expressões fenomenológicas devam ser modificadas tendo em conta

Essa característica pode ser notada também nas equações que definem a densidade de cargas e a corrente do campo eletromagnético

$$J^0 = \frac{4}{a^2} A^0$$

$$J^i = \frac{8}{a^2} A^i$$

onde ambas as quantidades estão relacionadas com o potencial . No entanto, podemos satisfazer à expressão fenomenológica que relaciona a densidade de cargas e a corrente,

$$\vec{J} = \rho^* \vec{v} \qquad (3.55)$$

ρ^* é a densidade de carga

escolhendo convenientemente a velocidade do fluido carregado

$$\rho^* = \frac{4}{a^3} \alpha_0 \quad \text{para} \quad \beta = \frac{\alpha_0}{a}$$

$$\vec{J} = \frac{8}{a^4} \alpha_0 \vec{\eta}$$

Assim, com uma trivelocidade $\vec{v} = \frac{2}{a} \vec{\eta}$ para o fluido carregado a expressão (3.55) é satisfeita.

Esse fato nos leva a pensar que a equação (3.54) não é satisfeita em razão do fluido não ser comóvel com os observadores $V^\mu = \delta_0^\mu$. Isto significa que o fluido deve ter uma quadrivelocidade inclinada com relação às hipersuperfícies de homogeneidade do espaço-tempo, semelhante ao que é sugerido por Tupper[14].

Assim, escolhemos para decompor o tensor momento-energia uma classe de observadores com quadrivelocidade $V_\mu = (V_0, V_i)$

com

$$v_0 = \phi$$
$$v_i = \frac{\gamma}{a}\eta_i \tag{3.56}$$

ϕ e γ são funções que devem obedecer à relação $\phi^2-\gamma^2 = 1$ que vem de

$$v_\mu v^\mu = 1 \tag{3.57}$$

A princípio tentamos dar uma interpretação de fluido perfeito para o conteúdo material do modelo, motivados por Tupper(14), segundo o qual o mesmo conteúdo material pode ter interpretação de fluido perfeito ou imperfeito, dependendo da quadrivelocidade do observador.

Assim, tentamos para o observador com quadrivelocidade v^μ um fluido perfeito:

$$T_{\mu\nu} = \rho v_\mu v_\nu - p h_{\mu\nu}$$

cuja decomposição fornece

$$T^0{}_0 = \rho v^0 v_0 - p h^0{}_0 = -\frac{1}{8\pi}\,[E^0{}_0 + G^0{}_0 + \lambda R A^0 A_0]$$

$$T^i{}_i = \rho v^i v_i - p h^i{}_i = -\frac{1}{8\pi}\,[E^i{}_i + G^i{}_i + \lambda R A^i A_i] \quad \text{(sem soma)}$$

$$T^0{}_i = \rho v^0 v_i - p h^0{}_i = -\frac{1}{8\pi}\,[\lambda R A^0 A_i]$$

$$T^i{}_j = \rho v^i v_j - p h^i{}_j = -\frac{1}{8\pi}\,[E^i{}_j + \lambda R A^i A_j] \qquad i \neq j$$

Substituindo (3.56), encontra-se:

$$8\pi(\rho\phi^2 + p\gamma^2) = \frac{3}{a^2} + \frac{3u_0^2 t^2}{a^4} - \frac{12\alpha_0^2}{a^4} \tag{3.58a}$$

$$-8\pi(\rho+p)\ \frac{\gamma^2}{a^2}\ \eta^i\eta_i + 8\pi p = \frac{1}{a^2} + \frac{u_0{}^2 t^2}{a^4} - \frac{4\alpha_0{}^2}{a^4} - \frac{8}{3\lambda a^2} \text{ (sem soma)} \tag{3.58b}$$

$$-8\pi(\rho+p)\ \frac{\gamma\phi}{a}\ \eta_i = -\frac{8\alpha_0{}^2}{a^5}\ \eta_i \tag{3.58c}$$

$$(\rho+p)\ \frac{\gamma^2}{a^2}\ \eta^i\eta_j = 0 \tag{3.58d}$$

Para satisfazer (3.58d), devemos ter $\rho+p = 0$ ou $\gamma = 0$, mas isso é incompatível com (3.58c). Isso indica que o conteúdo material dessa solução não admite a interpretação de fluido perfeito (pelo menos para essa classe de observadores).

Com esse resultado, retornamos então para a interpretação do conteúdo material como fluido imperfeito:

$$T_{\mu\nu} = \rho v_\mu v_\nu - p h_{\mu\nu} + q_\mu v_\nu + q_\nu v_\mu$$

Como q_μ é ortogonal a v_μ, ou seja $q^\mu v_\mu = 0$, q_μ deve ter a forma:

$$\begin{aligned} q_0 &= \gamma Q \\ q_i &= \frac{\phi}{a}\, Q\, \eta_i \qquad \text{onde} \qquad q^\mu q_\mu = -Q^2 \end{aligned} \tag{3.59}$$

Com isso as componentes do tensor momento-energia são:

$$T^0{}_0 = \rho\phi^2 + p\gamma^2 + 2\gamma\phi Q$$

$$T^i{}_i = (\rho+p)\ \frac{\gamma^2}{a^2}\ \eta^i\eta_i - p + \frac{2\gamma\phi}{a^2}\ Q\ \eta^i\eta_i \quad \text{(sem soma)}$$

$$T^0{}_i = (\rho+p)\ \frac{\phi\gamma}{a}\ \eta_i + (\gamma^2+\phi^2)\ \frac{Q}{a}\ \eta_i$$

$$T^i{}_j = (\rho+p)\,\frac{\gamma^2}{a^2}\,\eta^i\eta_j + \frac{2\gamma\phi Q}{a^2}\,\eta^i\eta_j \qquad i \neq j$$

Juntamente com as equações de campo (3.29), essas equações fornecem o resultado

$$-8\pi\,[\rho\phi^2+p\gamma^2+2\gamma\phi Q] = -\frac{3}{a^2} - \frac{3u_0{}^2t^2}{a^4} + \frac{12\alpha_0{}^2}{a^4} \tag{3.60a}$$

$$-8\pi(\rho+p)\,\frac{\gamma^2}{a^2}\,\eta^i\eta_i - 2\text{x}8\pi\,\frac{\gamma\phi Q}{a^2}\,\eta^i\eta_i + 8\pi p = \frac{1}{a^2} + \frac{u_0{}^2t^2}{a^4} - \frac{4\alpha_0{}^2}{a^4} - \frac{8}{3\lambda a^2}$$

(sem soma)

(3.60b)

$$(\rho+p)\,\frac{\phi\gamma}{a}\,\eta_i + \frac{Q}{a}\,(\gamma^2+\phi^2)\,\eta_i = -\frac{8\alpha_0\beta}{a^4}\,\eta_i \tag{3.60c}$$

$$(\rho+p)\,\frac{\gamma^2}{a^2}\,\eta^i\eta_j + \frac{2\gamma\phi Q}{a^2}\,\eta^i\eta_j = 0 \tag{3.60d}$$

De (3.60d) vem que

$$Q = -\frac{(\rho+p)\gamma}{2\phi} \tag{3.60e}$$

Substituindo (3.60e) em (3.60a), (3.60b) e (3.60c), obtemos:

$$8\pi\rho = \frac{3}{a^2} + \frac{3u_0{}^2t^2}{a^4} - \frac{12\alpha_0{}^2}{a^4}$$

$$8\pi p = \frac{1}{a^2} + \frac{u_0{}^2t^2}{a^4} - \frac{4\alpha_0{}^2}{a^4} - \frac{8}{3\lambda a^2}$$

$$8\pi\,\frac{Q}{a} = \frac{8\alpha_0\beta}{a^4}$$

Essa última equação pode ser reescrita como

$$-\frac{(\rho+p)\gamma}{2a\phi} = \frac{\alpha_0\beta}{\pi a^4}$$

ou ainda

$$\phi^2 = \frac{\gamma^2(\rho+p)^2\pi^2 a^6}{4\beta^2\alpha_0^2} \tag{3.61}$$

Esse resultado juntamente com (3.57) nos permite determinar γ e ϕ (a menos de um sinal).

É notável que tanto para essa classe de observadores como para a classe com $V^\mu = \delta^\mu_0$, as expressões para a densidade de energia e pressão coincidam perfeitamente.

