ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P11-2005-121
JINR-P13-2005-121

Е. В. Беспалько*, С. А. Михеев*, В. П. Цветков*,
А. Н. Цирулев*, И. В. Пузынин

ВЫЧИСЛЕНИЕ НЬЮТОНОВСКОГО ПОТЕНЦИАЛА ГРАВИТИРУЮЩЕЙ КОНФИГУРАЦИИ С ПОВЕРХНОСТЬЮ, БЛИЗКОЙ К СФЕРОИДУ, С ПОМОЩЬЮ СИМВОЛЬНЫХ И ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ

Направлено в журнал «Вестник Российского университета дружбы народов», серия «Прикладная и компьютерная математика»

* Тверской государственный университет

2005

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что задача о потенциалах однородного эллипсоида возникла первоначально как предмет теории тяготения. Ее решение позднее нашло применение в различных физических приложениях. Например, формулы для ньютоновского гравитационного потенциала Φ используются в гидродинамике в задачах о потенциальном течении несжимаемой идеальной жидкости вокруг эллипсоида, о силе сопротивления, действующей на медленно движущийся в вязкой жидкости эллипсоид, и т. д. Причем в задачах о конфигурациях гравитирующих систем необходимо аналитическое представление внутреннего потенциала, а в задачах, связанных с описанием движения одной системы относительно другой, — внешнего потенциала, так как потенциал входит в уравнения, определяющие конфигурацию, и в уравнения, описывающие динамику гравитирующих масс.

В теории ньютоновского гравитационного потенциала возникает три типа задач по трем типам симметрии. Наиболее простой случай, когда конфигурация не вращается; тогда она будет иметь сферически-симметричную форму. Этот случай наиболее хорошо изучен [1]. Но часто необходимо учитывать вращение, тогда конфигурация будет иметь сферически-несимметричную форму [2]. В этом случае мы приходим к необходимости использовать более сложные поверхности, в частности эллипсоидальные, граница которых представляет эллипсоид [3, 4]. Изучением эллипсоидальных фигур равновесия занимались Маклорен, Якоби, Ляпунов и многие другие. Ими были получены точные аналитические представления потенциала Φ в случае, когда плотность представлена в виде степенных функций координат. Внутренний потенциал является тогда многочленом по степеням координат, коэффициенты которого представляют собой эллиптические интегралы.

Однако в реальных случаях для неоднородных конфигураций возникает задача, в которой поверхность конфигурации представляет из себя более сложную структуру. В работе [5] предложен метод аппроксимации поверхности псевдоповерхностью, а именно возмущенной эллипсоидальной поверхностью, параметры которой определяются из условия минимума квадрата плотности на этой поверхности. Для этих целей эффективно может быть использован метод разложения в ряд Бурмана–Лагранжа по малому параметру.

Задача вычисления ньютоновского потенциала возмущенных эллипсоидальных конфигураций актуальна в связи с изучением нелинейных эффектов в астрофизике, геофизике и т. д., она представляет собой трудную математическую задачу [7].

Ввиду чрезвычайной сложности как аналитических, так и численных расчетов возникает необходимость использования компьютерных методов. С этой целью нами был выбран пакет символьной и численной математики MAPLE, в частности опробованный в работе [10].

В настоящей работе развивается метод точного представления ньютоновского потенциала конфигурации с поверхностью, близкой к эллипсоидальной, в виде абсолютно сходящихся рядов на основе символьных и численных методов вычисления на компьютере. Все аналитические преобразования приводятся с максимально возможной степенью подробности в отличие от ранее опубликованных нами работ [10].

Задачу вычисления ньютоновского гравитационного потенциала Φ можно разбить на две задачи: отыскание его на внешнюю точку Φ_{out} и задачу отыскания потенциала на внутреннюю точку Φ_{in} [1].

Ньютоновский гравитационный потенциал Φ при этом удовлетворяет уравнениям:

$$\triangle\Phi_{\text{out}} = 4\pi G\rho,$$

$$\triangle\Phi_{\text{in}} = 0.$$

Решением этих уравнений является

$$\Phi = -G\int\limits_D \frac{\rho(\vec{r}\,')dV'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}, \tag{1}$$

где D — область, занимаемая конфигурацией.

1. ВЫБОР ПАРАМЕТРОВ ВОЗМУЩЕННОЙ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ И МЕТОД РЯДОВ БУРМАНА–ЛАГРАНЖА

Граница конфигурации Σ находится из условия равенства плотности на границе нулю:

$$\rho(x, y, z) = 0, \quad (x, y, z) \in \Sigma. \tag{2}$$

Гравитационный потенциал Φ явно зависит от формы границы (2). В явном виде аналитически его удается вычислить только для простейших форм поверхности (шар, эллипсоид). Поэтому в общем случае точную границу конфигурации Σ мы заменим псевдограницей δD, форма которой зависит от неизвестных пока параметров Z_{ijk}.

Потенциал Φ будет удовлетворять на границе условиям $\Phi_{\text{out}_\Sigma} = \Phi_{\text{in}_\Sigma}$ и $(\nabla\Phi_{\text{out}})_\Sigma = (\nabla\Phi_{\text{in}})_\Sigma$.

Следуя работам [6], выберем поверхность Σ в виде возмущенной эллипсоидальной поверхности

$$\delta D: \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \sum_{i,j,k}^{L} Z_{i,j,k} x_1^i x_2^j x_3^k = 1, \tag{3}$$

где $x_1 = \dfrac{x}{a_1}$, $x_2 = \dfrac{y}{a_1}$, $x_3 = \dfrac{z}{a_3}$; a_1, a_3 — полуоси эллипсоида вращения, которые наряду с Z_{ijk} параметризуют δD; L — максимальная степень многочлена по координатам x_1, x_2, x_3. Параметр сплюснутости $e = \dfrac{a_3}{a_1}$.

Условия близости (2) и (3) можно сформулировать введением функционала Λ:

$$\Lambda = \frac{1}{4\pi\rho_0^2} \int\limits_{\delta D} \rho^2 d\Omega. \tag{4}$$

Очевидно, параметр $\eta_{\delta D} = \Lambda^{1/2}$ будет представлять меру погрешности в наших уравнениях при замене точной поверхности конфигурации Σ на δD. Под псевдоповерхностью δD будем понимать поверхность, на которой среднее значение квадрата плотности не превосходит достаточно малой величины по сравнению с единицей. Эта величина определяет точность решения поставленной задачи.

Условие минимума Λ приводит к системе алгебраических уравнений относительно a_1, a_3 и Z_{ijk}:

$$\Psi_{ijk} = \frac{\partial \Lambda}{\partial Z_{ijk}} = 0, \tag{5}$$

$$\Psi_1 = a_1 \frac{\partial}{\partial a_1} \Lambda(Z_{ijk} = 0) = 0,$$

$$\Psi_2 = a_3 \frac{\partial}{\partial a_3} \Lambda(Z_{ijk} = 0) = 0.$$

Представим плотность конфигурации ρ в виде полинома степени P

$$\rho(P) = \sum_{a,b,c}^{P} \rho_{a,b,c} x_1^a x_2^b x_3^c. \tag{6}$$

Если выбрать P достаточно большим, то с высокой степенью точности выражение (6) будет аппроксимировать плотность реальной конфигурации.

