

# Mesure de déplacements par technique hétérodyne

Service : Instrumentation Capteurs et Détecteurs

N. Servagent

*Rapport interne SUBATECH 2004-03*

# MESURE DE DEPLACEMENTS PAR TECHNIQUE HETERODYNE

## TABLE DES MATIERES

|       |   |   |
|-------|---|---|
| 1.    | Mouvement sinusoidal .....                          | 1 |
| 1.1   | Intensité d'interférence .....                      | 1 |
| 1.1.1 | Expression .....                                    | 1 |
| 1.1.2 | Etude spectrale .....                               | 3 |
| 2.    | Mouvement quelconque .....                          | 4 |
| 2.1   | Intensité d'interférence .....                      | 4 |
| 2.1.1 | Expression .....                                    | 4 |
| 2.1.2 | Etude spectrale .....                               | 6 |
| 3.    | Traitement du signal .....                          | 6 |
| 3.1   | Démodulateur à boucle à verrouillage de phase ..... | 7 |
| 3.2   | Démodulateur à détection cohérente .....            | 8 |

# 1. MOUVEMENT SINUSOIDAL

## 1.1 INTENSITE D'INTERFERENCE

### 1.1.1 Expression

Le dispositif expérimental du vibromètre interférométrique hétérodyne proposé par D. ROYER et E. DIEULESAINT [1] est le suivant :

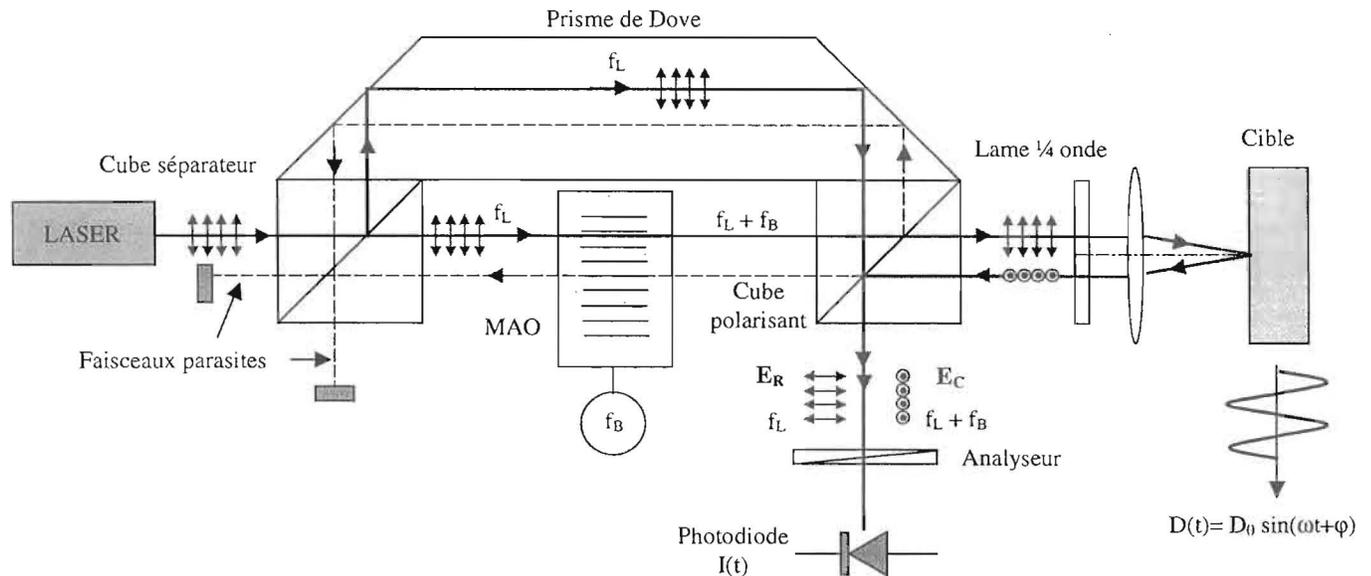


Figure 1 Le dispositif général du vibromètre hétérodyne

L'onde lumineuse émise par le LASER, polarisée horizontalement, se divise en deux faisceaux de même polarisation via un premier cube séparateur non polarisant. L'un de ces faisceaux, appelé faisceau de référence, est dévié par le prisme de Dove et traverse le second cube séparateur sans altération. Le second faisceau, appelé faisceau cible, est décalé en fréquence optique de quelques dizaines de MHz par un modulateur acousto-optique. Sa polarisation est rendue circulaire par une lame quart d'onde avant qu'il soit réfléchi par la cible de type miroir. L'onde au retour, après un deuxième passage dans la lame quart d'onde est polarisée verticalement. Le cube séparateur polarisant dévie ainsi cette onde perpendiculairement en direction de la photodiode. Afin d'obtenir une visibilité d'interférence optimale (proche de 1), les deux faisceaux référence et cible traversent un analyseur (polariseur rectiligne) avant de frapper la photodiode.

Dans le cas d'une cible diffusante, l'onde en retour sera totalement dépolarisée et le passage par la lame quart d'onde ne modifiera en rien cet état de polarisation. Ainsi la perte théorique d'intensité au niveau du cube polariseur sera de 50% au lieu de 0%. Une visibilité optimale pourra tout de même être obtenue mais l'amplitude maximale d'interférence sera diminuée de moitié.

