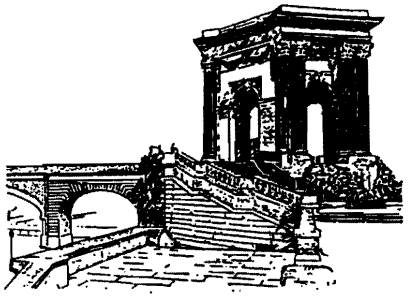
LABORATOIRE DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

MONTPELLIER



Fermilab Library
0 1160 0026044 2

PM 93-30
September

PM-93-30

Introduction générale aux problèmes inverses de diffusion

P.C. SABATIER
Laboratoire de Physique Mathématique
et Théorique - CNRS-URA 768
Université Montpellier II - France

Abstract : Inverse scattering problems are introduced, with a particular care of inverse diffraction as regards the physical point of view, and of uniqueness problems as regards the mathematical point of view.

1 Introduction

Un bébé apprend à interpréter ses informations visuelles. Ainsi la diffusion de la lumière par les objets lui permet-elle, sans toucher les objets eux mêmes, d'appréhender leurs distances, leur forme, leur couleur, la texture de leur surface, etc. Bébé résoud ainsi pour la première fois un problème inverse de diffusion, et, si l'on pense par exemple aux distances, a pour la première fois l'occasion de comprendre que le problème peut être mal posé, c'est à dire que l'information peut être insuffisante pour évaluer les paramètres souhaités. Nous allons voir ensemble d'autres problèmes inverses de diffusion, et des problèmes voisins afin de mieux comprendre leur importance, leurs succès, leurs difficultés.

LIBRARY
DEC 09 1993

2 Description de problèmes inverses de diffusion

2.1 Les Sondages

Au cours d'un sondage, des signaux sont émis en direction d'une cible, et, qu'il s'agisse d'un "milieu traversé" ou d'un "obstacle", diffusés par elle. Les signaux diffusés sont ensuite analysés, et l'information qu'ils contiennent utilisée pour connaître la cible. Le problème physique va donc être décrit par un certain nombre de grandeurs caractéristiques de la nature du sondage, les paramètres représentant la cible, et les mesures effectuées. L'acte de modélisation conduit à représenter le problème par une application $\mathcal{M}$ d'un ensemble $\mathcal{C}$ de paramètres dans un ensemble $\mathcal{E}$ de résultats, chacun d'eux "largement" définis pour être des espaces mathématiques simples, généralement normés, quitte à introduire des contraintes qui délimitent dans $\mathcal{C}$ le sous ensemble de paramètres $\mathcal{C}_0$ physiquement acceptables. Evidemment l'image $\mathcal{M}(\mathcal{C}_0)$ sera toujours "plus petite" que $\mathcal{E}$. Il est essentiel que la topologie définie dans chacun des deux espaces ait un sens physique, que donc elle permette dans $\mathcal{C}$ une comparaison satisfaisante des paramètres et dans $\mathcal{E}$ la prise en compte des erreurs. Cette précaution laisse en général peu de liberté de choix dans $\mathcal{E}$. Passons maintenant en revue quelques données des problèmes physiquement rencontrés.

(a) Grandeurs caractéristiques des sondages

(a1) nature du porteur des signaux : ondes acoustiques, élastiques, électromagnétiques, ou bien ondes de matière (faisceaux de particules).

(a2) position et nature de la source : une ou plusieurs ondes planes arrivant de l'infini ("directions d'illumination") ou bien onde plus ou moins centrée, éventuellement interne au milieu (source "ponctuelle" ou "étalée"), ou bien grand nombre de directions d'illumination ou de sources avec positions géographiquement corrélées (tomographie, scanning).

(a3) nature des signaux : onde stationnaire, "pulse" de courte durée, ou bien, en cas limite dans des problèmes voisins, courants continus.

(a4) conditions de propagation : rectiligne (ex. sondages X, γ) ou bien propagation en rais incurvés par le milieu physique (cela veut dire que la direction de propagation de l'énergie est concentrée au voisinage d'une ligne appelée le rai - ex. sondages acoustiques ou élastiques de courtes longueur d'onde - les rais sont alors trajectoires orthogonales des surfaces d'onde et la propagation est dite semiclassique) - ou bien propagation ondulatoire loin de l'approximation semiclassique (sondages diffractifs). Dans des problèmes voisins, la partie "propagation" peut se réduire à un transitoire non étudié et une grandeur établie (courant ou champ) est seule mesurée (tomographie de résistivité, MEG).