После перехода к сферическим координатам R, θ, ϕ: $x_k = R\tilde{\alpha}_k$, $\tilde{\alpha}_1 = \sin\theta\cos\phi$, $\tilde{\alpha}_2 = \sin\theta\sin\phi$, $\tilde{\alpha}_3 = \cos\theta$, выражение для возмущенной эллипсоидальной поверхности (3) примет вид

$$R = 1 - \sum_{ijk}^{L} Z_{ijk}\frac{R^{i+j+k}}{R+1}\tilde{\alpha}_1^i\tilde{\alpha}_2^j\tilde{\alpha}_3^k = 1 + \Psi(R, \tilde{\alpha}_k, Z_{ijk}). \tag{7}$$

Дальнейшие вычисления будут основаны на использовании варианта теоремы Лагранжа [7].

Теорема [7]. Пусть $f(z)$ и $\Psi(z)$ — аналитические функции z на контуре C, окружающем точку a, и внутри него для всех z на C выполняется неравенство $\kappa|\Psi(z)|_C \ll |z-a|_C$. Тогда уравнение $z = a + \kappa\Psi(z)$ имеет один корень $z = \xi$ внутри C и $f(\xi)$ разлагается в степенной абсолютно сходящийся ряд

$$f(\xi) = f(a) + \sum_{s=1}^{\infty}\frac{\kappa^s}{s!}\frac{d^{s-1}}{da^{s-1}}\left[f'(a)\Psi(a)^s\right]. \tag{8}$$

Ряд (8) получил в литературе название ряда Бурмана–Лагранжа.

В нашем случае $\xi = R$, $f(\xi) = \xi^{h+2}$, $a = 1$, $\Psi(a) = \Psi(a, Z_{ijk}, \alpha_k)$.

Тогда получим

$$R^{h+2} = a^{h+2} + (h+2)\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s!}\frac{d^{s-1}}{da^{s-1}}\left[a^{h+1}\Psi(a)^s\right]. \tag{9a}$$

Более детально (9a) будет выглядеть следующим образом:

$$R^{h+2} = a^{h+2} + (h+2)\sum_{s=1}^{s=\infty}\sum_{ijk}^{sL}\frac{(-1)^s}{s!}Z_{ijk}(s)\tilde{\alpha}_1^i\tilde{\alpha}_2^j\tilde{\alpha}_3^k\frac{d^{s-1}}{da^{s-1}}\frac{a^{i+j+k+h+1}}{(a+1)^s}, \tag{9b}$$

где $Z_{ijk}(s)$ — многочлен от Z_{ijk} степени, не превосходящей s.

Рассмотрим более подробно $\dfrac{d^{s-1}}{da^{s-1}}\dfrac{a^{i+j+k+h+1}}{(a+1)^s}$. После замены $a = y+1$ (y — близко к нулю) получаем $\dfrac{1}{2^s}\dfrac{d^{s-1}}{dy^{s-1}}\dfrac{(1+y)^{i+j+k+h+1}}{(1+\frac{y}{2})^s}\Big|_{y=0} = \dfrac{1}{2^s}\Phi_s$.

Для определения явного вида Φ_s понадобится соотношение [9]

$$\Phi_s = S(a,b) = \left[\frac{(1+y)^b}{(1+\frac{y}{2})^{a+1}}\right]_{y=0}^{(a)} = \prod_{r=1}^{a}(b+1-2r),$$

где $a = s-1$, $b = i+j+k+h+1$.

Из него и (9b) следует:

$$R^h = \sum_{s=0}^{s=\infty} \sum_{ijk}^{sL} \frac{(-1)^s h^{\Theta(s)}}{s!} Z_{ijk}(s) \tilde{\alpha}_1^i \tilde{\alpha}_2^j \tilde{\alpha}_3^k \Phi_s(i+j+k+h-1), \qquad (9c)$$

где $\Theta(s) = 0$ при $s = 0$ и $\Theta(s) = 1$ при $s > 0$. $\Phi_s = 1$ при $s = 0$ и $s = 1$.

Квадрат плотности будет выглядеть следующим образом:

$$\rho^2(P) = \sum_{abc}^{P} \sum_{a'b'c'}^{P} \rho_{abc}\rho_{a'b'c'} x_1^{a+a'} x_2^{b+b'} x_3^{c+c'}. \qquad (10)$$

Так как мы перешли к сферическим координатам, то с учетом (9c) выражение для квадрата плотности примет вид

$$\rho^2(P) = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{abc}^{P} \sum_{a'b'c'}^{P} \sum_{ijk}^{sL} \frac{(-1)^s h_1^{\Theta(s)}}{s!} \times$$

$$\times\, \rho_{abc}\rho_{a'b'c'} Z_{ijk}(s) \tilde{\alpha}_1^{a+a'+i} \tilde{\alpha}_2^{b+b'+j} \tilde{\alpha}_3^{c+c'+k} \times \Phi_s(h_1+i+j+k-1), \quad (11)$$

где $h_1 = a + a' + b + b' + c + c'$.

Учитывая (4) и (11), Λ можно представить в явном виде, удерживая в разложении Λ члены Z_{ijk} степени не выше s_m, где s_m — максимально учитываемая степень по s:

$$\Lambda(s_m) = \sum_{abc,a'b'c'}^{P} \sum_{s=0}^{s_m} \sum_{ijk}^{sL} \frac{(-1)^s h^{\Theta(s)}}{2^s s!} \rho_{abc}\rho_{a'b'c'} Z_{ijk} \Phi_s \times$$

$$\times\, (h_1+i+j+k-1) \tilde{Q}_{A_1,A_2,A_3}, \quad (12)$$

$$\tilde{Q}_{A_1,A_2,A_3} = \int \tilde{\alpha}_1^{A_1} \tilde{\alpha}_2^{A_2} \tilde{\alpha}_3^{A_3} d\Omega, \qquad (13)$$

где $A_1 = a + a' + i$, $A_2 = b + b' + j$, $A_1 = c + c' + k$.

Интегралы (13) могут быть упрощены:

$$\tilde{Q}_{a+a'+i,b+b'+j,c+c'+k} = 2\Pi \frac{(a+a'+i-1)!!(b+b'+j-1)!!(c+c'+k-1)!!}{(h_1+i+j+k-1)!!}. \qquad (14)$$

Трехмерные массивы неизвестных в системе (5) Z_{ijk} обозначим через $\{y_m\}$ $(m = 1, 2, \ldots, N_1)$.