Afin d'éliminer les faisceaux parasites dus à des réflexions résiduelles D. ROYER propose de décaler l'axe optique de la lentille de focalisation par rapport au faisceaux laser incident (cf. figure ci dessus).

Nous allons à présent établir la relation donnant l'intensité d'interférence  $I(t)$ , traduit en signal électrique par la photodiode, ceci dans le cas d'un mouvement sinusoïdal de l'objet cible. Le déplacement de cet objet sera défini par l'amplitude  $D_0$ , la fréquence  $f = 2\pi/\omega$  et la phase  $\phi$ .

$$D(t) = D_0 \cdot \sin(\omega t + \phi) \quad \text{Eq. 1}$$

[1] D. ROYER et E. DIEULESAINT « Mesure optiques de déplacements d'amplitude  $10^{-4}$  à  $10^2$  Angström. Application aux ondes élastiques » : Resue de Physique Appliquée 24, Août 1989, pp833-846.

Introduisons l'écriture complexe des ondes référence et cible.

Le champ électrique de l'onde référence en provenance directe de la source LASER s'écrit :

$$E_R = E_{R0} \cdot \exp(j \cdot (\Omega_R t + \Phi_R)) \quad \text{Eq. 2}$$

Où  $E_{R0}$  est l'amplitude du champs,  $\Omega_R$  la pulsation et  $\Phi_R$  la phase de l'onde de référence.

L'onde cible est en premier lieu décalée en fréquence optique par le modulateur acousto-optique de la pulsation  $\omega_B = 2\pi \cdot f_B$ , elle est ensuite réfléchiée par la cible dont le déplacement  $D(t)$  induit une modification de chemin optique  $2 \cdot k \cdot D(t)$  où  $k = 2\pi/\lambda$  est le nombre d'onde ( $\lambda$  la longueur d'onde du LASER).

Le champ électrique de l'onde cible est donc :

$$E_C = E_{C0} \cdot \exp(j \cdot (\Omega_C t + \Phi_C + 2 \cdot k \cdot D_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi))) \quad \text{Eq. 3}$$

Où  $E_{C0}$  est l'amplitude du champs,  $\Omega_C$  la pulsation et  $\Phi_C$  la phase de l'onde, .

La présence de l'analyseur permet d'obtenir un contraste optimal en égalisant les amplitudes de ces deux ondes, ainsi :  $E_{C0} = E_{R0} = E_0$ .

Ces deux ondes étant cohérentes entre elles, l'intensité d'interférence  $I(t) \approx \|(E_C + E_R)\|^2$  en sortie de l'analyseur est :

$$I(t) = I_0 (1 + \cos[\omega_B t + 2 \cdot k \cdot D_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi) + \Phi_C - \Phi_R]) \quad \text{Eq. 4}$$

$$\text{avec } \omega_B = \Omega_C - \Omega_R$$

Nous observons que l'écriture de l'intensité d'interférence est identique aux signaux radio-fréquences émis par la technique de la Modulation de Fréquence (FM).

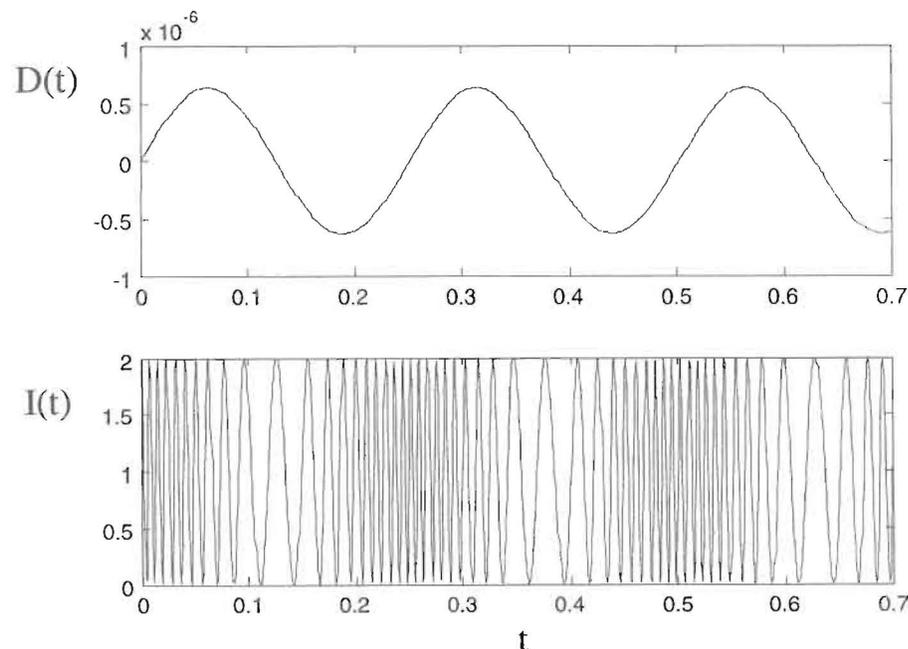


Figure 2 Intensité d'interférence pour un déplacement sinusoïdal  $D(t) = \lambda \cdot \sin(25 \cdot t)$  ( $\omega_B = 500 \text{ rad/s}$  ;  $I_0 = 1$  et les phases  $\Phi_C = \Phi_R = 0$ )