Essas últimas expressões permitem escrever o fluxo de calor como

$$q^0 = \gamma Q = \frac{\gamma\alpha_0\beta}{\pi a^3} \tag{3.62a}$$

$$q^i = \frac{\phi}{a} Q\, \eta^i = \frac{\phi\alpha_0\beta}{\pi a^4}\, \eta^i \tag{3.62b}$$

γ e ϕ podem ser determinadas pelas equações (3.61) e (3.57):

$$(\rho+p) = \frac{1}{8\pi}\left[\frac{4}{a^2} + \frac{4u_0^2t^2}{a^4} - \frac{16\alpha_0^2}{a^4} - \frac{8}{3\lambda a^2}\right] = \frac{1}{8\pi}[U]$$

$$\phi^2 = \frac{\gamma^2[U]^2a^8}{(16\alpha_0^2)^2}$$

como $\gamma^2 = \phi^2 - 1$

$$\phi^2 = \frac{[U]^2a^8}{[U]^2a^8-(16\alpha_0^2)^2}$$

e daí

$$\gamma^2 = \frac{(16\alpha_0^2)^2}{[U]^2a^8-(16\alpha_0^2)^2}$$

ou seja,

$$\phi = \pm \frac{[U]\ a^4}{\{[U]^2 a^8 - (16\alpha_0{}^2)^2\}^{1/2}} \tag{3.63}$$

$$\gamma = \pm \frac{16\alpha_0{}^2}{\{[U]^2 a^8 - (16\alpha_0{}^2)^2\}^{1/2}} \tag{3.64}$$

Para essa classe de observadores (3.56), as expressões para o fluxo de calor podem ser postas na forma (3.54). Vejamos:

A aceleração da congruência (3.56), definida como

$$a_\alpha = v_{\alpha\|\mu} v^\mu$$

tem componentes

$$a_0 = v_{0\|0} v^0 + v_{0\|i} v^i = \phi\dot{\phi} + \gamma^2 \frac{\dot{a}}{a} \tag{3.65a}$$

$$a_i = v_{i\|0} v^0 + v_{i\|j} v^j = (\phi \frac{\dot{\gamma}}{a} + \gamma\phi \frac{\dot{a}}{a^2})\ \eta_i \tag{3.65b}$$

Por outro lado, a partir da relação de Gibbs da termodinâmica, podemos determinar o comportamento da temperatura. Essa relação se escreve como:

$$Td\sigma = d(\frac{\rho}{n}) + p\ d(\frac{1}{n})$$

onde $\sigma = s/n$ é a entropia por partícula, e $n = 1/V$. V é o volume por partícula.

Como n, ρ e p são funções do tempo apenas, a temperatura T também será função do tempo unicamente, ou seja,

$$T_{|i} = 0 \qquad T_{|0} \neq 0$$

Assim, da equação (3.54)

$$q_\alpha = h_\alpha^{\ \beta}\kappa(T_{|\beta} - Ta_\beta)$$

obtemos as seguintes componentes:

$$q_0 = h_0^{\ \beta}\kappa(T_{|\beta}-Ta_\beta) = h_0^{\ 0}\kappa(T_{|0}-Ta_0) - h_0^{\ i}\kappa Ta_i$$

$$q_0 = -\gamma^2\kappa[\dot{T}-T(\phi\dot{\phi} + \gamma^2\frac{\dot{a}}{a})] - \phi^2\gamma\kappa T(\dot{\gamma} + \gamma\frac{\dot{a}}{a}) \qquad (3.66a)$$

$$q_i = h_i^{\ 0}\kappa(T_{|0}-Ta_0) - h_i^{\ j}\kappa Ta_j$$

$$q_i = -\frac{\phi\gamma}{a}\kappa\eta_i[\dot{T}-T(\phi\dot{\phi} + \gamma^2\frac{\dot{a}}{a})] - \frac{\phi^3 T\kappa}{a}\eta_i(\dot{\gamma} + \gamma\frac{\dot{a}}{a}) \qquad (3.66b)$$

Por outro lado, temos de $(3.62)_{a,b}$ que

$$q_0 = \frac{\gamma\alpha_0^{\ \beta}}{\pi a^3}$$

$$q_i = \frac{\phi\alpha_0^{\ \beta}}{a^4}\eta_i$$

de onde vem que:

$$q_0 = -\gamma^2\kappa[\dot{T}-T(\phi\dot{\phi}+\gamma^2\frac{\dot{a}}{a})] - \phi^2\gamma\kappa T(\dot{\gamma} + \gamma\frac{\dot{a}}{a}) = \frac{\gamma\alpha_0^{\ \beta}}{\pi a^3}$$

$$q_i = -\frac{\phi\gamma}{a}\kappa\eta_i[\dot{T}-T(\phi\dot{\phi} + \gamma^2\frac{\dot{a}}{a})] - \frac{\phi^3\kappa}{a}T\eta_i(\dot{\gamma} + \gamma\frac{\dot{a}}{a}) = \frac{\phi\alpha_0^{\ \beta}}{\pi a^4}\eta_i$$

Ambas as expressões fornecem a mesma equação

$$-\gamma\kappa\dot{T} + \gamma\kappa T(\phi\dot{\phi} + \gamma^2\frac{\dot{a}}{a}) - \phi^2\kappa T(\dot{\gamma} + \gamma\frac{\dot{a}}{a}) = \frac{\alpha_0^{\ \beta}}{\pi a^3} \qquad (3.67)$$

que com a equação (3.57) se reduz a:

$$- \gamma\kappa\dot{T} + \kappa T \left(- \frac{\dot{a}}{a} \gamma - \dot{\gamma}\right) = \frac{\alpha_0 \beta}{\pi a^3} \tag{3.68}$$

Vamos supor que a temperatura T seja da forma

$$T = T_0 \, a^{-n} \tag{3.69}$$

onde T_0 e n são constantes. Com isso (3.68) se torna

$$n\gamma\kappa \, T_0 \frac{\dot{a}}{a} a^{-n} + \kappa T_0 \, a^{-n} \left(- \frac{\dot{a}}{a} \gamma - \dot{\gamma}\right) = \frac{\alpha_0 \beta}{\pi a^3}$$

As condições a serem satisfeitas para que a condutividade térmica κ seja positiva são :

$$\beta > 0 \qquad (n-1) \, \gamma \frac{\dot{a}}{a} - \dot{\gamma} > 0 \tag{3.70}$$

Utilizando os recursos da computação algébrica podemos verificar que essa segunda condição é sempre satisfeita para t>0 desde que $0 < u_0 < 1$, que como vimos em (3.53), é satisfeita nesse modelo.

Com a condutividade térmica positiva ($\kappa > 0$), a produção de entropia(*) para essa classe de observadores, cuja expressão se escreve como:

$$S^{\alpha}{}_{\|\alpha} = \frac{\eta}{2T} \pi_{\mu\nu}\pi^{\mu\nu} + \frac{\xi}{T} \theta^2 - \frac{1}{\kappa T^2} q_{\mu} q^{\mu}$$

é sempre positiva, ou seja,

(*) Ver Apêndice B.

$$S^{\alpha}{}_{\|\alpha} > 0$$

pois

$$q^{\mu}q_{\mu} < 0$$

$$\theta^2 > 0$$

$$\pi^{\mu\nu}\pi_{\mu\nu} > 0$$

$$\xi > 0$$

e η, que é o coeficiente de viscosidade de "shear" é inteiramente arbitrário e, portanto, escolhemos $\eta > 0$.

Para encerrarmos o estudo das propriedades do modelo vamos verificar o comportamento dos parâmetros cinemáticos e outros aspectos observacionais do modelo.

Os parâmetros determinados experimentalmente são basicamente o desvio para o vermelho, a constante de Hubble, o parâmetro de desaceleração e a anisotropia na radiação de fundo de 3K, esta última mostra que o universo atualmente sofre uma expansão praticamente isotrópica (considera-se a anisotropia observada como resultante do efeito Döppler). Além disso, acredita-se que o universo não sofra uma rotação global. Num modelo de Universo essas características servem para determinar algumas constantes arbitrárias do modelo, além de eliminar certos modelos que não as satisfazem.

Para uma dada classe de observadores com quadrivelocidade V^{μ} os parâmetros observacionais são:

1) constante de Hubble generalizada (23)

$$H = \frac{(\delta\ell)^{\bullet}}{\delta\ell} = \frac{1}{3}\,\theta - \sigma_{\alpha\beta}\eta^{\alpha}\eta^{\beta} \quad (*)$$

onde $\theta = V^{\mu}{}_{\|\mu}$, $\sigma_{\alpha\beta}$ o tensor de "shear", η^{α} um vetor tipo espaço

(*) $\eta^{\mu}\eta_{\mu} = 1$

normalizado ($\eta^{\alpha}\eta_{\alpha} = -1$) e $\delta\ell$ é o comprimento representativo definido pela relação acima.

2) Parâmetro de desaceleração

$$q = -\frac{(\delta\ell)^{\cdot\cdot}}{\delta\ell}\frac{1}{H^2}$$

3) Tensor de cisalhamento ("shear")

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,(h_{\alpha}{}^{\mu}h_{\beta}{}^{\nu} + h_{\beta}{}^{\mu}h_{\alpha}{}^{\nu})\;V_{\mu\|\nu} - \frac{1}{3}\,\theta\,h_{\alpha\beta}$$

Este tensor determina a deformação de um volume elementar do fluido, $\sigma_{\alpha\beta} = 0$ para expansão isotrópica.