При $P = 6, L = 2$ имеем $N_1 = 5$. Связь между переменными будет выглядеть следующим образом:

$$y_1 = \frac{a_1}{l}, y_2 = e, y_3 = Z_{002}, y_4 = Z_{020}, y_5 = Z_{200},$$

где l — характерный масштаб распределения масс гравитирующей системы.

В этом случае систему уравнений (5) удобно записать в векторном виде:

$$f(y,e)=0, \quad (y_1,y_2,...y_5). \tag{15}$$

Для численного решения системы (15) использован регуляризованный аналог метода Ньютона [8] с параметром регуляризации $\alpha = 10^{-3}$:

$$y_{(n+1)(e)} = y^{(n)}(e) - \tau_n[\alpha f^2(y^{(n)}(e),e) + \widetilde{f}'(y^{(n)}(e),e)f'(y^{(n)}(e),e)]^{-1}\times$$
$$\times \widetilde{f}'(y^{(n)}(e),e)f(y^{(n)}(e),e), \tag{16}$$

где n — номер итерации, τ_n $(\theta_0 \leqslant \tau_n \leqslant 1)$ — оптимальный шаг на n-й итерации, причем из соображений сходимости $\theta_0 \geqslant 0{,}1$, $f'(y^{(n)}(e),e)$ — матрица Якоби, $\widetilde{f}'(y^{(n)}(e),e)$ — транспонированная матрица Якоби. Величина $f^2(y^{(n)}(e),e) = \delta_n(\tau)$ представляет собой квадрат невязки. Оптимальный шаг $\tau_n = \max\left(\theta, \dfrac{\delta_n(0)}{\delta_n(0)+\delta_n(1)}\right)$, $\theta \approx 0{,}1$.

Нами выбран именно регуляризованный аналог метода Ньютона, так как неудачный выбор начального приближения может привести к тому, что матрица Якоби будет плохо обусловленной, а в этом случае метод Ньютона расходится. Начальное приближение выбиралось соответствующим сферически-симметричному случаю.

Распределение плотности считаем заданным, т. е. выбираем конкретные ρ_{abc}:

$$\rho_{abc} = \frac{\left(\dfrac{a+b}{2}\right)}{\left(\dfrac{a}{2}\right)!\left(\dfrac{b}{2}\right)!}\rho_{a+b,c}y_1^{a+b+c}y_2^c, \tag{17}$$

где $y_1 = \dfrac{a_1}{l}, y_2 = e = \dfrac{a_3}{a_1}$. Мы взяли аксиально-симметричный случай $a_2 = a_1$. Коэффициенты $\tilde{\rho}_{a+b,c}$ для $P = 6$ приведены в табл. 1 и взяты из [10] для конкретной конфигурации, соответствующей модели быстровращающейся нейтронной звезды с уравнением состояния Бете–Джонсона.

Таблица 1

$a+b$	0	0	0	0	2	2	2	4	4	6
c	0	2	4	6	0	2	4	0	2	0
$\tilde{\rho}_{a+b,c}$	1	–0,729	0,634	–0,912	–0,690	1,294	–2,765	0,683	–2,845	–0,996

Выбранная ньютоновская схема была реализована в рамках пакета MAPLE. Она оказалась достаточно эффективной, так как число итераций для достижения невязки 10^{-30} не превысило 10.

В результате получены численные значения Z_{ijk} и y_1, y_2. Они приведены в табл. 2.

Для $\tilde{\rho}_{a+b,c}$, приведенных в табл. 1, δD будет порядка 10^{-6}.

Таблица 2

y_1	y_2	Z_{002}	Z_{020}	Z_{200}
1	0,59237	$-1{,}35538 \cdot 10^{-6}$	$6{,}46815 \cdot 10^{-7}$	$6{,}46815 \cdot 10^{-7}$

2. ВНУТРЕННИЙ ГРАВИТАЦИОННЫЙ ПОТЕНЦИАЛ $\Phi_{\text{in}}(P, L)$

В работе [9] с использованием рядов Бурмана–Лагранжа доказана теорема, согласно которой внутренний гравитационный потенциал Φ_{in} может быть представлен абсолютно и равномерно сходящимся рядом по коэффициентам Z_{ijk} при некоторых ограничениях на Z_{ijk} и коэффициенты при них, которые являются полиномами степени $P + s(L-2) + 2$ координат x_k. Здесь s — номер члена ряда Бурмана–Лагранжа.

После перехода к обобщенным сферическим координатам $\widetilde{R}$, θ, φ, впервые предложенным в работе [6], со смещением центра координат в точку наблюдения x_k имеем:

$$x_k' = x_k + \alpha_k \widetilde{R},\ \alpha_1 = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{a_0}{a_1}\right)\sin\theta\cos\varphi, \quad \alpha_2 = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{a_0}{a_1}\right)\sin\theta\sin\varphi,$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{a_0}{a_3}\right)\cos\theta,\ \alpha = \left(\frac{a_0^2}{a_1^2}\sin^2\theta\cos^2\varphi + \frac{a_0^2}{a_1^2}\sin^2\theta\sin^2\varphi + \frac{a_0^2}{a_3^2}\cos^2\theta\right)^{1/2}, \tag{18}$$

$$a_0 = (a_1, a_2, a_3)^{1/3}, \quad 0 \leqslant \widetilde{R} \leqslant R.$$

В этом случае выражение для возмущенной эллипсоидальной поверхности (3) перепишется в следующем виде:

$$R^2 + 2RT - Q = \sum_{i,j,k}^{L} Z_{ijk}(x_1 + \alpha_1 R)^i (x_2 + \alpha_2 R)^j (x_3 + \alpha_3 R)^k, \tag{19}$$

где

$$T = \sum_{k=1}^{3} \alpha_k x_k, \quad Q = 1 - \sum_{k=1}^{3} x_k^2.$$

Решив квадратное уравнение относительно R в левой части (19), получим уравнение для нахождения R:

$$R = R_0 - \sum_{i,j,k}^{L} Z_{ijk} \frac{(x_1 + \alpha_1 R)^i (x_2 + \alpha_2 R)^j (x_3 + \alpha_3 R)^k}{R + T + U} =$$

$$= R_0 + \Psi(R, \alpha_k, x_k, Z_{i,j,k}); \quad (20)$$

$$R_0 = U - T, \quad U = (T^2 + Q)^{1/2}.$$

Элемент объема интегрирования в новых координатах будет равен

$$dV' = a_0^3 \frac{\widetilde{R}^2 d\widetilde{R} d\Omega}{\alpha^3}, \quad d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi.$$

Дальнейшие вычисления будут основаны, как и в случае с Λ, на использовании теоремы Лагранжа.

Согласно (8) в нашем случае $\xi = R$, $f(\xi) = \xi^{h+2}$, $a = R_0$, $\Psi(a) = \Psi(R_0, \alpha_k, x_k, Z_{ijk})$.