## 1.1.2 Etude spectrale

L'intensité d'interférence donnée par la relation Eq. 4 peut être développée comme suit :

$$I(t) = I_0 (1 + \cos(\gamma) \cdot \cos(\alpha \sin(\beta)) - \sin(\gamma) \cdot \sin(\alpha \sin(\beta))) \quad \text{Eq. 5}$$

$$\text{avec } \gamma = \omega_B t + \Phi_C - \Phi_R ; \alpha = 2.k.D_0 ; \beta = \omega t + \varphi$$

La composition de fonction trigonométrique  $\cos(\alpha \cdot \sin(\beta))$  et  $\sin(\alpha \cdot \sin(\beta))$  peut s'exprimer en série de fonctions de Bessel suivant :

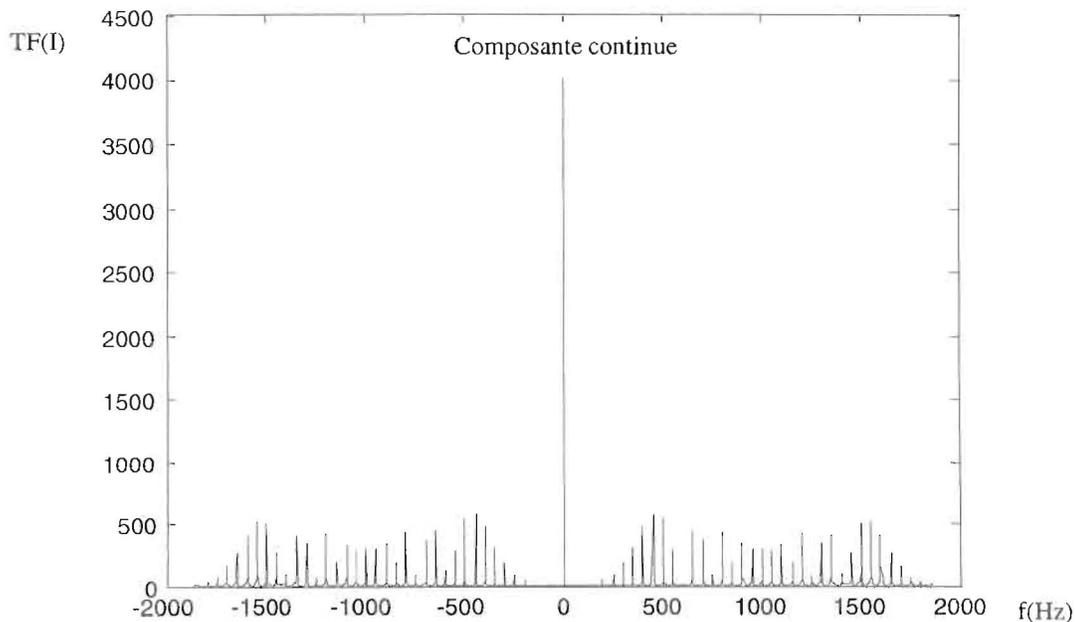
$$\begin{cases} \cos(\alpha \cdot \sin(\beta)) = J_0(\alpha) + 2 \sum_{p=1}^{\infty} J_{2p}(\alpha) \cdot \cos(2p \cdot \beta) \\ \sin(\alpha \cdot \sin(\beta)) = 2 \sum_{p=1}^{\infty} J_{2p-1}(\alpha) \cdot \sin((2p-1) \cdot \beta) \end{cases} \quad \text{Eq. 6}$$

*Mathematical handbook p 862.*

L'intensité d'interférence peut ainsi s'écrire comme une série de fonctions harmoniques dont les amplitudes sont des fonctions de Bessel.

$$\begin{aligned} I(t) = I_0 & (1 + J_0(2.k.D_0) \cos(\omega_B t + \Phi_C - \Phi_R) + \\ & J_1(2.k.D_0) [\cos((\omega_B + \omega)t + \varphi + \Phi_C - \Phi_R) - \cos((\omega_B - \omega)t - \varphi + \Phi_C - \Phi_R)] + \\ & J_2(2.k.D_0) [\cos((\omega_B + 2\omega)t + 2\varphi + \Phi_C - \Phi_R) + \cos((\omega_B - 2\omega)t - 2\varphi + \Phi_C - \Phi_R)] + \\ & J_3(2.k.D_0) [\cos((\omega_B + 3\omega)t + 3\varphi + \Phi_C - \Phi_R) - \cos((\omega_B - 3\omega)t - 3\varphi + \Phi_C - \Phi_R)] + \dots) \end{aligned} \quad \text{Eq. 7}$$

Le spectre du signal de photodiode est donc constitué de pics de Dirac dont les amplitudes sont des fonctions de Bessel et dont l'espacement vaut la fréquence du mouvement de la cible.