4) Tensor de rotação

$$\omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,(h_{\alpha}{}^{\mu}h_{\beta}{}^{\nu} - h_{\beta}{}^{\mu}h_{\alpha}{}^{\nu})\;V_{\mu\|\nu}\quad .$$

O tensor de rotação determina a rotação rígida de um volume elementar do fluido.

Para a nossa solução temos no caso de um observador com $V^{\mu} = \delta^{\mu}_{0}$

$$\theta = V^{\mu}{}_{\|\mu} = 3\,\frac{\dot{a}}{a}$$

$$H = \frac{1}{3}\,\theta = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{u_0 t}{(u_0 t+u_2)^2}$$

$$q = -\frac{\ddot{a}}{a}\cdot\frac{1}{H^2} = -\frac{u_0(u_0 t^2+u_2)^2}{(u_0 t)^2} + 1$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \omega_{\alpha\beta} = 0\quad .$$

Para esses observadores a expansão é isotrópica, não

havendo rotação.

Para os observadores com $v^\mu = (\phi, \frac{\gamma}{a}\eta^i)$ temos:

$$\theta = v^\mu{}_{\|\mu} = \dot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\phi$$

$$H = \frac{1}{3}\theta - \sigma_{\alpha\beta}\eta^\alpha\eta^\beta = \frac{(\delta\ell)^\cdot}{\delta\ell}$$

$$q = -\frac{(\delta\ell)^{\cdot\cdot}}{\delta\ell}\frac{1}{H^2}$$

O tensor $\sigma_{\alpha\beta}$ tem componentes:

$$\sigma_{00} = \gamma^4\dot{\phi} - \gamma^3\phi(\dot{\gamma} - 2\gamma\frac{\dot{a}}{a}) + \gamma^4\phi\frac{\dot{a}}{a} - \gamma^2\phi^3\frac{\dot{a}}{a} + \gamma^2(\frac{\dot{\phi}}{3} + \frac{\dot{a}}{a}\phi)$$

$$\sigma_{0i} = \eta_i[\gamma^3\frac{\phi\dot{\phi}}{a} - \frac{\gamma^2\dot{\gamma}}{2a} + \frac{3}{2}\gamma^3\frac{\dot{a}}{a^2} - \frac{\gamma^4\dot{\gamma}}{2a} + \frac{3}{2}\gamma^5\frac{\dot{a}}{a^2} + \phi^2\gamma^2\frac{\dot{\gamma}}{2a} +$$

$$+ \frac{3}{2}\phi\gamma^3\frac{\dot{a}}{a^2} - \phi^2\gamma\frac{\dot{a}}{a^2} - \gamma^2\phi^2\frac{\dot{a}}{a^2} + \phi\gamma\frac{\dot{\phi}}{3a}]$$

$$\sigma_{ij} = \eta_i\eta_j[\phi^2\dot{\phi}\frac{\gamma^2}{a^2} + 2\phi\gamma^2\frac{\dot{a}}{a^3} + \frac{\gamma^2\dot{\phi}}{3a^2} - \frac{\gamma\phi}{a^2}(\dot{\gamma}-2\gamma\frac{\dot{a}}{a}) - \frac{\gamma^3\phi}{a^2}(\dot{\gamma}-2\gamma\frac{\dot{a}}{a}) +$$

$$- 2\gamma^2\phi\frac{\dot{a}}{a^3}] - \frac{\dot{\phi}}{3}g_{ij}$$

Após um cálculo extenso usando recursos de computação eletrônica, encontramos que o comportamento assintótico desses parâmetros (para $t \to \infty$) é:

$$\theta^2 \propto t^{-2}$$

$$\omega^2 = \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} \propto t^{-14}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} \propto t^{-10}$$

Isso demonstra que em relação à expansão $\underline{\theta}$ os outros parâmetros decaem muito rapidamente, e para um tempo suficientemente longo os observadores verão uma expansão aproximadamente isotrópica e sem rotação.

ramente verificar se o fóton continua seguindo as geodésicas nulas da geometria, para essa eletrodinâmica modificada.

Para isso vamos considerar uma aproximação óptica geométrica das equações de campo conforme Ellis[13]. Isto significa que o campo eletromagnético será considerado um campo de prova no espaço-tempo livre de cargas e correntes.

As equações do campo nesse caso são:

$$F^{\mu\nu}{}_{\|\nu} = -\frac{\lambda}{2} RA^{\mu} \tag{3.71}$$

$$^{*}F^{\mu\nu}{}_{\|\nu} = 0$$

ou seja,

$$F_{\mu\nu} = A_{\mu|\nu} - A_{\nu|\mu} \tag{3.72}$$

Uma condição satisfeita por A^{μ} é:

$$(RA^{\mu})_{\|\mu} = 0 \tag{3.73}$$

Vamos tentar uma solução óptica das equações de campo (3.71) do tipo

$$A_{\mu} = e(\phi)L_{\mu} + \text{termos menos significativos} \tag{3.74}$$

onde: a) $e(\phi)$ é uma função arbitrária da fase ϕ

b) $e(\phi)$ varia rapidamente em relação à amplitude L_{μ}, ou seja

$$\frac{de}{d\phi} K_{[\mu}L_{\nu]} >> e\, L_{[\mu\|\nu]}$$

onde definimos o vetor de propagação $K_{\mu} = \partial_{\mu}\phi$ e o colchete $[\mu\ \nu]$

significa antissimetrização $[\mu\nu] = \mu\nu - \nu\mu$.

A condição a) é condição de que informações arbitrárias podem ser propagadas por sinais ou "ondas"; b) é a condição que o sinal representa uma onda de alta frequência com uma amplitude pouco variável em relação à frequência da onda.

Substituindo (3.74) em (3.71), (3.72), e desprezando os termos menos significativos, temos:

$$F_{\mu\nu} = e' \, K_{[\nu} L_{\mu]} + e \, L_{[\mu \| \nu]} \qquad e' = \frac{de}{d\phi}$$

$$[g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} (e' \, K_{[\mu} L_{\nu]} + e \, L_{[\nu \| \mu]}) \,]_{\| \beta} = \frac{\lambda}{2} \, RA^{\mu}$$

Em termos de $\underline{e}''$, $\underline{e}'$ e $\underline{e}$ temos

$$e''(K_\mu L^\alpha K_\alpha - L_\mu K^\alpha K_\alpha) + e'(K_{\mu\|\nu} L^\nu + L^\nu{}_{\|\nu} K_\mu - L_\nu K^\nu{}_{\|\mu} - L_{\mu\|\nu} K^\nu + L_{\nu\|\mu} K^\nu) +$$

$$+ e(L_{\mu\|\nu\|\beta} g^{\nu\beta} - L_{\nu\|\beta\|\mu} g^{\nu\beta} - g^{\nu\beta} R^\lambda{}_{\nu\beta\mu} L_\lambda) = \frac{\lambda}{2} \, ReL_\mu \tag{3.75}$$

Da condição (3.73),

$$(RA^\mu)_{\|\mu} = 0$$

temos

$$g^{\mu\alpha} e' K_\mu L_\alpha R + eL_{\alpha\|\mu} g^{\mu\alpha} R + eL_\alpha R_{|\mu} g^{\mu\alpha} = 0$$

Em termos de e' e $\underline{e}$ temos

$$K^\alpha L_\alpha = 0 \qquad L^\alpha{}_{\|\alpha} = -\frac{1}{R} L^\alpha R_{|\alpha} \tag{3.76}$$

Assim, obtemos de (3.76) e (3.75) que:

$$e'' \rightarrow K^{\alpha}K_{\alpha} = 0 \tag{3.77}$$

$$e' \rightarrow L^{\nu}{}_{\|\nu}K_{\mu} - 2L_{\mu\|\nu}K^{\nu} - L_{\mu}K^{\nu}{}_{\|\nu} = 0$$

ou seja,

$$L_{\mu\|\nu}K^{\nu} = -\frac{1}{2}L_{\mu}K^{\nu}{}_{\|\nu} - \frac{K_{\mu}}{2R}L^{\alpha}R_{|\alpha} \tag{3.78}$$

$$e \rightarrow L_{\mu}{}^{\|\alpha}{}_{\|\alpha} + R^{\lambda}{}_{\mu}L_{\lambda} + [\frac{L^{\alpha}}{R}R|\alpha]_{\|\mu} = \frac{\lambda}{2}RL_{\mu} \tag{3.79}$$

A equação (3.77) implica que $K^{\mu}K_{\mu\|\nu} = 0$. Mas como $K_{\mu} = \partial_{\mu}\phi$, $K_{\mu\|\nu} = K_{\nu\|\mu}$, assim

$$K_{\mu\|\nu}K^{\nu} = 0$$

ou seja, os raios luminosos (curvas cuja tangente é o vetor K_{μ}) são geodésicas nulas ($K^{\mu}K_{\mu} = 0$) da geometria considerada. Com isso vamos calcular o desvio para o vermelho.