(b) Catactéristiques des mesures

Les mesures vont être définies par

(b1) leur position : proches ou lointaines, coincidant avec la position de la source

(mesure dite monostatique par les radaristes, ou zero offset par les sismiciens), ou pas (mesures multistatiques). Il peut n'y avoir que quelques mesures ou un grand nombre - disposées au hasard ou corrélées (tomographie).

(b2) leur nature. L'intensité du signal ou une grandeur de même nature, est plus facile à atteindre que l'intensité et la phase, qui donnent l'amplitude, et s'il y a lieu la polarisation. Cette intensité est évidemment liée à celle du ou des faisceaux incidents. Prenons une seule direction d'illumination. Si les interactions sont toutes homogènes (en particulier dans le cas linéaire) la quantité importante est évidemment le rapport de l'intensité des signaux de type donné émergents dans une direction donnée à celle du faisceau incident. Pour les faisceaux de particules, on utilise couramment une variante de cette notion, la section efficace, qui est le rapport du nombre de particules d'un type et état donnés comptées sortantes dans un pinceau d'angle solide $(\Omega, d\Omega)$ à $d\Omega$ fois la densité du faisceau de particules incident, mesurée dans une section droite.

(c)Exemples de tomographies de sondages

Les analyses d'information à grand nombre de sources ou/et de mesures géométriquement corrélées sont les plus riches en général et il est bon d'en avoir quelques exemples à l'esprit. Le plus simple est la tomographie X ou γ, mise en oeuvre dans les scanners médicaux ou autres, caractérisée par des rais droits, et par plusieurs dizaines d'observation et de mesures. Chaque mesure physique donne alors l'intégrale de l'opacité du milieu suivant le rai, et l'analyse inverse cherchera à établir une carte de cette opacité - quitte aux médecins ou aux physiciens à relier l'opacité au paramètre qui les intéresse particulièrement. Plus complexe, la tomographie acoustique en milieu de densité variable met en oeuvre plusieurs émetteurs servant aussi de récepteurs et joints entre eux par plusieurs rais courbes si les sources ont un spectre assez large. On peut considérer que l'exploration du globe terrestre par analyse des sismogrammes correspondant aux divers tremblements de terre, et recueillis dans un grand nombre de stations fixes, est une tomographie du même type, étalée sur les années. Chaque mesure physique donne alors le temps d'arrivée du signal, donc l'intégrale de l'inverse de la vitesse de propagation le long du rai, et l'analyse inverse cherchera à établir une carte des vitesses. A plus basse fréquence, où l'énergie n'est plus concentrée sur des rais, on trouvera de la tomographie de diffraction.

Nous avons pris là des sondages de milieux traversés. De la même façon, il existera, à partir de plusieurs points d'illumination et d'observation, une possibilité de déterminer la forme d'un obstacle si l'on connait certains des paramètres de sa surface, ou même de déterminer ceux-ci ainsi que la forme si l'on a suffisamment d'information.

2.2 Les recueils d'information passifs ou mixtes

Il peut arriver que la source d'un sondage n'est pas contrôlée par l'observateur. On appelle problèmes inverses de source ceux où les caractéristiques des sources sont l'objet de l'analyse. Certains de ces problèmes mettent encore en jeu la diffusion, et celle-ci est utilisée pour déterminer la source. Dans d'autres cas, la diffusion n'est plus le phénomène

physique essentiel pour l'analyste.

A la première catégorie, nous pouvons rattacher par exemple la détermination des foyers de tremblement de terre (ondes élastiques), ou des positions d'engins bruyants (e.g. sous-marins), celle des sources d'émission couplée e^+e^- (caméra électron-positon) ou d'analyse d'émissions radioactives (scintillateurs).