**Figure 3** Spectre de l'intensité d'interférence pour un déplacement sinusoïdal  
( $2.k.D_0 = 4\pi$ ,  $\omega_B / 2\pi = 1000\text{Hz}$ ;  $\omega / 2\pi = 50\text{Hz}$ ,  $I_0 = 1$  et les phases  $\Phi_C = \Phi_R = 0$ )

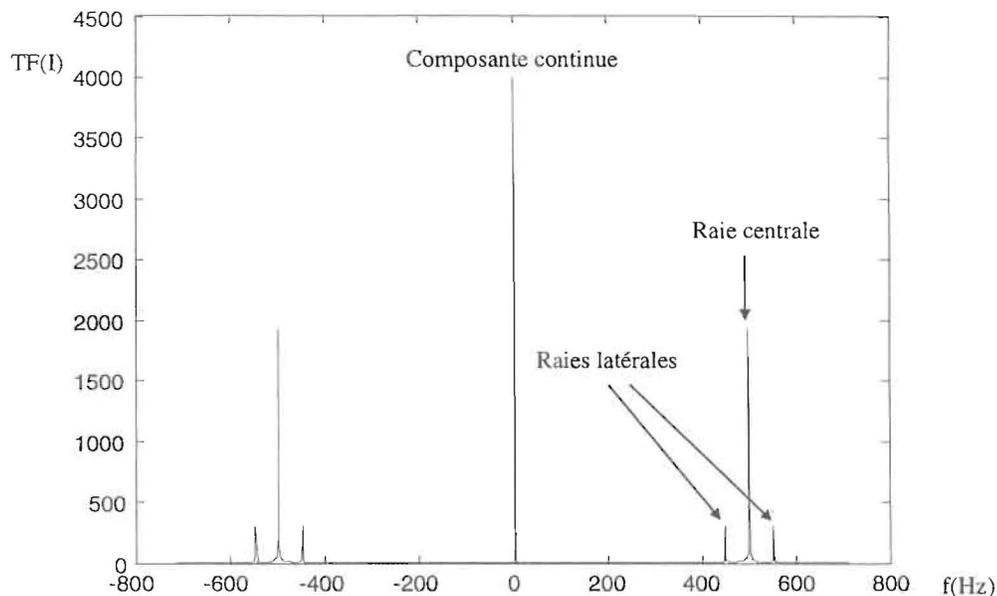
Remarquons que dans le cas où l'amplitude de vibration de l'objet et donc l'amplitude de modulation est très faible, les fonctions de Bessel peuvent être simplifiées comme suit :

$$D_0 \rightarrow 0 \Rightarrow \begin{cases} J_0(2.k.D_0) \rightarrow 1 \\ J_1(2.k.D_0) \rightarrow 2.k.D_0 \\ n \geq 2; J_n(2.k.D_0) \rightarrow 0 \end{cases} \quad \text{Eq. 8}$$

Aussi l'écriture de l'intensité d'interférence devient :

$$I(t) = I_0(1 + \cos(\omega_B t + \Phi_C - \Phi_R) + 2.k.D_0[\cos((\omega_B + \omega)t + \varphi + \Phi_C - \Phi_R) - \cos((\omega_B - \omega)t - \varphi + \Phi_C - \Phi_R)]) \quad \text{Eq. 9}$$

Le spectre se réduit alors à une raie centrale à la fréquence porteuse  $\omega_B/2\pi$  (celle du modulateur acousto-optique) et deux raies latérales à  $(\omega_B \pm \omega)/2\pi$  comme le montre la figure suivante:



**Figure 4** Spectre de l'intensité d'interférence pour un déplacement sinusoïdal de faible amplitude ( $2.k.D_0 = \pi/10$ ,  $\omega_B/2\pi = 500\text{Hz}$ ;  $\omega/2\pi = 50\text{Hz}$ ,  $I_0 = 1$  et les phases  $\Phi_C = \Phi_R = 0$ )

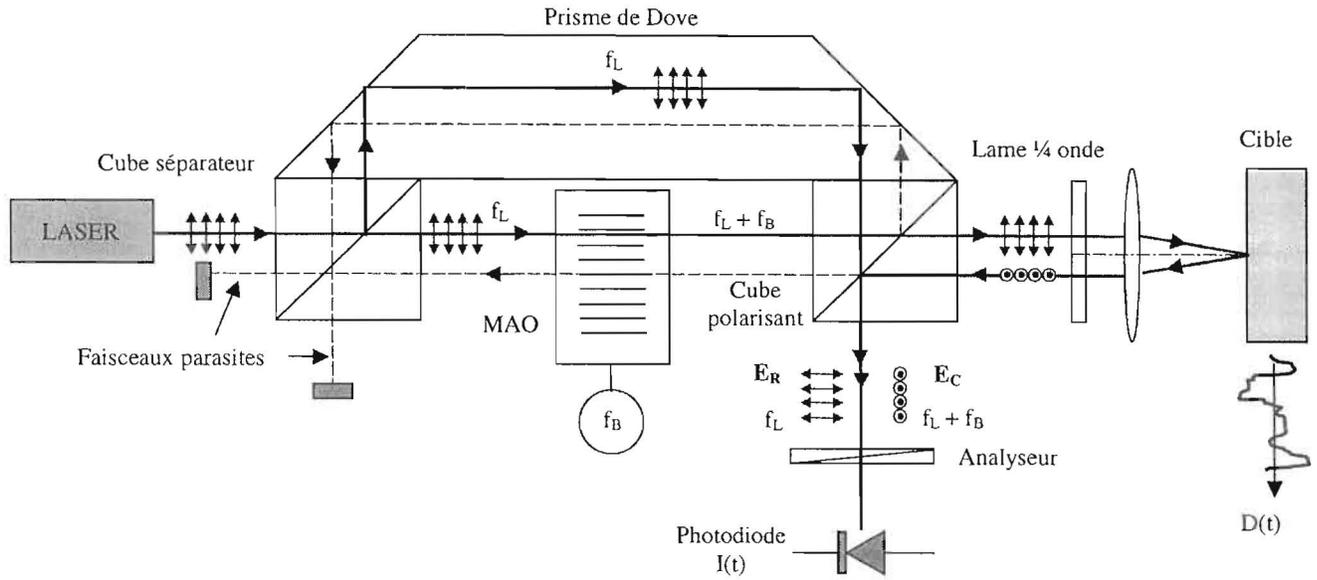
Dans ce cas particulier, la faible amplitude du mouvement peut être déduit directement de l'affichage d'un analyseur spectrale en faisant le rapport des amplitudes d'une des deux raies latérales sur celle de la raie centrale. Il est à remarquer que des fluctuations aléatoires des phases cible ( $\Phi_C$ ) et référence ( $\Phi_R$ ) ne perturbent pas la mesure de l'amplitude de mouvement puisque ces phases affectent de la même manière la raie centrale et les raies latérales.