A taxa de variação de $e(\phi)$ medida por um observador com quadrivelocidade V^{μ} é:

$$e_{\|\mu}V^{\mu} = e' K_{\mu}V^{\mu}$$

Se dois observadores com quadrivelocidades V_1^{μ} e V_2^{μ} medem a taxa de variação do mesmo sinal $e(\phi)$ a razão dessas taxas de variação será $(K^{\mu}V_{\mu})_1/(K_{\nu}V^{\nu})_2$. Esse resultado pode ser interpretado como um efeito de dilatação temporal. Se dt é o intervalo de tempo próprio entre dois pulsos do sinal, então $dt_2/dt_1 = \frac{(K_{\mu}V^{\mu})_1}{(K_{\nu}V^{\nu})_2}$ isto é, as frequências observadas estão relacionadas por

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{(K_{\mu}V^{\mu})_1}{(K_{\nu}V^{\nu})_2}$$

O desvio para o vermelho (Z) é definido como

$$Z = \frac{\lambda_{obs.} - \lambda_{em.}}{\lambda_{em.}}$$

$$1+Z = \frac{\lambda_{obs.}}{\lambda_{em.}} = \frac{\nu_{em.}}{\nu_{obs.}}$$

ou seja,

$$1+Z = \frac{(K_\mu V^\mu)_{em.}}{(K_\nu V^\nu)_{obs.}}$$

Para o nosso modelo, a homogeneidade e isotropia do espaço-tempo garante que todas as geodésicas nulas para o futuro são equivalentes. Assim, basta considerar as geodésicas na direção radial em torno da origem.

Para essas geodésicas temos sua tangente dada por (13)

$$K^\mu = \frac{1}{a(t)}\ (1, \frac{1}{a(t)}, 0,0) \quad ; \quad K_\mu = \frac{1}{a(t)}\ (1,-a,0,0)$$

Para os observadores com $V^\mu = \delta^\mu_0$

$$K_\mu V^\mu = \frac{1}{a(t)}$$

Assim vale a relação:

$$1+Z = \frac{a_{obs.}}{a_{em.}}$$

típica dos modelos tipo F.R.W.

Um dos problemas mais graves da cosmologia padrão é a existência de horizontes nos modelos tipo Friedmann-Robertson -Walker (F.R.W.). A existência de tais horizontes torna inexplicável a homogeneidade e isotropia de tais modelos visto que

existem regiões causalmente desconectadas. Um horizonte é geralmente definido como sendo uma fronteira entre coisas observáveis e coisas não observáveis, para um dado observador. Segundo Rindler[19] podemos distinguir dois tipos de horizontes. O primeiro chamado horizonte de eventos e definido para um dado observador A como sendo uma hipersuperfície no espaço-tempo que separa todos os eventos em duas classes: aqueles que tenham sido ou que serão observados por A, e aqueles que nunca serão observados por A. O outro tipo de horizonte é o chamado horizonte de partículas e definido, para um observador A em um dado instante de tempo t_0, como uma superfície no triespaço instantâneo $t = t_0$, que divide todas as partículas em duas classes, aquelas que já foram observadas por A no tempo t_0 e aquelas que não foram observadas por A. No caso de universos caracterizados pelo elemento de linha de F.R.W.:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left\{ \frac{dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2)}{(1 + \frac{\varepsilon}{4} r^2)^2} \right\}$$

com a luz seguindo as geodésicas nulas da métrica ($ds^2 = 0$). A equação para os raios luminosos com movimento radial $\theta = \phi = 0$ é:

$$\frac{dt}{a(t)} = \pm \frac{dr}{1 + \frac{\varepsilon}{4} r^2}$$

com o sinal indicando se o raio luminoso se afasta da origem ou se aproxima dela.

A condição necessária e suficiente para a existência de um horizonte de eventos é a convergência da integral[19]:

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{dt}{a(t)}$$

pois assim existe para um dado tempo $\underline{t}_0$ uma partícula determinada por

$$\sigma_0 = \int_{t_0}^{\infty} \frac{dt}{a(t)} = \int_{r_0}^{0} \frac{dr}{1 + \frac{\varepsilon}{4} r^2} ,$$

onde σ_0 faz o papel de uma coordenada radial, tal que um fóton emitido pela partícula, no sentido da origem no tempo t_0, atinge a origem num tempo $t = \infty$. Fótons emitidos no mesmo tempo t_0 por partículas mais afastadas nunca atingem a origem.

Seguindo o mesmo raciocínio mostra-se[19] que a condição necessária e suficiente para a existência de um horizonte de partículas é a convergência da integral

$$\int_{0}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \qquad \text{ou} \qquad \int_{-\infty}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}$$

Nesse último caso quando a(t) é definido para valores negativos ilimitados de $\underline{t}$, como na nossa solução.

A partir desses conceitos, podemos verificar se a nossa solução apresenta algum tipo de horizonte.

No caso do horizonte de eventos devemos testar a convergência da integral

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_0}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{u_0 t^2 + u_2}}$$

No nosso caso, como $u_0 > 0$, $4u_0u_2 > 0$, essa integral é imediata e vale

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{\quad}} = \frac{1}{\sqrt{u_0}} \operatorname{arcsenh} \left[\frac{2u_0 t}{\sqrt{\quad}} \right]^{\infty} = \infty$$

Assim temos que,pela não convergência da integral acima não temos horizonte de eventos para essa solução.

Para o horizonte de partículas similarmente devemos verificar se a integral abaixo converge:

$$\int_{-\infty}^{t_0} \frac{dt}{\sqrt{u_0 t^2 + u_0}}$$

Integrando nos limites dados, temos:

$$\int_{-\infty}^{t_0} \frac{dt}{\sqrt{u_0 t^2 + u_2}} = \frac{1}{\sqrt{u_0}} \text{ arc senh} \left[\frac{2u_0 t}{\sqrt{4u_0 u_2}} \right]_{-\infty}^{t_0} = \infty$$

Novamente a integral não converge demonstrando a inexistência do horizonte de partículas para essa solução. Assim , do que foi visto, temos aqui um outro ponto favorável nessa solução, que como já vimos, não possui a singularidade inicial dos modelos tipo Friedmann. A não existência de horizontes torna possível o contato causal entre todas as partes do universo,explicando assim a alta isotropia observada.

CONCLUSÃO

De tudo que foi visto podemos concluir que, se abandonamos o Princípio de Equivalência Forte, permitindo que outros campos, como o campo eletromagnético, tenham um papel mais fundamental na evolução dinâmica do espaço-tempo, esses campos, quando acoplados convenientemente, podem ajudar na tentativa de solucionar alguns problemas apresentados pela Cosmologia padrão. Dentre esses problemas podemos citar, por exemplo, a singularidade inicial e a existência de horizontes, que não estão presentes no modelo apresentado. Além disso, em nosso modelo temos processos dissipativos que podem ser usados, na tentativa de explicar a alta entropia observada no universo atualmente[24]. Um outro fato que deve ser levado em conta, é que dentro do esquema de acoplamento apresentado, foi possível compatibilizar uma fonte anisotrópica, como o campo A^{μ}, com uma estrutura geométrica homogênea e isotrópica sem recorrer a nenhum artifício. Vale a pena ressaltar também que, como está desenvolvido no Apêndice C, a analogia usualmente feita entre o acoplamento não mínimo e a atribuição de uma massa ao fóton não é, em geral, correta. Além do mais, como vimos no texto, a aproximação óptica das equações do campo eletromagnético prevê que o fóton segue as geodésicas nulas da geometria, como no caso da eletrodinâmica acoplada minimalmente com a gravitação.

APÊNDICE A

TRIESFERA

As observações astronômicas sugerem que o universo é homogêneo e isotrópico para escalas superiores a 10^8 anos-luz. Essas evidências provêm da observação de fontes de rádio e principalmente da radiação de fundo de 3K. Além disso, existem razões para se acreditar que o universo seja finito (embora ilimitado).

1º) Do ponto de vista da Relatividade Geral, as condições de contorno para uma hipersuperfície fechada são bem mais simples que as condições no infinito de uma estrutura quase-Euclideana.

2º) A idéia de Mach, que a inércia dos corpos depende da interação mútua entre os mesmos, está contida, numa primeira aproximação, nas equações de Einstein. Mas esta idéia só se aplica a universos finitos.