Тогда получим

$$R^{h+2} = R_0^{h+2} + (h+2) \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{ijk}^{sL} \frac{(-1)^s}{s!} Z_{ijk}(s) \begin{bmatrix} i & j & k \\ n & m & l \end{bmatrix} \times$$

$$\times x_1^{i-n} x_2^{j-m} x_3^{k-l} \alpha_1^n \alpha_2^m \alpha_3^l \frac{d^{s-1}}{dR_0^{s-1}} \left[\frac{R_0^{h+m+n+l+1}}{(R_0 + T + U)^s} \right]. \quad (21)$$

Для сокращения записи здесь и далее используется введенный в [6] оператор суммирования $\begin{bmatrix} n_1 & n_2 & \dots & n_m \\ k_1 & k_2 & \dots & k_m \end{bmatrix}$, действие которого заключается в суммировании по каждому нижнему индексу от нуля до значения стоящего над ним индекса с одновременным умножением на соответствующие биномиальные коэффициенты.

Для определения явного вида $\frac{d^{s-1}}{dR_0^{s-1}} \left[\frac{R_0^{h+m+n+l+1}}{(R_0 + T + U)^s} \right]$ произведем замену $R_0 = U - T + yU, dR_0 = Udy$ и воспользуемся ранее приведенной

леммой:

$$\frac{d^{s-1}}{dR_0^{s-1}}\left[\frac{R_0^{h+m+n+l+1}}{(R_0+T+U)^s}\right]_{R_0=U-T+yU}=$$
$$=\left[\begin{array}{c} h+n+m+l+1\times \\ \times\mu \end{array}\right]\frac{(-1)^\mu}{2^s}U^{h+n+m+l-2(s-1)-\mu}T^\mu\frac{d^{s-1}}{dy^{s-1}}\times$$
$$\times\left[\frac{(1+y)^{h+n+m+l-\mu+1}}{(1+\frac{y}{2})^s}\right]=$$
$$=\left[\begin{array}{c} h+n+m+l+1\times \\ \times\mu \end{array}\right]\frac{(-1)^\mu}{2^s}U^{h+n+m+l-2(s-1)-\mu}T^\mu\Phi_s\times$$
$$\times(h+m+n+l-\mu+1).$$

С учетом полученного результата R примет вид

$$R^{h+2}=R_0^{h+2}+(h+2)\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{ijk}^{sL}\frac{(-1)^{s+\mu}}{s!}Z_{ijk}(s)\times$$
$$\times\left[\begin{array}{cccc} i & j & k & h+n+m+l+1\times \\ \times n & m & l & \mu \end{array}\right]\times$$
$$\times x_1^{i-n}x_2^{j-m}x_3^{k-l}\alpha_1^n\alpha_2^m\alpha_3^l U^{h+n+m+l-2(s-1)-\mu}T^\mu\Phi_s. \quad (22)$$

Выражение для распределения плотности (6) в новой системе координат примет вид

$$\rho(P)=\sum_{abc}^{P}\rho_{abc}\left[\begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & f & g \end{array}\right]x_1^{a-d}x_2^{b-f}x_3^{c-g}\tilde{R}^{d+f+g}\alpha_1^d\alpha_2^f\alpha_3^g. \quad (23)$$

Выражение для ньютоновского гравитационного потенциала (1) в новых координатах с учетом (23) примет вид

$$\Phi(P,L) = -Ga_0^2 \sum_{abc}^{P} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & f & g \end{bmatrix} x_1^{a-d} x_2^{b-f} x_3^{c-g} \int_0^R \tilde{R}^{d+f+g+1} d\tilde{R} \times$$

$$\times \int \frac{\alpha_1^d \alpha_2^f \alpha_3^g}{\alpha^2} d\Omega = -Ga_0^2 \sum_{abc}^{P} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & f & g \end{bmatrix} x_1^{a-d} x_2^{b-f} x_3^{c-g} R_0^{d+f+g+2} d\tilde{R} \times$$

$$\times \int \frac{\alpha_1^d \alpha_2^f \alpha_3^g}{\alpha^2} d\Omega - Ga_0^2 (h+2) \sum_{s=1}^{P} \sum_{abc}^{P} \sum_{ijk}^{sL} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} a & b & c & i & j & k & h+m+n+l+1 \\ d & f & g & n & m & l & \mu \end{bmatrix} \frac{(-1)^{s+\mu}}{2^s s!} \times$$

$$\times x_1^{a-d+i-n} x_2^{b-f+j-m} x_3^{c-g+k-l} U^{h+n+m+l-2(s-1)-\mu} T^{\mu} \Phi_s \times$$

$$\times \int \frac{\alpha_1^{d+n} \alpha_2^{f+m} \alpha_3^{g+l}}{\alpha^2} d\Omega, \quad h = d+f+g. \qquad (24)$$

Таким образом, (24) можно представить в виде

$$\Phi(P,L) = -Ga_0^2 (F_0 + \sum_{s=1}^{\infty} F_s), \qquad (25)$$

где F_0 и $\sum\limits_{s=1}^{\infty} F_s$ соответственно первый и второй члены в (24). F_0 — член аналитического представления внутреннего потенциала, соответствующий невозмущенному эллипсоиду.

Для явного представления F_0 воспользуемся формулой бинома Ньютона для R^{h+2}:

$$R^{h+2} = (U-T)^{h+2} =$$

$$= \begin{bmatrix} h+2 & \frac{h-\mu}{2}+1 & h+2-2\nu & \lambda & \nu & \tau & \xi \\ \mu & \nu & \lambda & \rho & \tau & \xi & \chi \end{bmatrix} \times$$

$$\times x_1^{2(\tau-\xi)+h+2-2\nu-\lambda} x_2^{2(\xi-\chi)+\lambda-\rho} \times x_3^{2\chi+\rho} \alpha_1^{h+2-2\nu-\lambda} \alpha_2^{\lambda-\rho} \alpha_3^{\rho}. \qquad (26)$$

С учетом (26) F_0 примет вид

$$F_0 = \sum_{a,b,c}^{P} \rho_{a,b,c}(-1)^{\mu+\tau}\times$$

$$\times \begin{bmatrix} a & b & c & h+2 & \frac{(h-\mu)}{2}+1 & h+2-2\nu & \lambda & \nu & \tau & \xi \\ d & f & g & \mu & \nu & \lambda & \rho & \tau & \xi & \chi \end{bmatrix}\times$$

$$\times x_1^{h+2-2\nu-\lambda+a-d+2(\tau-\xi)} \cdot x_2^{b-f+\lambda-\rho+2(\xi-\chi)} \cdot x_3^{c-g+\rho+2\chi} \cdot Q_{A_1A_2A_3}, \quad (27)$$

$$A_1 = d+h+2-2\nu-\lambda; \quad A_2 = f+\lambda-\rho; \quad A_3 = g+\rho.$$

Здесь и далее $Q_{A_1,A_2,A_3} = \int \alpha_1^{A_1}\alpha_2^{A_2}\alpha_2^{A_3}\frac{d\Omega}{\alpha^2}$.