## 2. MOUVEMENT QUELCONQUE

### 2.1 INTENSITE D'INTERFERENCE

#### 2.1.1 Expression

Nous reprenons le même dispositif expérimental du vibromètre interférométrique hétérodyne proposé par D. ROYER et E. DIEULESANT:

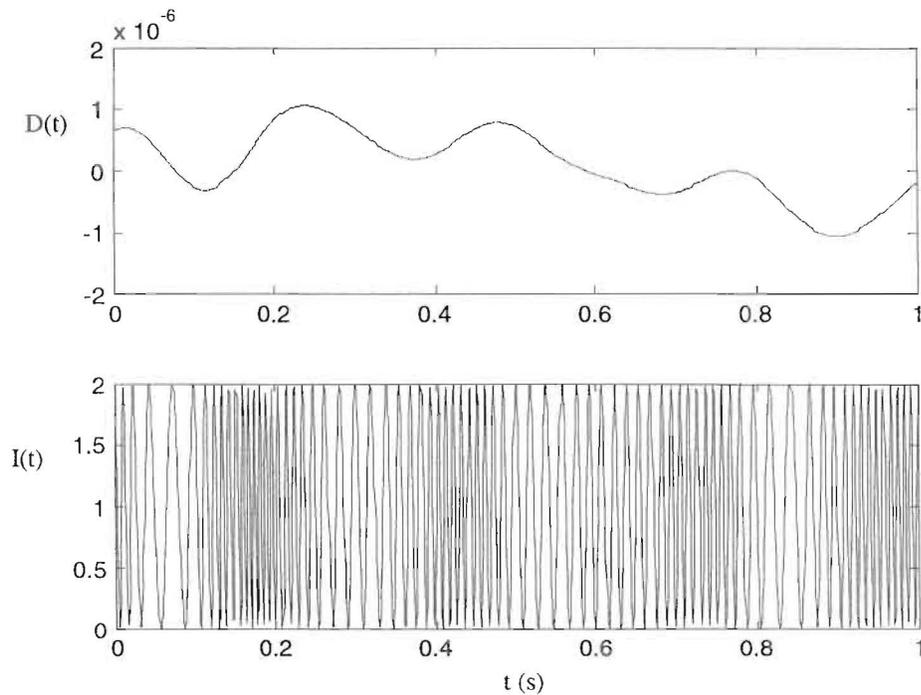


**Figure 5 Le dispositif général du vibromètre hétérodyne**

L'intensité d'interférence dans le cas d'un mouvement de cible quelconque est donnée par la relation suivante :

$$I(t) = I_0 (1 + \cos[\omega_B t + 2.k.D(t) + \Phi_C - \Phi_R]) \quad \text{Eq. 10}$$

Où pour rappel,  $I_0$  est l'intensité moyenne,  $\omega_B$  la pulsation du modulateur acousto-optique,  $k$  : le nombre d'onde,  $\Phi_C$  : la phase de l'onde cible et  $\Phi_R$  : la phase de l'onde de référence.



**Figure 6 Intensité d'interférence pour un déplacement quelconque  $D(t)$  ( $\omega_B = 500\text{rad/s}$  ;  $I_0 = 1$  et les phases  $\Phi_C = \Phi_R = 0$ )**

Lorsque le déplacement est de très faible amplitude tel que  $2kD(t) \rightarrow 0$  alors :

$$I(t) = I_0 (1 + \cos(\omega_B t + \Phi_C - \Phi_R) - 2k.D.\sin(\omega_B t + \Phi_C - \Phi_R)) \quad \text{Eq. 11}$$

### 2.1.2 Etude spectrale

Dans le cas d'un déplacement quelconque le spectre de l'intensité d'interférence ne présente pas de particularités remarquables.