Se consideramos válida toda a argumentação anterior para a escolha da geometria que mais se aproxima da geometria do universo, a escolha mais natural é a geometria da triesfera, que é uma generalização 3-dimensional da geometria da superfície esférica, sendo como esta última uma entidade finita mas ilimitada.

Para visualizarmos esta geometria, vamos imaginá-la

imersa em um espaço Euclideano 4-dimensional.

Considerando um sistema de eixos cartesianos (X,Y,Z,W) centrado na 3-esfera (observe que tanto na 3-esfera como na 2--esfera só tem sentido se falar em "centro da 2-esfera" quando consideramos esta última imersa num espaço Euclideano de dimensão superior pois intrinsecamente tanto a 3-esfera como a 2-esfera não possuem um "centro") (ver Figura A.1)

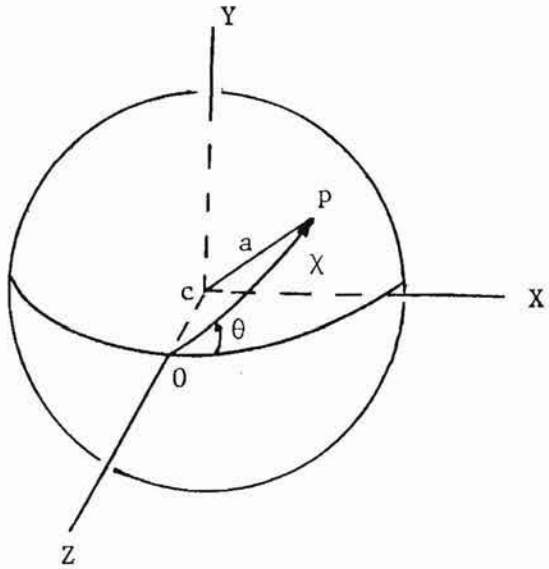


FIGURA A.1 - Coordenadas intrínsecas e extrínsecas da triesfera.

A relação entre as coordenadas extrínsecas (4-espaço Euclideano) e intrínsecas (χ,θ,ϕ na 3-esfera) é dada por:

$$\begin{aligned} X &= a \text{ sen } \chi \text{ sen } \theta \cos \phi \\ Y &= a \text{ sen } \chi \text{ sen } \theta \text{ sen } \phi \\ Z &= a \text{ sen } \chi \cos \theta \\ W &= a \cos \chi \end{aligned} \tag{A.1}$$

Daí segue que o elemento de linha da 3-esfera é:

$$d\sigma^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 + dW^2$$

$$= a^2[d\chi^2 + \text{sen}^2\chi(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2)] \tag{A.2}$$

onde a é o 4-raio da superfície esférica 3-dimensional

$$W^2 + X^2 + Y^2 + Z^2 = a^2$$

A homogeneidade e isotropia da 3-esfera é evidente pois qualquer rotação no 4-espaço Euclideano, que leva um ponto da 3-esfera em outro, deixa inalterado o elemento de linha (A.2)

Em vez das coordenadas χ, θ, ϕ podemos usar outras coordenadas intrínsecas x, y, z como na Figura A.2, onde a rela - ção entre as coordenadas é:

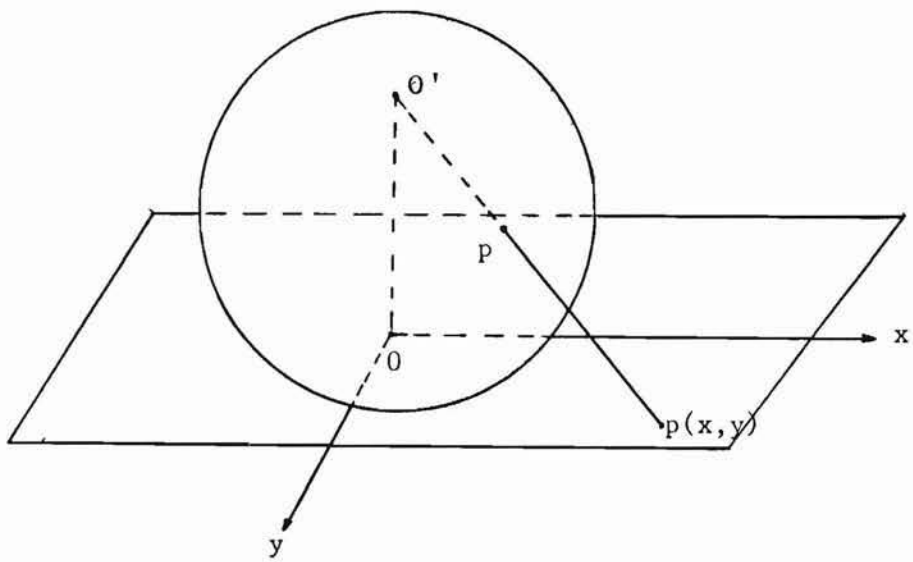


FIGURA A.2 - Coordenadas x, y, z da triesfera.

$$\cos\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{y}{x}$$

$$2\ \operatorname{tg}\frac{\chi}{2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Com essa transformação o elemento de linha (A.2) fica:

$$d\sigma^2 = a^2\left[\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{\ldots}\right] \qquad (A.3)$$

Apesar de possuirem algumas propriedades semelhantes , como o fato de serem entidades finitas mais ilimitadas, a 2-esfera e a 3-esfera possuem algumas dissemelhanças, por exemplo, sabemos que na 2-esfera não existem geodésicas paralelas pois toda geodésica da 2-esfera é uma circunferência máxima, e essas se encontram em pelo menos dois pontos. Na 3-esfera, no entanto, existem pares de geodésicas não coplanares que mantêm entre si uma distância constante. A esses pares de geodésicas damos o nome de paratáticas, ou paralelas de Clifford[15,16]. Utilizando-se as coordenadas das intrínsecas (x,y,z) da 3-esfera, mostra-se[9,16] que pode-se traçar por cada ponto da 3-esfera duas paratáticas ao eixo Z (que é uma geodésica da 3-esfera) cada uma delas tendo como tangente o vetor $\vec{\eta}$ cujas componentes são:

$$\eta^1 = -\varepsilon y + \frac{1}{2} xz$$
$$\eta^2 = \varepsilon x + \frac{1}{2} yz$$
$$\eta^3 = 1 - \frac{1}{4} (x^2+y^2-z^2)$$

$\varepsilon = +1$ para a paratática à direita e $\varepsilon = -1$ para a paratática à esquerda do eixo z.

Temos assim um campo de paratáticas ao eixo z pois a cada ponto (x,y,z) da 3-esfera as duas paratáticas ao eixo z que passam por aquele ponto ficam univocamente determinadas pelo vetor $\vec{\eta}$.

A situação acima descrita também se aplica aos eixos x e y, isto é, também podemos traçar por cada ponto da 3-esfera duas paratáticas ao eixo x e ao eixo y. É fácil ver que pela homogeneidade e isotropia da 3-esfera as expressões para as outras paratáticas estarão relacionadas entre si através de permutações

cíclicas. Assim, temos para o eixo x, fazendo as permutações $z \to x$, $x \to y$, $y \to z$. As paratáticas a esse eixo têm como tangente para cada ponto da 3-esfera o vetor $\vec{\alpha}$ de componentes

$$\alpha^1 = 1 - \frac{1}{4}(y^2 - z^2 - x^2)$$

$$\alpha^2 = -\varepsilon z + \frac{1}{2} yx$$

$$\alpha^3 = \varepsilon y + \frac{1}{2} zx$$

Procedendo da mesma forma para o eixo y, obtemos através da permutação $z \to y$, $y \to x$, $x \to z$, em $\vec{\eta}$ o vetor $\vec{\beta}$ com componentes

$$\beta^1 = \varepsilon z + \frac{1}{2} xy$$

$$\beta^2 = 1 - \frac{1}{4}(z^2 + x^2 - y^2)$$

$$\beta^3 = -\varepsilon x + \frac{1}{2} zy$$

É fácil verificar que esses 3 vetores são linearmente independentes, ou seja:

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\eta} = \vec{\beta}\cdot\vec{\eta} = \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0$$

Pela sua própria construção, cada um destes campos satisfaz à equação da geodésica:

$$\eta^i \eta^j{}_{:i} = \alpha^i \alpha^j{}_{:i} = \beta^i \beta^j{}_{:i} = 0$$

mas além disso eles também satisfazem à equação de Killing

$$\eta_{i:j} + \eta_{j:i} = 0$$

$$\alpha_{i:j} + \alpha_{j:i} = 0$$

$$\beta_{i:j} + \beta_{j:i} = 0$$

onde os dois pontos significa derivação covariante no triespaço da métrica (A.3).