Воспользуемся как и ранее формулой бинома Ньютона, получим

$$U^{h+n+m+l-2(s-1)-\mu} \cdot T^{\mu} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{N-\mu}{2}-(s-1) & \nu & \tau & \xi & N+2-2s-2\nu & \lambda \\ \nu & \tau & \xi & \chi & \lambda & \rho \end{bmatrix}(-1)^{\tau}\times$$

$$\times x_1^{N-2(s-1)-2\nu-\lambda+2(\tau-\xi)} x_2^{\lambda-\rho+2(\xi-\chi)} x_3^{\rho+2\chi} \alpha_1^{N-2(s-1)-2\nu}\alpha_2^{\lambda-\rho}\alpha_3^{\rho}. \quad (28)$$

Здесь и далее $N = h+l+m+n$.

Учитывая (28), находим аналитическое представление для F_s:

$$F_s = \frac{(-1)^{\mu+\tau+s}}{2^s s!}\sum_{abc}^{P}\sum_{ijk}^{sL}\rho_{abc}\times$$

$$\times \begin{bmatrix} a & b & c & i & j & k & N+1 & \frac{(N-\mu)}{2}-(s-1) & N+2-2s-2\nu & \lambda & \nu & \tau & \xi \\ d & f & g & n & m & l & \mu & \nu & \lambda & \rho & \tau & \xi & \chi \end{bmatrix}\times$$

$$\times \Phi_s Z_{ijk}(s) \cdot x_1^{a-d+j-n+N+2-2\nu-2s-\lambda+2\tau-2\xi} x_2^{b-f+j-m+\lambda-\rho+2\xi-2\chi}\times$$

$$\times x_3^{c-g+k-l+\rho+2\chi} \cdot Q_{A_1A_2A_3}; \quad (29)$$

$$A_1 = d+n+N-2s+2-2\nu-\lambda; \quad A_2 = f+m+\lambda-\rho; \quad A_3 = g+l+\rho;$$

$$\Phi_1 = 1; \qquad \Phi_{s>1} = \prod_{r=1}^{s-1}(N+1-\mu+1-2r).$$

Из (27) и (29) следует представление Φ, содержащее все степени координат до P включительно:

$$\Phi(P,L) = -2\pi G\rho_0 a_1^2 \sum_{abc}^{P}\Phi_{abc}x_1^a x_2^b x_3^c. \quad (30)$$

Интегралы $Q_{A_1A_2A_3}$ могут быть упрощены:

$$Q_{2a,2b,2c} = 2\pi \frac{(2a-1)!!(2b-1)!!}{2^{a+b}(a+b)!} I_{2(a+b),2c}, \tag{31}$$

$$I_{2(a+b),2c} = e^{-2c} \int\limits_{-1}^{1} \frac{(1-x^2)^a x^{2c} dx}{\left(1+\left(\frac{1}{e_2}-1\right)x^2\right)^{a+2c+1}}; \quad e = \left(\frac{a_3}{a_1}\right).$$

В результате нами получено аналитическое представление Φ для реализации в системе символьных вычислений MAPLE.

Вычисление Φ_{abc} для значений $P = 4, 6, 8$ и $L = 2, 4, 6$ нереально без использования метода символьных вычислений на компьютере. Как следствие нами была составлена программа в рамках того же пакета MAPLE для аналитического представления внутреннего потенциала в виде разложения по степеням координат.

Задача сильно упрощается, если задано распределения плотности, т. е. известны коэффициенты ρ_{abc}. Мы взяли ρ_{abc}, приведенные в табл. 3.

Таблица 3

a	0	0	0	0	0	0	0
b	0	0	0	0	2	2	2
c	0	2	4	6	0	2	4
ρ_{abc}	1	−0,729	0,634	−0,912	−0,690	1,294	−2,765
a	0	0	0	2	2	2	2
b	4	4	6	0	0	0	2
c	0	2	0	0	2	4	0
ρ_{abc}	0,683	−2,845	−0,996	−0,690	1,294	−2,765	1,367
a	2	2	4	4	4	6	
b	2	4	0	0	2	0	
c	2	0	0	2	0	0	
ρ_{abc}	−5,690	−2,989	0,683	−2,845	−2,989	−0,9964	

Подставив коэффициенты Z_{ijk}, мы получили потенциал как функцию координат, обозначив $r^2 = x_1^2 + x_2^2$:

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{in}}(P=6, L=2) = -G\rho_0 a_1^2 (2,7216 - 1,6191r^2 + 0,3540r^4 - 0,1776r^6 - \\ - 1,068437x_3^2 + 0,20631x_3^4 - 0,079436x_3^6 - 0,3852x_3^2r^4 - \\ - 0,2954x_3^4r^2 + 0,5279x_3^2r^2).\end{aligned} \tag{32}$$

Соответствующий график приводится на рис. 1, $x_3 = \dfrac{x_3}{e}$.

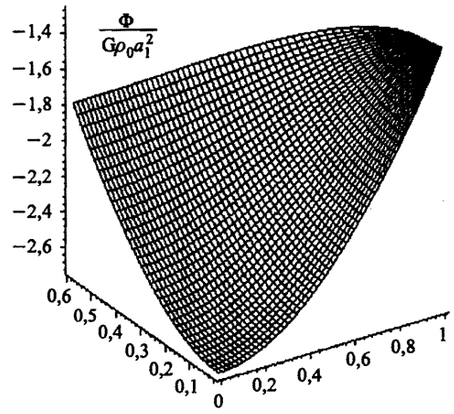

Рис. 1. График функции $\dfrac{\Phi}{G\rho_0 a_1^2}$

Поскольку программа оказалась большой и сложной, возникла необходимость ее тестирования. Нами были выполнены два теста. Проводился предельный переход при $e \to 1$ к сферически-симметричному случаю, который легко рассчитывается по независимой программе. Кроме того, $\Delta\Phi_{\text{in}}(P = 6, L = 2 = 4) = 4\pi G\rho(P = 6)$ и, действуя на Φ_{in} оператором Лапласа, мы получаем распределение плотности, умноженное на $4\pi G\rho$, коэффициенты в которой совпадают с заданными с точностью 10^{-24}.

3. ПОТЕНЦИАЛ НА ВНЕШНЮЮ ТОЧКУ $\Phi_{\text{out}}(N, P, L)$

Наибольший интерес представляет потенциал на внешнюю точку $\Phi_{\text{out}}(N, P, L)$, когда $r > a_1$, где r — расстояние до притягиваемой точки. Наиболее эффективный метод нахождения внешнего потенциала — метод разложения по мультипольным моментам. Внешний потенциал имеет вид

$$\Phi_{\text{out}} = -G \int \frac{\rho(\vec{r}) d\vec{r'}^3}{|\vec{r} - \vec{r'}|}, \tag{33}$$

где $d\vec{r'}^3 = dx'dy'dz'$.