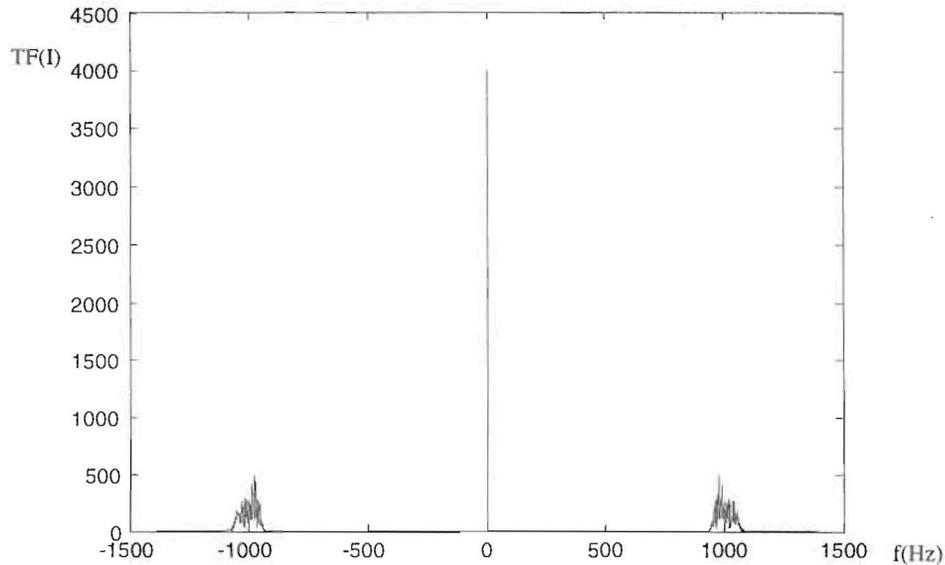


Figure 7 Spectre de l'intensité d'interférence pour le déplacement quelconque de la Figure 6 ( $\omega_B = 2\pi \cdot 1000 \text{ rad/s}$ )

Dans le cas d'un déplacement de très faible amplitude dont le spectre est borné par les pulsations  $\omega_1 \neq 0$  et  $\omega_2$ , on visualise directement le spectre de déplacement TF(D) sur celui de l'intensité d'interférence comme le montre la figure ci dessous.

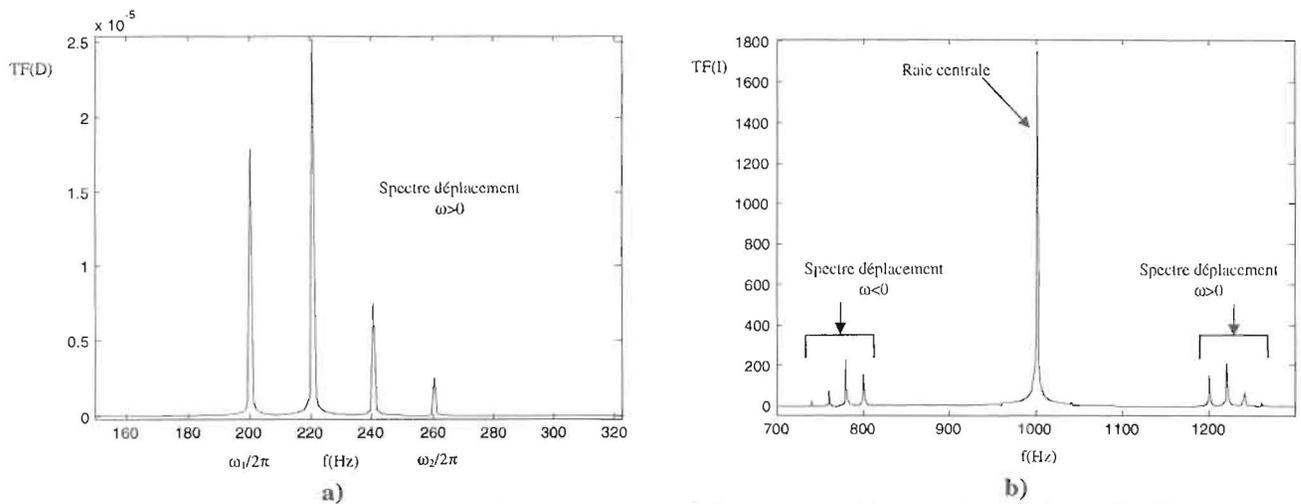


Figure 8 Spectre de l'intensité d'interférence pour un déplacement quelconque de faible amplitude  
 a) Spectre du déplacement (somme de 4 harmoniques espacées de 20Hz)  
 b) Spectre de l'intensité d'interférence ( $\omega_B = 2\pi \cdot 1000 \text{ rad/s}$ )

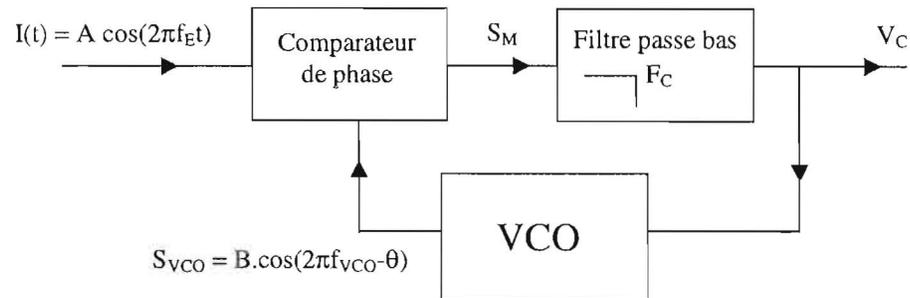
## 3. TRAITEMENT DU SIGNAL

Plusieurs types de démodulations FM sont disponibles dans la littérature suivant les caractéristiques d'amplitude et d'étalement spectral du mouvement de la cible. Pour un mouvement quelconque, par définition d'étalement spectral non nul, un traitement du signal FM à large bande passante est à considérer.