Como consequência disso, esses campos têm divergência nula, ou seja,

$$\eta^{i}{}_{:i} = \alpha^{i}{}_{:i} = \beta^{i}{}_{:i} = 0 \quad .$$

APÊNDICE B

FLUIDOS RELATIVÍSTICOS

A descrição do conteúdo material do universo como um fluido é bem razoável na escala de aglomerados de galáxias. Nessa escala podemos tratar os aglomerados de galáxias como partículas de um gás que preenche o universo (apesar dessas partículas apresentarem uma estrutura interna isso é ignorado). Com isso podemos adotar a visão macroscópica da teoria cinética dos gases, tratando o gás como um fluido. Em geral, na literatura encontramos frequentemente o conteúdo material do universo representado por um fluido perfeito, sem termos dissipativos. Na atual fase em que se encontra o universo, a descrição em termos de um fluido perfeito é bastante razoável, no entanto quando a densidade de energia era maior, como por exemplo no universo primitivo, os efeitos dissipativos devem ter sido essenciais para a descrição dessa fase.

- Fluidos Perfeitos

Quando o fluido está em equilíbrio termodinâmico, não havendo portanto fluxo de calor entre as partes deste e além disso, não havendo processos de viscosidade entre as partículas do fluido, esse pode ser tratado dentro da aproximação de fluido perfeito. Para descrever fisicamente um fluido precisamos de cer

tos campos escalares, vetoriais e tensoriais. No caso de um fluido perfeito, a sua densidade, pressão e quadrivelocidade são suficientes para determinar o seu comportamento. Essa descrição se torna mais simples com a introdução de um campo tensorial que contém todas as informações sobre o fluido. Este campo é conhecido como tensor momento-energia do fluido, e na forma de fluido perfeito tem a forma[6]

$$T_{\mu\nu} = \rho V_\mu V_\nu - p\, h_{\mu\nu} \tag{B.1}$$

onde V_μ é a quadrivelocidade do fluido (no caso do "fluido galático" V_μ é a 4-velocidade de um observador que vê os aglomerados de galáxias ao seu redor sem movimento médio) normalizável, isto é, $V^\mu V_\mu = 1$, $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - V_\mu V_\nu$ é o tensor de projeção.

É fácil ver que

$$T_{\mu\nu} V^\mu V^\nu = \rho$$

$$\frac{1}{3}\, T_\mu{}^\nu h^\mu{}_\nu = -\, p$$

ou seja, ρ e p representam a densidade de energia e a pressão medidas no referencial próprio de um observador com 4-velocidade V_μ.

Seguindo o formalismo proposto por Eckart[20], definimos o vetor corrente de partículas $N^\alpha = nV^\alpha$ onde n é a densidade do número de partículas ($n = 1/V$ onde V é o volume por partícula). O fluido perfeito é descrito pelas equações da continuidade:

$$N^\alpha{}_{\|\alpha} = 0$$

e da conservação do momento-energia

$$T^{\alpha\beta}{}_{\|\beta} = 0$$

Utilizando um sistema de coordenadas onde a afinidade se anula localmente, essas equações se escrevem como

$$T^{\alpha\beta}{}_{|\beta} = 0 \qquad (B.2)$$

$$N^{\alpha}{}_{|\alpha} = 0 \qquad (B.3)$$

A equação (B.2) projetada na direção de V_α nos dá a conservação da energia

$$T^{\alpha\beta}{}_{|\beta}V_\alpha = 0$$

que nos fornece

$$[(\rho+p)V^\beta]_{|\beta} - p_{|\beta}V^\beta \qquad (B.4)$$

Por outro lado, (B.3) nos dá

$$nV^\alpha{}_{|\alpha} + V^\alpha n|\alpha = 0$$

que, junto com (B.4) resulta

$$T^{\alpha\beta}{}_{|\beta}V_\alpha = nV^\alpha \left[\left(\frac{\rho}{n}\right)_{|\alpha} + p\left(\frac{1}{n}\right)_{|\alpha}\right] = 0 \qquad (B.5)$$

Da relação de Gibbs da Termodinâmica temos

$$kTd\sigma = d\left(\frac{\rho}{n}\right) + pd\left(\frac{1}{n}\right)$$

ou

$$kT\sigma_{|\alpha} = \left(\frac{\rho}{n}\right)_{|\alpha} + p\left(\frac{1}{n}\right)_{|\alpha} \qquad (B.6)$$

ca que, juntamente com (B.5) resulta em:

$$T^{\alpha\beta}{}_{|\beta}V_\alpha = nV^\beta \left[\left(\frac{\rho}{n}\right)_{|\alpha} + p\left(\frac{1}{n}\right)_{|\alpha} \right] = n\, V^\beta\, k\, T\sigma_{|\beta} = 0$$

isto é,

$$\sigma_{|\beta}V^\beta = \dot{\sigma} = 0$$

Isso significa que, como era de se esperar, num fluido perfeito a entropia de cada partícula é constante ao longo de sua linha de universo, não havendo efeitos dissipativos.

- Fluidos Imperfeitos

Vejamos agora as equações que regem o comportamento de fluidos imperfeitos. Tais fluidos apresentam efeitos dissipativos (viscosidade e fluxo de calor) e, portanto, a expressão para o tensor momento-energia desses fluidos deve diferir da expressão para fluidos perfeitos. O 4-vetor corrente de partículas $N^\alpha = nV^\alpha$ também deve se alterar. Vamos representar essas mudanças em $T^{\alpha\beta}$ e N^α por $\Delta T^{\alpha\beta}$ e ΔN^α, respectivamente. Assim, temos as expressões

$$T^{\alpha\beta} = \rho V^\alpha V^\beta - ph^{\alpha\beta} + \Delta T^{\alpha\beta} \tag{B.7}$$

$$N^\alpha = nV^\alpha + \Delta N^\alpha \tag{B.8}$$

Seguindo a interpretação de Eckart[20] V^α é a velocidade do fluxo de partículas. Assim, para um observador que se move com o fluido ($V^\mu = \delta^\mu_0$) temos que[21]:

$$N^i = 0$$

$$N^0 = n$$

$$\rho = T^{\alpha\beta}V_\alpha V_\beta = T^{00}$$

Com isso temos de (B.7) e (B.8) que

$$\Delta T^{\alpha\beta}V_\alpha V_\beta = 0 \qquad (B.9)$$

$$\Delta N^\alpha = 0 \qquad (B.10)$$

A forma de $\Delta T^{\alpha\beta}$ deve ser estabelecida a partir dessas equações, obedecendo à segunda lei da Termodinâmica. Essa última deve estar contida nas equações de conservação de energia e do número de partículas.

Da conservação de energia e do número de partículas temos:

$$T^{\alpha\beta}{}_{|\beta}V_\alpha = nV^\alpha \left[\left(\frac{\rho}{n}\right)_{|\alpha} + p\left(\frac{1}{n}\right)_{|\alpha} \right] + \Delta T^{\alpha\beta}{}_{|\beta}V_\alpha = 0 \qquad (*)$$

que, junto com a relação de Gibbs (B.6), fornece

$$nkTV^\beta\sigma_{|\beta} = -\Delta T^{\alpha\beta}{}_{|\beta}V_\alpha \qquad (B.11)$$

Definimos o 4-vetor corrente de entropia como:

$$S^\alpha = kn\sigma V^\alpha + \frac{\Delta T^{\alpha\beta}}{T} V_\beta$$

de modo que para um observador que se move com o fluido $S^0 = nk\sigma$ = densidade de entropia do fluido†.

A taxa de produção de entropia é dada por

(*) Utilizamos o sistema de coordenadas local onde $\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu} = 0$.

$$S^{\alpha}{}_{|\alpha} = (nk\sigma V^{\alpha})_{|\alpha} + (\frac{1}{T}\,\Delta T^{\alpha\beta}V_{\beta})_{|\alpha}$$

$$S^{\alpha}{}_{|\alpha} = \frac{\Delta T^{\alpha\beta}}{T}\,V_{\beta|\alpha} - \frac{T_{|\alpha}}{T^2}\,\Delta T^{\alpha\beta}V_{\beta} \qquad (B.12)$$

onde usamos a expressão (B.11) e (B.3).

De acordo com a segunda lei da termodinâmica, $S^{\alpha}{}_{|\alpha} \geq 0$, assim[22] $\Delta T^{\alpha\beta}$ deverá conter uma combinação de gradientes de temperatura e derivadas da velocidade, de modo que (B.12) seja positiva para qualquer configuração do fluido.

Seguindo o desenvolvimento proposto por Weinberg[21], encontramos, no referencial síncrono ($V^{\alpha} = \delta^{\alpha}_{0}$) que:

$$S^{\alpha}{}_{|\alpha} = -\frac{\Delta T^{i0}}{T^2}\,(T_{|i} - TV_i) + \frac{\Delta T^{ij}}{T}\,V_{i|j}$$

Como ΔT^{ij} é simétrico nos índices i,j, somente a parte simétrica de $V_{i|j}$ irá contribuir na expressão acima.