Разложим функцию $\dfrac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|}$ в ряд Тейлора

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|} = \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} =$$
$$= \sum_{\alpha\beta\gamma}^{\infty} \frac{(-1)^{\alpha+\beta+\gamma}}{\alpha!\beta!\gamma!} \left(\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right) x'^\alpha y'^\beta z'^\gamma. \quad (34)$$

Заменим в (34) $\dfrac{(-1)^{\alpha+\beta+\gamma}}{\alpha!\beta!\gamma!} \left(\dfrac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right)$ на оператор $\hat{M}_{\alpha\beta\gamma}$, а через $\dfrac{1}{r}$ обозначим $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Тогда (34) перепишется в виде

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|} = \sum_{\alpha\beta\gamma}^{\infty} \hat{M}_{\alpha\beta\gamma} \frac{1}{r} x'^\alpha y'^\beta z'^\gamma. \quad (35)$$

Используя (35), получим выражение для внешнего потенциала

$$\Phi_{\text{out}} = -G \sum_{\alpha\beta\gamma}^{\infty} \hat{M}_{\alpha\beta\gamma} \frac{1}{r} \int \rho(\vec{r'}) x'^\alpha y'^\beta z'^\gamma dx' dy' dz'. \quad (36)$$

Заменив в (36) интеграл на $D_{\alpha\beta\gamma}$, получаем

$$\Phi_{\text{out}} = -G \sum_{\alpha\beta\gamma} \hat{M}_{\alpha\beta\gamma} \frac{1}{r} D_{\alpha\beta\gamma}. \quad (37)$$

С учетом того, что $x_1 = \dfrac{x}{a_1}, x_2 = \dfrac{y}{a_1}, x_3 = \dfrac{z}{a_3}$, $D_{\alpha\beta\gamma}$ будет выглядеть следующим образом:

$$D_{\alpha\beta\gamma} = a_1^{\alpha+\beta+2} a_3^{\gamma+1} \int \rho(\vec{r'}) x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma dx_1 dx_2 dx_3. \quad (38)$$

Как и в случае внутреннего потенциала, представим плотность конфигурации ρ в виде полинома (6) степени P.

Перейдем к сферическим координатам $x_k = r\bar{\alpha}_k$, $\bar{\alpha}_1 = \sin\theta\cos\varphi$, $\bar{\alpha}_2 = \sin\theta\sin\varphi$, $\bar{\alpha}_3 = \cos\theta$, где $0 < r < R_{\max}$, и, как в случае с вычислением Λ, воспользуемся теоремой Лагранжа. После этого выражение для возмущенной эллипсоидальной поверхности (3) в данном случае будет иметь вид

$$R^h_{\max} = 1 + h \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{ijk}^{sL} \frac{(-1)^s}{s!2^s} Z_{ijk} \Phi_s(h+i+j+k-1) \bar{\alpha}_1^i \bar{\alpha}_2^j \bar{\alpha}_3^k.$$

Положив $\bar{Q}_{abc} = \int \bar{\alpha}_1^a, \bar{\alpha}_2^b, \bar{\alpha}_3^c d\Omega$, получаем

$$\Phi_{\text{out}}(N,P,L) = (-\rho_0 G) \sum_{\alpha\beta}^{N} \sum_{\gamma}^{P} \sum_{abc} \rho_{abc} \hat{M}_{\alpha,\beta,\gamma} \times$$
$$\times \left(\frac{1}{h_0+3} \bar{Q}_{\alpha+a,\beta+b,\gamma+c} + \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{sL}^{ijk} \frac{(-1)^s}{2^s s!} Z_{ijk}(s) \Phi_s(h+1) \times \right.$$
$$\left. \times \bar{Q}_{\alpha+a+i,\beta+b+j,\gamma+c+k} \right), \quad (39)$$

где $h_0 = \alpha+\beta+\gamma+a+a+c$, $\quad h = h_0+i+j+k$, а $\Phi_s(h+1) = \prod_{r=1}^{s-1}(h+2-2r)$; в случае $s=1 \quad \Phi_s = 1$.

Нетрудно доказать, что

$$\bar{Q}_{abc} = 4\pi \frac{(a-1)!!(b-1)!!(c-1)!!}{(a+b+c+1)!!}. \quad (40)$$

Учитывая (40), выражение для внешнего потенциала можно представить в виде разложения по мультипольным моментам следующим образом:

$$\Phi_{\text{out}}(N,P,L) = -4\pi\rho_0 G \sum_{\alpha\beta}^{N} \sum_{\gamma}^{P} \sum_{abc} \rho_{abc} \hat{M}_{\alpha,\beta,\gamma} \times$$
$$\times \left(\frac{1}{h_0+3} \frac{(\alpha+a-1)!!(\beta+b-1)!!(\gamma+c-1)!!}{(h_0+1)!!} + \right.$$
$$+ \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{sL}^{ijk} \frac{(-1)^s}{2^s s!} Z_{ijk}(s) \Phi_s(h+1) \times$$
$$\left. \times \frac{(\alpha+a+i-1)!!(\beta+b+j-1)!!(\gamma+c+k-1)!!}{(h+1)!!} \right), \quad (41)$$

где N — порядок мультиполя.

На основе (41) была составлена программа в системе символьных вычислений MAPLE. Как сказано выше, распределение плотности считаем заданным, т. е. известны коэффициенты $\tilde{\rho}_{a+b,c}$, зная которые и используя (10) находим ρ_{abc}.

Коэффициенты $\tilde{\rho}_{a+bc}$ приведены в табл. 4 на основании [10], в которой нами рассмотрены три уравнения состояния ядерной материи: Бете–Джонсона (BJ), Оппенгеймера–Волкова (OV) и Рейда (R).

С использованием данных табл. 4 и выражения для внешнего потенциала (41) в рамках того же пакета MAPLE получено выражение для внешнего

Таблица 4

		OV	OV	BJ	BJ	R	R
$a+b$	c	$\tilde{\rho}_{a+b,c}$	$\tilde{\rho}_{a+b,c}$	$\tilde{\rho}_{a+b,c}$	$\tilde{\rho}_{a+b,c}$	$\tilde{\rho}_{a+b,c}$	$\tilde{\rho}_{a+b,c}$
0	0	1	1	1	1	1	1
0	2	–0,46117	–0,46375	–0,72181	–0,72895	–0,68902	–0,69547
0	4	0,51814	0,51818	0,63580	0,63397	0,62306	0,62165
0	6	–1,05713	–1,05863	–0,91425	–0,91169	–0,93429	–0,93256
2	0	–0,45871	–0,44935	–0,71544	–0,69125	–0,68320	–0,66110
2	2	1,03862	1,04169	1,27984	1,29401	1,25331	1,26543
2	4	–3,17536	–3,17357	–2,75605	–2,76435	–2,81462	–2,82108
4	0	0,520818	0,53272	0,64485	0,68239	0,63099	0,66416
4	2	–3,18038	–3,19872	–2,77129	–2,84334	–2,82819	–2,89133
6	0	–1,06216	–1,08540	–0,92951	–0,99437	–0,94788	–1,00615

потенциала сложной эллипсоидальной конфигурации в квадрупольном приближении для $N = 2$ в сферических координатах:

$$\Phi_{\text{out}}(N = 2, P = 6, L = 2) = -\frac{Gm}{r}\left(1 + \frac{D(e)a_1^2(\rho)}{r^2}(1 - 3\cos^2\theta)\right) + \ldots, \tag{42}$$

где m — масса гравитирующей конфигурации.