### 3.1 DEMODULATEUR A BOUCLE A VEROUILLAGE DE PHASE

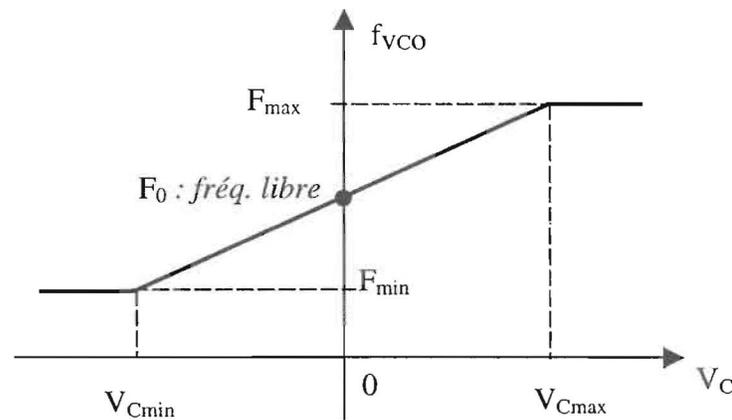
Les boucles à verrouillage de phase ou PLL (Phase Locked Loop) sont des circuits intégrés très utilisés en électronique. Leur fonction est d'asservir la phase d'un oscillateur local à celle d'un signal extérieur. Elles sont notamment utilisées dans les synthétiseurs de fréquence, récepteurs de télévision, téléphones cellulaires, etc...

La figure suivante montre le principe d'une boucle à verrouillage de phase.



**Figure 9** Boucle à verrouillage de phase. Démodulateur FM

L'oscillateur local VCO (Voltage Controlled Oscillator) délivre un signal de fréquence  $f_{VCO}$  proportionnelle à la tension de commande  $V_C$ , ceci sur une plage de fréquence limitée par  $F_{min}$  et  $F_{max}$  comme le montre la figure ci dessous. Ce signal sinusoïdal d'amplitude constante  $B$  est déphasé de  $\theta$  par le VCO lui même suivant un critère que nous définirons ultérieurement.



**Figure 10** Caractéristique linéarisée tension fréquence du VCO

Au regard de cette précédente figure, sur son domaine linéaire, la fréquence délivrée en sortie du VCO en fonction de sa tension de commande est donnée par :

$$f_{VCO} = V_C \frac{F_{max} - F_{min}}{V_{max} - V_{min}} + F_0 \quad \text{Eq. 12}$$

Le comparateur de phase a pour fonction de faire apparaître à sa sortie un terme dont la phase vaut la différence des phases des deux signaux en provenance de l'entrée dans la boucle et de la sortie du VCO. Nous choisissons arbitrairement pour assurer la fonction de comparateur de phase un multiplieur analogique. Le signal  $S_M$  en sortie d'un tel circuit est :

$$S_M = K \frac{AB}{2} [\cos(2\pi(f_E + f_{VCO})t - \theta) + \cos(2\pi(f_E - f_{VCO})t + \theta)] \quad \text{Eq. 13}$$

Ce signal est ensuite filtré par un filtre passe bas que nous idéalisons par un gain unitaire pour les fréquences inférieures à la fréquence de coupure  $F_C$  et nul pour les fréquences supérieures.

Si la fréquence du signal d'entrée  $f_E$  est comprise dans la *plage de capture*  $[(F_0-F_C) (F_0+F_C)]$  (cf littérature sur les PLL), le signal  $V_C$  de commande du VCO lorsque le régime stationnaire est atteint est alors constant et s'exprime comme suit :

$$V_C(\theta) = K \frac{AB}{2} \cos(\theta) \quad \text{avec } \theta \text{ tel que } f_{VCO}(V_C(\theta)) = f_E \quad \text{Eq. 14}$$

Où  $K$  est une constante.

Le VCO suit ainsi la fréquence d'entrée, on dit qu'il est verrouillé et le restera pour  $f_E$  comprise dans la *plage de verrouillage*  $[F_{\min} F_{\max}]$  (cf littérature sur les PLL) ceci sous certaines conditions de rapidité de fluctuation de cette fréquence.

Dans le cas du signal de type modulation FM du vibromètre hétérodyne, la relation Eq. 10 montre que la fréquence instantanée du signal d'entrée dans le cas d'un mouvement quelconque de la cible est :

$$f_E = f_B + \frac{2}{\lambda} \cdot v + \frac{1}{2\pi} \frac{d(\Phi_C - \Phi_R)}{dt} \quad \text{Eq. 15}$$

Où  $v$  est la vitesse instantanée de l'objet cible.