Temos que a parte simétrica de $V_{i|j}$ é dada por

$$V_{(i|j)} = \frac{1}{2}\,(V_{i|j} + V_{j|i} - \frac{2}{3}\,g_{ij}V^{\ell}{}_{|\ell}) + \frac{1}{3}\,g_{ij}V^{\ell}{}_{|\ell}$$

onde o primeiro termo é a parte simétrica sem traço.

Assim, no referencial síncrono obtemos que a taxa de produção de entropia é dada por

$$S^{\alpha}{}_{|\alpha} = -\frac{\Delta T^{i0}}{T^2}\,(T_{|i} - T\dot{V}_i) + \frac{\Delta T^{ij}}{T}\,[(V_{i|j} + V_{j|i} - \frac{2}{3}\,g_{ij}V^{\ell}{}_{|\ell}) + \frac{1}{3}\,g_{ij}V^{\ell}{}_{|\ell}]$$

e pela argumentação acima, de que $\Delta T^{\alpha\beta}$ só deve depender dos gradientes de temperatura e derivadas da velocidade. Temos que para $S^{\alpha}{}_{|\alpha}$ tenha um sinal definido, devemos ter:

$$\Delta T^{ij} = \eta g^{im} g^{js} (V_{m|s} + V_{s|m} - \frac{2}{3} g_{ms} V^{\ell}{}_{|\ell}) + \xi g^{ij} V^{\ell}{}_{|\ell} \qquad (B.13)$$

$$\Delta T^{i0} = \kappa g^{ij} (T_{|j} - T\dot{V}_j) \qquad (B.14)$$

Por analogia com o caso clássico[22], identificamos os coeficientes η, ξ e κ como os coeficientes de viscosidade de cisalhamento ("shear"), viscosidade volumar ("bulk") e a condutividade térmica, respectivamente.

Com isso, a taxa de produção de entropia tem a seguinte expressão:

$$S^{\alpha}{}_{|\alpha} = -\frac{\kappa}{T^2} g^{ij} (T_{|j} - T\dot{V}_j)(T_{|i} - T\dot{V}_i) + \frac{\eta}{2T} g^{im} g^{js} (V_{m|s} + V_{s|m} - \frac{2}{3} g_{ms} V^{\ell}{}_{|\ell}) \times$$

$$\times (V_{i|j} + V_{j|i} - \frac{2}{3} g_{ij} V^{\ell}{}_{|\ell}) + \frac{\xi}{T} (V^{\ell}{}_{|\ell})^2 \geq 0$$

Para generalizar essas expressões para um referencial qualquer, temos que por $\Delta T^{\alpha\beta}$ numa forma independente de coordenadas. Para isso vamos decompor $\Delta T^{\alpha\beta}$ em suas partes irredutíveis para uma 4-velocidade V^{α} qualquer.

$$\Delta T^{\alpha\beta} = (\Delta T^{\mu\nu} V_{\mu} V_{\nu}) V^{\alpha} V^{\beta} + \Delta T_{\rho\sigma} h^{\alpha\rho} h^{\beta\sigma} + \Delta T^{\rho\sigma} V_{\rho} h_{\sigma}{}^{\beta} V^{\alpha} + \Delta T^{\rho\sigma} V_{\rho} h_{\sigma}{}^{\alpha} V^{\beta} \quad .$$

As expressões (B.13) e (B.14) para uma 4-velocidade arbitrária correspondem a:

$$\Delta T^{0i} \Longrightarrow \Delta T^{\alpha\beta} h_{\alpha}{}^{\sigma} V_{\beta} = \kappa h^{\sigma\lambda} (T_{|\lambda} - T\dot{V}_{\lambda})$$

$$\Delta T^{ij} \Longrightarrow \Delta T^{\rho\sigma} h_{\rho}{}^{\alpha} h_{\sigma}{}^{\beta} = \eta h^{\alpha\mu} h^{\beta\nu} (V_{\mu|\nu} + V_{\nu|\mu} - \frac{2}{3} h_{\mu\nu} V^{\lambda}{}_{|\lambda}) + \xi h^{\alpha\nu} V^{\lambda}{}_{|\lambda}$$

$$\Delta T^{00} = \Delta T^{\mu\nu} V_\mu V_\nu = 0$$

Com isso obtemos a seguinte forma para $\Delta T^{\alpha\beta}$

$$\Delta T^{\alpha\beta} = q^\beta V^\alpha + q^\alpha V^\beta + \eta\pi^{\alpha\beta} + \xi h^{\alpha\beta}\theta \qquad \text{(B.15)}$$

onde

$$q^\alpha = \kappa h^{\alpha\beta}(T_{|\beta} - T\dot{V}_\beta)$$

$$\pi^{\alpha\beta} = h^{\alpha\mu}h^{\beta\nu}(V_{\mu|\nu}+V_{\nu|\mu} - \frac{2}{3}\, h_{\mu\nu}\theta)$$

e

$$\theta = V^\lambda{}_{|\lambda}$$

Finalmente o tensor momento energia para um fluido com efeitos dissipativos é

$$T^{\alpha\beta} = \rho V^\alpha V^\beta - P^* h^{\alpha\beta} + q^\alpha V^\beta + q^\beta V^\alpha + \eta\pi^{\alpha\beta} \qquad \text{(B.16)}$$

onde $p^* = p - \xi\theta$ é a pressão isotrópica e p a pressão termodinâmica.

Com essas expressões podemos escrever a taxa de produção de entropia como:

$$S^\alpha{}_{|\alpha} = \frac{\eta}{2T}\,\pi_{\mu\nu}\pi^{\mu\nu} + \frac{\xi}{T}\,\theta^2 - \frac{1}{\kappa T^2}\, q^\mu q_\mu \geq 0 \qquad \text{(B.17)}$$

como q_μ é do tipo espaço $q^\mu q_\mu < 0$, e com isso o último termo da expressão (B.17) contribue positivamente para a variação da entropia.

APÊNDICE C

CAMPO DE PROCA EM ESPAÇOS CURVOS

A presença de um campo de Proca em um espaço-tempo curvo pode ser descrita canonicamente através da Lagrangeana

$$L = \frac{\sqrt{-g}}{16\pi} \left(R + \lambda m^2 A^\mu A_\mu - F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}\right) + L_\mu \qquad (C.1)$$

onde λ e m são constantes.

L_μ inclue o conteúdo material e o termo de corrente.

Variações dessa Lagrangeana juntamente com o princípio de mínima ação, fornecem as seguintes equações

$$G_{\mu\nu} = -k(E_{\mu\nu}+T_{\mu\nu}) - \lambda m^2 A_\mu A_\nu \qquad (C.2)$$

$$F^{\mu\nu}{}_{\|\nu} + \frac{\lambda}{2} m^2 A^\mu = J^\mu \qquad (C.3)$$

Notamos em (C.1) uma semelhança formal com a Lagrangeana para os campos eletromagnético e gravitacional, acoplados não-minimalmente. No entanto, como veremos, essa semelhança é puramente formal, só se aplicando no caso em que R é constante.

Para a métrica de Einstein:

$$ds^2 = dt^2 - \frac{(dx^2+dy^2+dz^2)}{[1 + \frac{1}{4}(x^2+y^2+z^2)]^2}$$

e usando como 4-potencial o vetor A^{μ}, definido em (3.5) [9], obtemos das equações (C.2) :

$$\binom{0}{0} \quad -3 = -kT^{0}{}_{0} - 4\alpha^{2}$$

$$\binom{0}{1} \quad \lambda m^{2}\alpha^{2}\eta^{i}\eta_{j} = 8\alpha^{2}\eta^{i}\eta_{j} \qquad i \neq j$$

$$\binom{i}{j} \quad -1 = -kT^{i}{}_{i} + 4\alpha^{2} + 8\alpha^{2}\eta^{i}\eta_{i} - \lambda m^{2}\alpha^{2}\eta^{i}\eta_{i} \qquad i = j$$

de onde vem que

$$kT^{0}{}_{0} = 3 - 4\alpha^{2}$$

$$kT^{i}{}_{i} = 1 + 4\alpha^{2}$$

$$\lambda m^{2} = 8$$

As equações (C.3) fornecem:

$$F^{0i} = 0 \Longrightarrow F^{0i}{}_{\|i} = J^{0} = 0$$

$$F^{ij}{}_{\|j} = 4\alpha\eta^{i} = -\frac{\lambda}{2}\, m^{2}\alpha\eta^{i} + J^{i}$$

$$\Longrightarrow J^{i} = 8\alpha\eta^{i}$$

Este resultado é semelhante ao obtido no Capítulo 3, para a mesma métrica e o mesmo potencial. No entanto, para o caso da métrica de F.R.W. a situação muda drasticamente. Para esta métrica temos:

$$ds^{2} = dt^{2} - a^{2}(t)\,\frac{(dx^{2}+dy^{2}+dz^{2})}{[1 + \frac{\varepsilon}{4}\,(x^{2}+y^{2}+z^{2})]^{2}} \qquad = 1,0$$