A la seconde catégorie nous pouvons rattacher le scanner à résonance magnétique, dans laquelle les "sources" fonctionnent en absorbant par résonance le champ de radio-fréquence appliqué et indiquent, pour un champ magnétique inducteur donné, la densité locale de spins de protons. Nous pouvons aussi y rattacher un certain nombre de cas limites, que nous avons déjà évoqués, et où les transitoires qui mettraient en jeu la diffusion, étant sans intérêt ou trop difficiles à mesurer, on mesure une grandeur physique établie au niveau des mesures par le phénomène physique "source". On peut dire que la cardiologie et l'électroencéphalographie s'y rattachent, (le comportement dans le temps du phénomène inducteur est ici seule quantité intéressante). S'y rattache aussi la magnétoencéphalographie, où les positions de cellules excitées doivent être déterminées par les variations du champ magnétique qu'elles induisent lors de leur excitation, tout autour du cerveau. Moins passive est la tomographie de résistivité, où les mesures de l'opérateur voltage $\rightarrow$ intensité tout autour de la région étudiée sont les données du problème, la conductivité du milieu dans cette région, le paramètre à déterminer. Il ne s'agit pas ici d'une tomographie de source mais d'un cas limite de tomographie de sondage. Un autre cas limite est atteint avec les mesures de modes naturels d'un objet - par exemple le globe terrestre - ou bien une corde vibrante d'épaisseur variable - ou bien un tambourin d'épaisseur et de forme variable - Ces problèmes inverses dits spectraux sont à la fois les plus anciennement étudiés (Lord Rayleigh) et les plus célèbres des mathématiques. L'épaisseur de la corde, les paramètres de Lamé du globe terrestre, sont les quantités à déterminer, mais aussi (l'exemple du tambourin le montre clairement), la forme, la possibilité de trous, etc. Si je les cite c'est parce qu'ils sont beaucoup plus proches des problèmes de diffusion que les problèmes de source ou que les problèmes de tomographie non diffractive. C'est aussi parce que la recherche mathématique sur ces problèmes a été la plus riche en résultats, souvent très profonds, et a superbement éclairé la recherche sur les problèmes de diffusion.

3 Modélisation des problèmes de diffusion d'une onde scalaire

3.1 L'équation d'onde

Qu'il s'agisse d'un faisceau de particules neutres non relativistes, régi par l'équation de Schrödinger, ou d'ondes acoustiques dans un milieu, régies par l'équation de Helmholtz, la diffusion d'ondes scalaires planes est la plus simple dans sa catégorie, mais montre déjà tous les problèmes essentiels que l'on peut rencontrer. Si le faisceau incident est représenté par une onde plane, de fréquence ou d'énergie bien déterminée, de vecteur d'ondes $\mathbf{k}$ (donnant la "direction d'illumination"), l'onde totale en présence d'une cible

ou d'un milieu diffuseur pourra toujours être représentée asymptotiquement par

$$\Psi(\mathbf{k},\mathbf{r}) = \exp[i\mathbf{k}.\mathbf{r}] + r^{-1}\exp[ikr]A(\hat{r},\mathbf{k}) + 0(r^{-1}) \tag{3.1}$$

où $\mathbf{r}$ est le vecteur position, r sa longueur, $\hat{r} = \mathbf{r}/r$, et les mêmes conventions sont appliquées à tout autre vecteur. La mesure fournit $|A|^2$ et il s'agit de déterminer les paramètres du milieu, c'est à dire, en mécanique quantique, le potentiel $V(\mathbf{r})$ dans l'équation de Schrödinger

$$\left.\begin{array}{c} -\Delta\Psi + V(\mathbf{r})\Psi = E\Psi \\ \Psi \text{ et grad } \Psi \text{ continus} \end{array}\right\} \tag{3.2}$$

(j'ai indiqué aussi les conditions de résolution). S'il s'agit de propagation acoustique, l'équation d'ondes est

$$\left.\begin{array}{c} \lambda \text{ div } \rho^{-1} \text{ grad } \; P + \omega^2 P = 0 \\ P \text{ et } \rho^{-1} \text{ grad } P \text{ continus en milieu continu} \end{array}\right\} \tag{3.3}$$