En tenant compte de la condition de verrouillage de phase  $f_{VCO} = f_E$ , les relations Eq. 12 et Eq. 14 permettent d'obtenir la vitesse de l'objet altérée par le bruit de phase lié à des chemins optiques référence et cible perturbés.

$$v = \frac{\lambda}{2} \cdot \left( \frac{F_{\max} - F_{\min}}{V_{\max} - V_{\min}} V_C + F_0 - f_B \right) + \text{Bruit} \quad \text{Eq. 16}$$

$$\text{avec : } \text{Bruit} = \frac{\lambda}{\pi} \frac{d(\Phi_R - \Phi_C)}{dt}$$

Le déplacement de la cible est donnée par l'intégration de la relation précédente, soit en considérant les perturbations des chemins optiques de l'interféromètre comme négligeables :

$$D(t) - D(t_0) = \frac{\lambda}{2} \cdot \left( \frac{F_{\max} - F_{\min}}{V_{\max} - V_{\min}} \int_{t_0}^t V_C \cdot dt + (F_0 - f_B)(t - t_0) \right) \quad \text{Eq. 17}$$

## 3.2 DEMODULATEUR A DETECTION COHERENTE

Un démodulateur à large bande passante a été proposé par D. ROYER pour des déplacements de très faibles amplitudes. Il permet d'obtenir directement le déplacement de la cible sans passer préalablement par sa vitesse. De plus le bruit de phase induit par les trajets optiques différents des faisceaux référence et cible est éliminé par une détection cohérente. Ce démodulateur n'est cependant utilisable que dans le cas où le spectre du déplacement ne « commence » pas à fréquence nulle et lorsque le bruit de phase est de fréquence plus basse que le domaine spectral du déplacement.

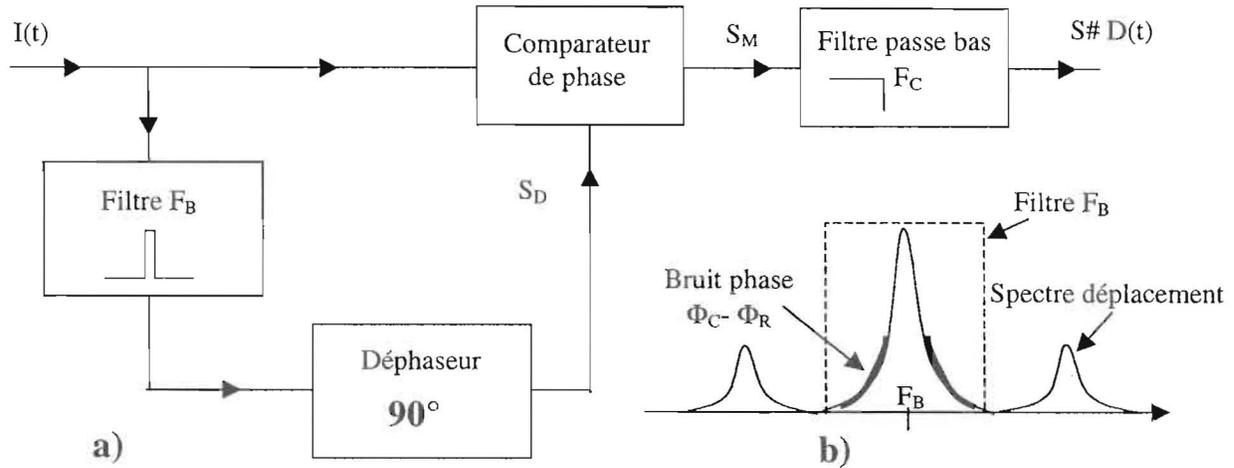


Figure 11 Démodulateur à détection cohérente

La figure précédente montre le schéma de principe du démodulateur FM à détection cohérente. L'intensité d'interférence est filtrée par un filtre à bande étroite centré en la fréquence du modulateur acousto-optique  $F_B$ . La faible largeur de la bande passante est telle que le spectre du bruit de phase est inclus sans atteindre le spectre du déplacement comme le montre la Figure 11 b). Le signal est ensuite déphasé de  $90^\circ$  avant d'être mis en comparaison de phase avec le signal d'intensité. A partir de la relation Eq. 11 donnant l'intensité d'interférence pour de très faibles amplitudes de déplacements, nous pouvons déduire le signal  $S_D$  :

$$S_D \approx I_0 \cdot \cos(\omega_B t + \pi/2 + \Phi_C - \Phi_R) \quad \text{Eq. 18}$$

Le comparateur de phase est ici arbitrairement un multiplieur. Le signal  $S_M$  est donc :

$$S_M = K \cdot I_0^2 \cdot \left\{ \cos(\omega_B t + \pi/2 + \Phi_C - \Phi_R) - \frac{1}{2} \cos(2\omega_B t + 2\Phi_C - 2\Phi_R) + \right. \\ \left. kD(t) \cdot [1 + \sin(2\omega_B t + 2\Phi_C - 2\Phi_R)] \right\} \quad \text{Eq. 19}$$

Après filtrage par un filtre passe bas de fréquence de coupure  $F_C < F_B$  le signal de sortie  $S(t)$  fait apparaître une proportionnalité directe avec le déplacement de la cible.

$$D(t) = \frac{S(t)}{K \cdot I_0^2 \cdot k} \quad \text{Eq. 20}$$

Où, pour rappel,  $K$  est une constante liée au multiplieur,  $I_0$  l'intensité moyenne et  $k$  le nombre d'onde.