Utilizando como potencial A^{μ} o mesmo potencial do Ca

pítulo 3, definido pelas expressões (3.16), (3.26), (3.27) e (3.28), ficamos com o seguinte sistema de equações:

$$\binom{i}{j} \quad i \neq j \quad \lambda m^2 \alpha^2 \eta^i \eta_j = \frac{8\alpha^2}{a^2} \eta^i \eta_j - kT^i{}_j$$

$$\binom{0}{i} \quad \lambda m^2 \alpha \beta \eta^i = - k\, T_0{}^i$$

$$\binom{0}{0} \quad - \frac{3}{a^2} (\dot{a}^2 + \varepsilon) + \lambda m^2 \beta^2 = - KT^0{}_0 - 4\alpha^2$$

$$\binom{i}{i} \quad i = j \quad - \frac{1}{a^2}(\dot{a}^2 + \varepsilon) - \frac{2\ddot{a}}{a} + \lambda m^2 A^i A_i =$$

$$= - kT^i{}_i + 4\alpha^2 + \frac{8\alpha^2}{a^2} \eta^i \eta_i$$

Se tomamos $T^i{}_j = 0$, como no Capítulo 3, a primeira dessas equa - ções já se torna incompatível, o que já demonstra que nosso caso não há mais semelhança entre essa abordagem e a desenvolvida no corpo deste trabalho. Mesmo admitindo que $T^i{}_j \neq 0$ a situação se torna muito complexa. É pouco provável que haja uma solução simples para o sistema de equações acima. O único caso analisado foi o caso mais imediato em que escolhemos a seção plana ($\varepsilon=0$), $\beta = 0$ e α = cte. Para esse caso as equações (C.2) se resumem a:

$$\binom{i}{j} \quad i \neq j \qquad 8\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{8}{a^2} = \lambda m^2$$

cuja solução é

$$a(t) = \frac{1}{\omega} \cos h\, \omega t$$

onde $\omega = \sqrt{\lambda m^2/8}$

Com esse resultado as outras equações fornecem

$$8\pi\rho = 3\omega^2 \text{ tg } h^2 \omega t - 4\alpha^2 \cos h^2 \omega t \qquad (C.4)$$

$$8\pi p = -\omega^2 \text{ tg } h^2 \omega t - 2\omega^2 - 4\alpha^2 \cos h^2 \omega t \qquad (C.5)$$

Além disso, as equações (C.3) fornecem

$$F^{0i}{}_{\|i} = 0 = J^0$$

$$F^{i\nu}{}_{\|\nu} = \frac{3}{4}\lambda m^2 \alpha \eta^i = -\frac{\lambda}{2} m^2 \alpha \eta^i + J^i$$

$$\Longrightarrow J^i = \frac{5}{4}\lambda m^2 \alpha \eta^i$$

Esta solução, apesar de matematicamente correta, não é uma "boa" solução em termos físicos, visto que a densidade em (C.4) se torna negativa em determinadas etapas na evolução temporal da solução (ver Fig. C.1) e a pressão é sempre negativa para qualquer tempo. Esses exemplos demonstram que a idéia de que o acoplamento não mínimo é equivalente à atribuição de uma massa ao campo eletromagnético é falsa. Essa equivalência só é "válida aproximadamente" no caso em que $\underline{R}$ é constante.

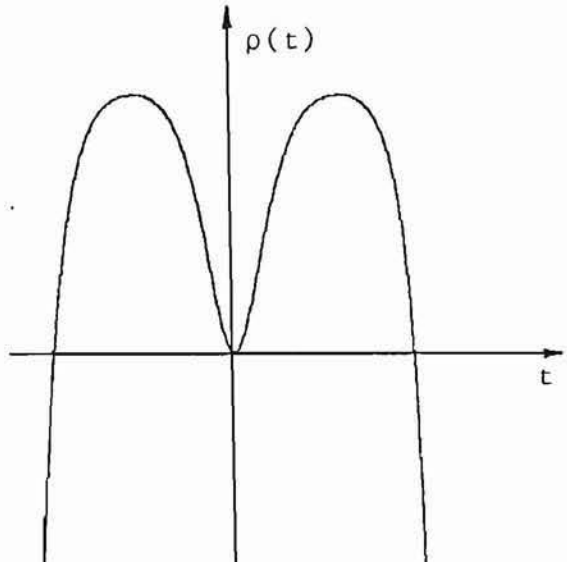


FIGURA C.1 - Gráfico da densidade como função do tempo.

BIBLIOGRAFIA

(1) - Bergman, P.G., Handbook of Physics, ed. S. Flugge (1962), vol. 4, p. 205.

(2) - Anderson, J.L., Gautreau, R., Operational Formulation of the Principle of Equivalence, Phys. Rev. 5(1969)1656.

(3) - Papapetrou, A., Spinning Test - Particles in General Relativity, Proc. Roy. Soc. London, A209(1951)248.

(4) - Drummond, I.T., Hathrell, S.J., QED Vacuum Polarization in a Background Gravitational Field and its Effect on the Velocity of Photons, Phys. Rev. D22(1980)343.

(5) - Manasse, F.K., Misner, C.W. - Fermi Normal Coordinates and some Basic Concepts in Differential Geometry, J. Math.Phys. 4(1963)735.

(6) - Misner, C.W., Thorne, K.S., Wheeler, J.A. - Gravitation , W.H. Freeman and Company (1973).

(7) - Landau, L.D., Lifshitz, E.M. - The Classical Theory of Fields, 2nd Ed., Pergamon Press (1975).

(8) - Novello, M., Salim, J.M. - Nonlinear Photons in the Universe, Phys. Rev. D20(1979)377.

(9) - Costa, J.L.C., Wolk, I., Teixeira, A.F.F. - Closed Homogeneous Cosmology with Massive Magnetic Field, Phys. Rev.D29 (1984)2402.

(10) - Rückert, E.V. - Um Estudo do Acoplamento Não-Mínimo entre a Gravitação e o Eletromagnetismo, Tese de Mestrado-CBPF (1982).

(11) - Novello, M., Heintzmann - Weyl Integrable Space-time: A Model of our Cosmos ?, Phys. Lett. 98A(1983)10.

(12) - Synge, J.L. - Relativity, the General Theory, North-Holland Publishing Co. (1960).

(13) - Ellis, G.R.F. - Relativistic Cosmology, Rendiconti Scuola Enrico Fermi, XLVII Corso, Academic Press (1971).

(14) - Coley, A.A., Tupper, B.O.J. - Zero-Curvature Friedmann-Robertson-Walker Model as Exact Viscous Magneto Hydrodynamic Cosmologies - Astrophysical J. 271(1983)1.

(15) - Sommerville, D.M.Y. - The Elements of Non-Euclidean Geometry, Dover Publications (1958).

(16) - Teixeira, A.F.F. - Introdução à Triesfera, Monografia , CBPF, MO-002/84(1984).

(17) - Hawking, S.W., Ellis, G.R.F. - The Large Scale Structure of Space-Time, Cambridge University Press (1973).

(18) - Lim, P.H. - Modification of the Palatini Variational Principle in General Relativity, Phys.Rev. D27(1983)719.

(19) - Rindler, W. - Visual Horizons in World- Models, Mon. Not. Roy. Soc. 116(1956)662.

(20) - Eckart, C. - The Thermodynamics of Irreversible Processes - III Relativistic Theory of Simple Fluid, Phys. Rev. 58 (1940)919.

(21) - Weinberg, S. - Gravitation and Cosmology, John Wiley & Sons (1972).

(22) - Landau, L.D., Lifshitz, E.M. - Fluid Mechanics, Pergamon Press (1959).

(23) - Salim, J.M. - Equações Quase-Maxwellianas da Gravitação: Aplicação às Perturbações dos Modelos de Friedmann, Tese de Doutorado - CBPF (1982).

(24) - Zel'dovich, Ya. B. - The Hot Model of the Universe, Sov. Phys. Uspekhi 9(1967)602.

"FÓTONS NÃO LINEARES:
UMA SOLUÇÃO COSMOLÓGICA NÃO SINGULAR"

GILVAN AUGUSTO ALVES

Tese de Mestrado apresentada no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, fazendo parte da Banca Examinadora os seguintes professores:

José Martins Salim - Presidente

Carlos Marcio do Amaral

Takeshi Kodama

Rio de Janeiro, 27 de junho de 1986