Dans un milieu hétérogène fait de morceaux acollés le long de surfaces telles que S, avec vecteur normal tel que ν, les conditions de résolutions sont P et $P^{-1}\dfrac{\partial P}{\partial \nu}$ continus. P est la pression, λ le paramètre de Lamé, ρ la masse spécifique. La source, ou l'onde incidente, vient d'un milieu "extérieur" où les paramètres sont constants, disons λ_0, ρ_0. Si on pose $\alpha = \rho^{-2}$ et $k^2 = \rho_0\omega^2/\lambda_0$, on peut réécrire (3.1) sous la forme :

$$\alpha^{-2} \text{ div } \alpha^2 \text{ grad } P + (k^2 - V_0)P = 0 \tag{3.4}$$

où $V_0 = \omega^2[\rho_0/\lambda_0 - \rho/\lambda]$ est nul dans le milieu extérieur. Nous avons supposé la densité ρ partout strictement positive. Si on suppose en outre que λ et ρ sont deux fois différentiables, et en posant $\Psi = \alpha P$, l'équation (3.4) se réduit à l'équation de Schrödinger

$$-\Delta\Psi + V_1\Psi = k^2\Psi \tag{3.5}$$

avec

$$V_1 = V_0 + \alpha^{-1}\Delta\alpha \tag{3.6}$$

Mais si le milieu est discontinu, avec par exemple une surface de discontinuité S telle que α et $\partial\alpha/\partial\nu$ sont continues de part et d'autre mais présentent un saut à la traversée, alors seule l'équation (3.4) reste valable, et doit être complétée par P et $\alpha^2\dfrac{\partial P}{\partial \nu}$ continus à travers S, à moins qu'on réduise (3.4) de part et d'autre à l'équation (3.5) pour $\Psi = \alpha P$, mais dans ce cas Ψ/α et $\alpha\dfrac{\partial\Psi}{\partial\nu} - \Psi\dfrac{\partial\alpha}{\partial\nu}$ sont les quantités continues à travers S. Même dans un milieu deux fois différentiable, (3.5) n'est équivalent à (3.2) que pour $E = k^2$ fixé. En effet V_1 croît comme $\omega^2 = k^2c^2$, où $c = (\lambda/\rho)^{\frac{1}{2}}$ est la vitesse du son dans le milieu, tandis que V est en principe indépendant de E.

Dans la suite, nous étudierons le problème le plus simple possible, celui régi par l'équation (3.2), et en supposant que la donnée d'entrée est l'amplitude de diffusion A qui apparait dans (3.1) et non son module - ce qui peut être jusitifié si un problème préliminaire, celui de la phase, est résolu. Nous n'en parlerons pas davantage.

3.2 Caractères mal posés

Pour un problème parfaitement bien posé, le paramètre correspondant à un résultat donné devrait exister, être unique, et ne se modifier que peu quand le résultat est peu modifié (stabilité). Les caractères mal posés les plus évidents sont donc l'absence d'existence ou d'unicité. Une règle empirique simple, définie pour des résultats exacts, prédit que la connaissance d'un continuum de dimension donnée dans l'espace des résultats ne peut donner d'information complète que sur un continuum de même dimension. Si nous appliquons cette règle à la détermination de $V(\mathbf{r})$ dans (3.4) (3 variables continues) à partir de $A(\hat{r}, \mathbf{k})$ dans (3.1) (5 variables continues) nous pouvons attendre que le problème soit mal posé par surdétermination : l'information donnée <u>doit</u> satisfaire des contraintes réductrices pour correspondre au modèle proposé.

La prédiction est correcte : si $E \to \infty$, et V n'est pas trop singulier, A est donnée avec une précision croissante par "l'approximation de Born", pour laquelle elle est proportionnelle à la transformée de Fourier du potentiel. Si on connait donc A pour tout $\hat{r}$ et tout $\mathbf{k}$, toutes les valeurs de A pour k sont contraintes. Il est simple d'étudier le cas où $V(\mathbf{r})$ ne dépend que de r (symétrie sphérique) - donc une variable continue. A ne dépend alors de k et de θ et la surdétermination subsiste ainsi que sa prédiction par la règle empirique. Mais A peut être décomposée en polynomes de Legendre, ses éléments sont nécessairement de la forme $e^{i\delta\ell} \sin \delta_\ell$ ($\delta_\ell \in \mathbf{R}$: unitarité) et sont reliés à $V(r)$ par la forme asymptotique des résolutions des "équations d'onde partielles" :