В работе [10] показано, что $a_1^2 = \dfrac{P_0}{2\pi G\rho_0^2 y(e)}$, где ρ_0 — плотность в центре конфигурации, P_0 — давление в центре конфигурации, $y(e)$ — рассчитанные функции параметра сплюснутости e и учитывающие быстроту вращения конфигурации. При изменении угловой скорости вращения функции P_0 и ρ_0 также будут зависеть от параметра сплюснутости e

$$P_0 = P_{00}\gamma(e), \quad \rho_0 = \rho_{00}x(e). \tag{43}$$

С учетом (43) имеем

$$D(e)a_1^2 = D(e)\frac{\gamma(e)}{x(e)y(e)} \cdot \frac{P_{00}(\rho_{00})}{2\pi G\rho_{00}^2} = D_1(e)K(\rho_{00}), \tag{44}$$

где

$$D_1(e) = D(e)\frac{\gamma(e)}{x(e)y(e)}, \quad K(\rho_{00}) = \frac{P_{00}(\rho_{00})}{2\pi G\rho_{00}^2}.$$

После проведенных преобразований выражение для внешнего потенциала возмущенной эллипсоидальной конфигурации (42) примет вид

$$\Phi_{\text{out}}(N = 2, P = 6, L = 2) = -\frac{Gm}{r}\left(1 + D_1(e)K(\rho_{00})\frac{(1 - 3\cos^2\theta)}{r^2}\right) + \ldots. \tag{45}$$

График функции $D_1(e)$ представлен на рис. 2, а значения $K(\rho_{00})$ приводятся в табл. 5.

Как видно из рис. 2, при $e = 1$ D_1 обращается в нуль, а с уменьшением параметра e D_1 увеличивается, т. е. коэффициент разложения в квадрупольном приближении D_1 монотонно зависит от параметра сплюснутости конфигурации. Таким образом, чем больше сплюснутость конфигурации, тем существенней вклад квадрупольного члена.

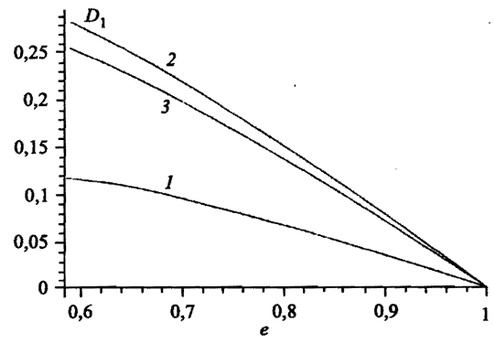

Рис. 2. Зависимость коэффициентов D_1 от параметра e. Кривая *1* соответствует уравнению состояния OV, *2* — BJ, *3* — R

Таблица 5

ρ_{00}, г/см^3	K(OV), см^2	K(BJ), см^2	K(R), см^2
$4 \cdot 10^{14}$	$1{,}418 \cdot 10^{11}$	$1{,}911 \cdot 10^{11}$	$1{,}200 \cdot 10^{11}$
$6 \cdot 10^{14}$	$1{,}284 \cdot 10^{11}$	$2{,}379 \cdot 10^{11}$	$1{,}454 \cdot 10^{11}$
$8 \cdot 10^{14}$	$1{,}160 \cdot 10^{11}$	$2{,}636 \cdot 10^{11}$	$1{,}670 \cdot 10^{11}$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате нами получено аналитическое представление ньютоновского гравитационного потенциала возмущенных эллипсоидальных конфигураций на внутреннюю точку при фиксированных значениях P и L в виде абсолютно сходящихся рядов по параметру возмущения (25). В рамках пакета MAPLE была составлена программа для представления потенциала $\Phi_{\text{in}}(P, L)$ в виде функции координат (32) для произвольных значений P, L и реализована для случая $P = 6, L = 2$. Потенциал возмущенной эллипсоидальной конфигурации на внешнюю $\Phi_{\text{out}}(N, P, L)$ точку мы представили в виде разложения

по мультипольным моментам и получили его конкретное аналитическое представление (41) в квадрупольном приближении. С помощью составленной программы в системе символьной математики MAPLE и численных вычислений регуляризованным аналогом метода Ньютона были получены выражения для потенциала $\Phi_{\text{in}}(P = 6, L = 2)$ и $\Phi_{\text{out}}(N = 2, P = 6, L = 2)$ в виде функций координат (45). Результаты численных расчетов представлены в виде таблиц и графиков.

Работа поддержана РФФИ, грант 03–01–00657.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сретинский Л. Н.* Теория ньютоновского потенциала. М.: Гостехиздат, 1946. С. 316.

2. *Тассуль Ж. Л.* Теория вращающихся звезд. М.: Мир, 1982.

3. *Муратов Р. З.* Потенциалы эллипсоида. М.: Атомиздат, 1976.

4. *Антонов В. А., Тимошкина В. И., Холшевников К. В.* Введение в теорию ньютоновского потенциала. М.: Наука, 1988.

5. *Masjukov V. V., Tsvetkov V. P.* Nonlinear Effect in Theory of Equilibrium Gravitating, Rapidly Rotating, Magnetized Barotropic Configurations and the Gravitational Radiation from Pulsars // Astron. and Astrophys. Transactions. 1993. V. 4. P. 41–42.

6. *Цирулев А. Н., Цветков В. П.* Вращающиеся постньютоновские конфигурации однородной намагниченной жидкости, близкие к эллипсоидам. I, II // Астроном. журн. 1982. Т. 59. С. 476–482, 666–675.

7. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Метод теории функции комплексного переменного. М.: Наука, 1987. С. 688.

8. *Ермаков В. В., Калиткин Н. Н.* Оптимальный шаг и регуляризация метода Ньютона // Журн. вычисл. матем. и мат. физ. 1981. Т. 21, № 2. С. 419–497.

9. *Цветков В. П., Масюков В. В.* Метод рядов Бурмана–Лагранжа в задаче об аналитическом представлении ньютоновского потенциала возмущенных эллипсоидальных конфигураций // ДАН СССР. 1990. Т. 313, № 5. С. 1099–1102.

10. *Беспалько Е. В. и др.* Математическая модель гравитирующей быстровращающейся сверхплотной конфигурации с реалистическими уравнениями состояния. Препринт Р11-2005-35. Дубна, 2005; Мат. моделирование, 2005 (в печати).

Получено 12 августа 2005 г.