$$\left.\begin{array}{c} \frac{d^2\Psi_\ell}{dr^2} + [k^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - V(r)]\Psi_\ell = 0 \\ \Psi_\ell(k,r) \sim A_\ell(k)\sin(kr - \frac{\ell\pi}{2} + \delta_\ell)(r \to \infty) \end{array}\right\} \tag{3.7}$$

où ℓ est entier ou nul. Dans ces équations s'ajoute au potentiel $V(r)$ un potentiel répulsif dit "centrifuge" $-\ell(\ell+1)/r^2$, et si le potentiel est régulier et raisonnablement borné, avec une décroissante plus forte que r^{-2} à ∞, le terme répulsif devient dominant et $\delta_\ell \to 0$ dès que ℓ est un peu grand. Pour $k \to 0$, les petites valeurs de ℓ sont les seules significativement importantes. On peut donc se poser les deux problèmes suivants, où les continuums des données et des paramètres ont à peu près la même dimension.

<u>Problème inverse à E fixé</u>. Peut-on déterminer $V(r)$ à partir de l'ensemble des δ_ℓ ? La réponse est non si la "queue" de $V(r)$ n'est pas fortement contrainte - exponentiellement décroissante ou inexistante (potentiel à support fini) par exemple.

<u>Problème inverse à ℓ fixé</u>. Etudié d'abord pour $\ell = 0$, la solution de ce problème a constitué le premier des sous produits de l'analyse des problèmes spectraux faite par les mathématiciens russes Gelfand, Levitan, et Marchenko. La réponse est : $\delta_0(k)$ ne détermine pas $V(r)$. Il faut aussi connaître les "énergies des états liés", c'est à dire les

valeurs $-E_n = k_n^2$ de k^2 pour lesquels l'opérateur $-\frac{d^2}{dr^2} + k_n^2 - V(r)$ qui apparait dans (3.7) a des fonctions propres dans $L^2(\mathbf{R})$. Il faut en plus, sauf contraintes particulières sur V, connaitre des coefficients de normalisation, un par état lié, qui permettent de reconstruire les projecteurs dans L^2 sur les espaces propres correspondants. Un résultat tout à fait semblable vaut pour chaque valeur de ℓ mais, si ℓ est assez grand, le potentiel effectif est répulsif et il n'y a pas d'état lié, ce qui illustre la surdétermination du problème où l'on donne tous les δ_ℓ pour tout k.

3.3 Les problèmes voisins

Les problèmes inverses de diffraction par des milieux diffusants présentent des extensions parfois compliquées mais de même nature que les problèmes étudiés. Le modèle est toujours régi par l'équation (3.1), les questions posées sont de même nature, que les paramètres répartis soient ϵ et μ (ondes électromagnétiques, pour lesquelles apparaît la possibilité de mesurer des polarisations, et qui conduisent d'une certaine manière à une extension vectorielle des problèmes cités), ou bien λ, μ, et ρ (ondes élastiques, qui se séparent dans un milieu homogène en ondes de compression et de cisaillement de vitesses différentes, contrairement au cas électromagnétique, et qui conduisent d'une certaine manière à une extension tensorielle des problèmes cités). Il y a un peu plus de nouveauté dans les déterminations de forme d'obstacle - par exemple, dans le cas acoustique, régi par l'équation de Helmholtz

$$\Delta u + k^2 u = 0 \tag{3.8}$$

dans le milieu extérieur, un obstacle de domaine Ω, surface $\partial\Omega$, impénétrable, et sondé par une onde plane, donnera asymptotiquement la figure (3.1), mais le modèle sera décrit par (3.8) et les conditions limites sur

$$u = u^{inc} + u^s \quad u^{inc} = \exp[i\mathbf{k}.\mathbf{x}] \tag{3.9}$$

$$\left.\begin{array}{l} u(0) \quad (x \in \partial\Omega) \quad \Omega \subset \mathbf{R}^n, n \geq 2 \\ \frac{\partial u^s}{\partial r} - iku^s = 0(r^{-1}) \quad r \to \infty) \end{array}\right\} \tag{3.10}$$

et le problème inverse réside dans la détermination de $\partial\Omega$ à partir de A, k étant fixé. Même à incidence fixé (toutes directions émergentes), ce problème, s'il a une solution, n'en a qu'une. Il y a lieu de citer ici parmi les problèmes voisins de celui des sondages avec propagation le problème d'auscultation d'un domaine par injection de courants et détermination de la relation potentiel appliqué intensité en tous les points de la surface. Ce problème, peut être écrit sous la forme

$$\text{div } \gamma \text{ grad } u = 0 \quad x \in \Omega \subset \mathbf{R}^n \quad n \geq 2 \tag{3.11a}$$

$$u|_{\partial\Omega} = f \quad \Lambda_\gamma(f) = (\gamma \frac{\partial u}{\partial \nu})_{\partial\Omega} \tag{3.11b}$$

dans laquelle on cherche à déterminer la conductivité γ dans Ω en mesurant l'intensité $\gamma\frac{\partial u}{\partial \nu}$ sur $\partial\Omega$ pour tous les potentiels $u = f$ appliqués sur $\partial\Omega$. Il est équivalent pour $\gamma \in C^2$ au même problème avec

$$\Delta u - Vu = 0 \tag{3.12}$$

au lieu de (3.11a), et semblable au problème de trouver la vitesse des ondes acoustiques à partir de mesures sur $\partial\Omega$ par des émetteurs récepteurs oscillant harmoniquement de la pression p_ω , régie dans Ω par l'équation

$$\Delta_x p_\omega(x,y) + \frac{\omega^2}{c^2(x)} p_\omega(x,y) = -\delta(x-y) \tag{3.13}$$

Divers auteurs, en particulier A. Nachman, sont arrivés à des théorèmes d'unicité dans des conditions de généralité satisfaisantes, pour des dimensions d'espace supérieures ou égales à 2. Cela ne veut pas dire qu'il y ait existence, et le problème est surdéterminé pour $n \geq 3$, (la règle empirique citée l'indique d'ailleurs clairement). Ces résultats s'opposent d'ailleurs au préjugé suivant lequel on ne peut pas déterminer de détail très inférieurs à la longueur d'onde d'un signal - nous essaierons de comprendre ce paradoxe sur un autre problème dans la section suivante.

3.4 Régularisations

On peut régulariser le problème inverse chaque fois que l'on peut rattacher son caractère mal posé à la présence d'erreurs de mesure et chercher une solution généralisée qui reproduise à peu près les résultats des mesures. La régularisation n'est acceptable que si elle définit ainsi une application de l'espace des résultats dans celui des paramètres <u>stable</u> par rapport aux erreurs de mesure. Ainsi, typiquement, un problème surdéterminé pourra être régularisé une première fois en venant d'éléments quelconques dans $\mathcal{E}$ à l'image $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ des paramètres physiques, revenant à $\mathcal{C}$ puis choisissant dans $\mathcal{C}$, s'il n'y a pas unicité, le paramètre le plus plausible. Lorsque le premier pas consiste à prendre un élément de $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ le plus près possible du résultat de mesure on dit qu'on a calculé une quasisolution ; lorsqu'on fait un compromis entre deux minimisations couplées dans $\mathcal{C}$ et $\mathcal{E}$, une solution approchée. On utilise bien souvent des normes quadratiques, qui ont l'avantage de permettre une interprétation statistique simple. L'ennui est la présence, dans le cas non linéaire, de nombreux minima secondaires qui introduisent une non unicité dans la méthode. Diverses recettes permettent parfois de réduire l'importance de ces minimas secondaires (ajout de contraintes, études de convexité, choix heureux d'une discrétisation avec homogénéisation de domaines) ou de les contourner (recuit simulé par exemple). Dans les cas très mal posés il convient de redéfinir les paramètres descriptifs du milieu ausculté en se limitant à ceux qui sont indispensables pour une décision ultérieure et qu'on peut peut-être déterminer (technique des questions bien posés pour un problème mal posé.