Издательский отдел
Объединенного института ядерных исследований
предлагает Вам приобрести перечисленные ниже книги:

Индекс книги	Название книги
E5,11-2001-279	Труды международного совещания «Компьютерная алгебра и ее приложения в физике». Дубна, 2001, 359 с. (на англ. яз.)
Д9-2002-23	Труды IV научного семинара памяти В. П. Саранцева. Дубна, 2001, 263 с. (на русском и англ. яз.)
Д10,11,-2002-28	Труды XVIII Международного симпозиума по ядерной электронике и компьютингу (NEC'2001). Болгария, Варна, 2001, 261 с. (на русском и англ. яз.)
E2-2002-48	Труды XVI международного совещания «Суперсимметрии и квантовые симметрии». Польша, 2001, 276 с. (на англ. яз.)
E4-2002-66	Труды семинара «Перспективы в изучении структуры ядра и ядерных реакций». Дубна, 2002, 112 с. (на англ. яз.)
E15-2002-84	Труды V международного рабочего совещания «Применение лазеров в исследованиях ядер. Перспективы развития лазерных методов исследования ядерной материи». Познань, Польша, 2001, 353 с. (на англ. яз.)
E18-2002-88	Труды международной летней школы «Ядерно-физические методы и ускорители в биологии и медицине». Дубна, 2001, 221 с. (на англ. яз.)
Д19-2002-95	Труды II международного симпозиума и II Сисакяновские чтения «Проблемы биохимии, радиационной и космической биологии». Дубна, 2001, 2 тома: 249 с., 218 с. (на русском и англ. яз.)
E7,17-2002-135	Труды VI рабочего совещания «Теория нуклеаций и ее применение». Дубна, 2000–2002, 513 с. (на англ. яз.)
P11-2002-162	Книга. В. Н. Самойлов, Т. В. Тюпикова. Автоматизированные информационные системы в управлении финансовой деятельностью предприятия. Дубна, 2002, 194 с. (на русском яз.)
Д10,11-2002-208	Труды Четвертой Всероссийской научной конференции RCDC'2002. Электронные библиотеки: перспективные методы и технологии, электронные коллекции. Дубна, 2002, 2 тома: 335 с., 370 с. (на русском и англ. яз.)
P11-2002-263	Книга. В. Н. Самойлов, Т. В. Тюпикова. Информатика в юридической деятельности. Дубна, 2002, 226 с. (на русском яз.)
E1,2-2003-29	Труды III международного совещания «Физика очень больших множественностей». Дубна, 2002, 243 с. (на англ. яз.)
P11-2003-72	Книга. В. Н. Самойлов, Т. В. Тюпикова. Автоматизированные системы обработки экономической информации. Дубна, 2003, 268 с. (на русском яз.)
Д4-2003-89	Избранные вопросы теоретической физики и астрофизики. Сборник научных трудов, посвященный 70-летию В. Б. Беляева. Дубна, 2003, 167 с. (на русском и англ. яз.)

Д1,2-2003-219	Труды XII Международной конференции по избранным проблемам современной физики. Дубна, 2003, 379 с. (на русском и англ. яз.)
Е1,2-2003-225	Труды VII международного совещания «Релятивистская ядерная физика: от сотен МэВ до ТэВ». Стара Лесна, Словакия, 2003, 285 с. (на англ. яз.)
Р10-2003-227	Книга В. Н. Самойлов, Т. В. Тюпикова. Информационные системы в экономике. Дубна, 2004. (161 с. на русском яз.)
Е3-2004-9	Труды XI Международного семинара по взаимодействию нейтронов с ядрами. Дубна, 2003, 316 с. (на англ. яз.)
Е10,11-2004-19	Труды XIX Международного симпозиума по ядерной электронике и компьютингу (NEC'2003). Варна, Болгария, 2003, 286 с. (на англ. яз.)
Е2-2004-22	Труды Международного совещания «Суперсимметрии и квантовые симметрии» (SQS'03). Дубна, 2003, 439 с. (на англ. яз.)
Е18-2004-63	Труды II международной студенческой школы «Ядерно-физические методы и ускорители в биологии и медицине». Познань, Польша, 2003, 93 с. (на англ. яз.)
Д2-2004-66	Научное издание «Проблемы калибровочных теорий». К 60-летию со дня рождения В. Н. Первушина. Дубна, 2004, 137 с. (на русском и англ. яз.)
Е1,2-2004-76	Труды XVI международного Балдинского семинара по проблемам физики высоких энергий. «Релятивистская ядерная физика и квантовая хромодинамика». Дубна, 2002, 2 тома: 320 с., 305 с. (на англ. яз.)
Е1,2-2004-80	Труды X Рабочего совещания по физике спина при высоких энергиях. Дубна, 2003, 499 с. (на англ. яз.)
Е1,2-2004-83	Труды IV международного совещания «Физика очень больших множественностей». Алушта, Украина, 2003, 240 с. (на англ. яз.)
Е1,2-2004-93	Труды международной школы-семинара «Актуальные проблемы физики микромира». Гомель, Беларусь, 2003, 2 тома: 280 с., 269 с. (на англ. яз.)
Е14-2004-148	Труды совещания пользователей реактора ИБР-2 в рамках сотрудничества Германия–ОИЯИ «Нейтронные исследования конденсированных сред на импульсном реакторе ИБР-2». Дубна, 2004, 123 с. (на англ. яз.)

За дополнительной информацией просим обращаться в издательский отдел ОИЯИ по адресу:

141980, г. Дубна, Московская обл.,
ул. Жолио-Кюри, 6.
Объединенный институт ядерных исследований,
издательский отдел.
E-mail: publish@pds.jinr.ru

Беспалько Е. В. и др. P11-2005-121

Вычисление ньютоновского потенциала гравитирующей конфигурации с поверхностью, близкой к сфероиду, с помощью символьных и численных методов

Получено точное аналитическое представление ньютоновского гравитационного потенциала неоднородной возмущенной эллипсоидальной конфигурации на внутреннюю точку $\Phi_{\rm in}$. С помощью составленной программы в системе символьной математики MAPLE и численных вычислений регуляризованным аналогом метода Ньютона получено выражение для потенциала $\Phi_{\rm in}$ в виде полинома от координат. В квадрупольном приближении получено выражение для потенциала на внешнюю точку $\Phi_{\rm out}$.

Работа выполнена в Лаборатории информационных технологий ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2005

Bespalko E. V. et al. P11-2005-121

Calculation of Newton Potential of the Gravitating Configurations with the Surface Close to the Spheroid by Symbolic and Numerical Methods

An exact analytical representation of the heterogeneous perturbed ellipsoidal configuration of the Newton gravitational potential to the inner point $\Phi_{\rm in}$ is obtained. An expression for the potential $\Phi_{\rm in}$ is obtained in the form of a polynomial of the coordinates by the program prepared in the system of symbolic mathematics MAPLE, and by numerical calculations based on the regularized analogue of the Newton method. A formula for the potential to the outer point $\Phi_{\rm out}$ is found by the quadrupole approximation.

The investigation has been performed at the Laboratory of Information Technologies, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2005