4 Peut-on traiter séparément existence, unicité et stabilité ?

A voir la littérature, il semble bien souvent que lorsque le continuum des données correspond en gros à celui des paramètres, il n'y a qu'un problème central, celui de l'unicité, et les techniques de régularisation maitrisent les autres problèmes. Naturellement ceci n'est pas correct. Je voudrais d'abord observer qu'il existe deux causes bien différentes de non unicité.

(1) Non unicité due au caractère fini du nombre de mesures.

(2) Non unicité due au caractère réducteur de la modélisation d'une expérience donnée.

Nous avons vu par exemple que si λ et ρ sont de classe C^2, l'équation de l'acoustique à fréquence fixée retient en fin de compte un seul paramètre, l'impédance ou le potentiel équivalent, et λ, ρ ne peuvent être séparés par une expérience de diffusion dans ces conditions. On a montré récemment que dans le cas discontinu, si l'on choisit indépendamment l'un de l'autre les sauts de α et de $\dfrac{\partial \alpha}{\partial \nu}$ sur la surface de discontinuité, on peut faire apparaître des ambiguités de forme qui n'existent pas pour un diffuseur impénétrable par exemple.

En première analyse, la non unicité due au caractère fini du nombre des mesures devra disparaître si celles-ci sont suffisamment nombreuses pour rendre le problème bien posé. C'est donc une non unicité "faible", au contraire de l'autre, inhérente au modèle. Mais qu'en est-il de l'unicité ? Il peut se faire qu'elle soit accompagnée d'existence et de stabilité pour des topologies raisonnables dans $\mathcal{E}$ et $\mathcal{C}$. On peut raisonnablement parler d'unicité forte. Mais il peut aussi se faire que l'existence soit conditionnelle (problème surdéterminé) et que toute topologie raisonnable dans l'espace des résultats, donc permettant de décrire les erreurs de mesure, rende la construction du paramètre instable ou seulement logarithmiquement stable, c'est à dire avec des erreurs sur le paramètre décroissant seulement comme $1/\log|\epsilon|$, où ϵ est l'erreur de mesure. Il est normal de parler alors d'unicité faible.

Voici un exemple simple. $\mathcal{C} = L^2(\mathbf{R}), \mathcal{E} = L^2(\mathbf{R})$, $\mathcal{M}$ est décrit par la transformation de Fourier :

$$f \to F : F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\lambda x} f(x)dx \tag{4.1}$$

la non unicité de modèle est due à l'existence de fonctions presque partout nulle et se lève en divisant L^2 par la relation d'équivalence "presque partout égal". L'unicité est forte, à cause de l'égalité de Parseval, et la non unicité faible puisque

$$\|f - f_a\| = \|F - F_a\| \tag{4.2}$$

Mais supposons maintenant que les mesures ne puissent atteindre à F que pour $\lambda \in [-a+a] = I$. La non unicité devient forte - pour F donné, $\tilde{F}$ un prolongement quelconque dans $L^2(\mathbf{R})$ à support excluant I, une solution f restera solution si on lui ajoute $\bar{\mathcal{F}}(\tilde{F})$. Toutefois on peut restaurer l'unicité si f est elle-même contrainte à un support fini I_0,

car F est alors une fonction entière de type exponentiel, déterminée par ses valeurs sur I. Malheureusement la résolution que l'on peut obtenir pour f est alors limitée par une instabilité logarithmique et on ne peut guère que doubler la limite de Shannon. C'est la limite de superrésolution, qui apparaît donc, et l'on ne peut parler que d'unicité faible.

Revenons alors au problème inverse de Schrödinger à énergie fixée en symétrie sphérique - l'amplitude de diffusion est donnée par

$$A = f(\theta) = k^{-1} \sum_{0}^{\infty} (2\ell + 1) e^{i\delta_\ell} \sin \delta_\ell P_\ell(\cos \theta) \tag{4.3}$$

et pour V suffisamment "petit", les "δ_ℓ" sont petits et f est donnée à très peu près par l'approximation de Born

$$2k \sin \frac{\theta}{2} f(\theta) = - \int_0^\infty \sin(2kR \sin \frac{\theta}{2}) V(R) R dR \tag{4.4}$$

Ainsi les mesures de $f(\theta)$ ne donnent-elles la transformée de Fourier de V qu'au plus sur l'intervalle $[-2k, 2k]$. Si l'on n'a aucune connaissance supplémentaire a priori de V, nous avons une non unicité forte. Mais si V est à support compact, nous retrouvons l'unicité, à la superrésolution près, donc unicité faible, et le principe de Heisenberg est respecté. Il est remarquable que dans ce cas, et en dehors des conditions de l'approximation de Born, on peut montrer que la mal position du problème est toujours la même. En effet si pour $\ell = 0, 1, ... \eta_\ell = e^{2i\delta_\ell}$, on peut toujours approcher η_ℓ par une fraction rationnelle en ℓ aussi bien qu'on le désire, avec numérateur et dénominateur complexes conjugués l'un de l'autre. Il existe ensuite une suite finie de transformations de Darboux généralisées dans l'espace de V et celui des δ_ℓ qui ramènent la correspondance $V \to \delta_\ell$ à celle d'un "petit potentiel" à des "petits" déphasages, correspondance qui peut donc être décrite par l'approximation de Born. Les transformations étant réversibles renvoient les conclusions faites dans cette approximation au cas géneral.

5 Remarques finales

On ne peut pas conclure une introduction aux problèmes inverses. L'avenir verra sans doute la prise en compte de la nonlinéarité du milieu qui pour de longs parcours peut modifier le signal de façon considérable. Dans certains problèmes de propagation, par exemple celui des tsunamis, les données recueillies sur une côte ne peuvent fournir que très peu d'information sur la source, quel que soit le nombre des instruments de mesure, ceci parce que le signal a été complètement transformé au moins deux fois par son évolution non linéaire. Ce sont les problèmes de diffusion où la diffusion est minimum, et l'énergie reste concentrée le long de rais, qui ont donné lieu au plus grand nombre d'applications pratiques dans l'imagerie. Les techniques d'attaque des problèmes inverses correspondants, dont nous n'avons pas parlé, et qui sont bien connues de tous, sont les techniques classiques des problèmes inverses linéaires, avec une spécificité due à la disposition géométrique des sources et des mesures (scanning) et parfois à la recherche de résolution "en temps réel"

(imagerie médicale) mais non à la diffraction. Dans les problèmes inverses de diffusion l'avenir verra sans doute aussi des études de diffraction diffusante et absorbante apparentées aux études générales de transport.

Au cours des études de problème inverse, plusieurs phases évolutives ont vu l'apparition de méthodes bien distinctes en mathématiques, en physique, dans les sciences de la terre, puis leur rencontre, à laquelle j'ai participé autant que j'ai pu, puis, à nouveau dans les années récentes, leur séparation, due à la trop grande spécialisation des chercheurs. Les problèmes inverses n'appartiennent ni à l'analyse, ni à l'analyse numérique, ni aux physiciens ou aux géophysiciens théoriciens. L'attaque d'un problème inverse exige des aller-retours entre la modélisation du problème, analytique, numérique et analogique, les mesures de terrains et l'analyse mathématique du problème. De ce fait il n'y a pas de très bon travail pour les spécialistes dans notre domaine mais plutôt pour ceux qui, avant tout, servent de lien entre tous ceux qui attaquent le problème. C'est, par essence, un domaine interdisciplinaire, où les relations humaines sont aussi importantes que la recherche individuelle, car chacun doit apprécier les nombreux points de vue à partir desquels il est nécessaire d'étudier le problème.

BIBLIOGRAPHIE

Cette introduction générale aux problèmes inverses de diffusion sera utilement complétée par la lecture des textes suivants.

R.G. Newton - 1ère partie de Scattering Theory of Waves and Particles. 2nd edition Springer 1982.

K. Chadan et P.C. Sabatier - Inverse Problems in Quantum Scattering Theory. 2nd edition Springer 1989.

K. Langenberg - Applied inverse problems for acoustic, electromagnetic wave scattering, in "Basic methods of Tomography and Inverse problems" Ed. P.C. Sabatier, Adam Hilger 1989.

D. Colton et R. Kress - Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory. Springer 1992.

F. Natterer - The mathematics of computerized tomography. J. Wiley 1986.

ainsi que par l'article

P.C. Sabatier "On modeling discontinuous media. Three-dimensional scattering. J. Math. Phys. 30, 2585-98 (1989).