Fermilab Library
0 1160 0063174 1

ITEP-40-97

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РФ
Институт теоретической и экспериментальной физики

40-97

Гайдаенко И.В.

Радиационная поправка к процессу аннигиляции электрон-позитронной пары в кварки в пределе безмассовых кварков.

FERMILAB
JUN 2 _ 1998
LIBRARY

Москва 1997

УДК 530.I М-I6

РАДИАЦИОННАЯ ПОПРАВКА К ПРОЦЕССУ АННИГИЛЯЦИИ ЭЛЕКТРОН-ПОЗИТРОННОЙ ПАРЫ В КВАРКИ В ПРЕДЕЛЕ БЕЗМАССОВЫХ КВАРКОВ: Препринт ИТЭФ 40-97/

И.В.Гайдаенко - М., 1997 - I2с.

Приведен подробный вывод радиационной поправки в первом порядке по α_s к сечению аннигиляции электрон-позитронной пары в кварки методом фейнмановских диаграмм. Работа имеет методический характер.

Список лит. - II наим.

© Институт теоретической и экспериментальной физики, 1997

1.Введение.

С теоретической точки зрения представляет большой интерес вычисление глюонных поправок к процессу аннигиляции электрон-позитронной пары в адроны. Данный процесс можно использовать для проверки квантовой хромодинамики. Известно, что радиационные поправки факторизуются в виде множителя к сечению нулевого приближения σ_0. В литературе приводится результат :

$$\sigma = \sigma_0(1 + \frac{\alpha_s}{\pi} + C_2(\frac{\alpha_s}{\pi})^2 + C_3(\frac{\alpha_s}{\pi})^3), \tag{1}$$

где $C_2 = 1.411, C_3 = -12.8$ [1,8,9]. Эта формула получена в пределе, когда энергия столкновения много больше массы кварков. Ее, также, нельзя применять при энергиях, близких к резонансам и до порога рождения адронов, где становятся существенными непертурбативные эффекты. Расчет поправок порядка α_s и α_s^2 можно найти соответственно в ссылках [3,4] и [6,7].

К сожалению в литературе трудно найти подробное вычисление этого результата, даже члена $\frac{\alpha_s}{\pi}$. Ниже будет подробно описано вычисление глюонной поправки в первом порядке по α_s к процессу аннигиляции электрон-позитронной пары в кварки методом фейнмановских диаграмм. Нужно сказать, что в приведенной литературе используется иной метод, основанный на соотношении унитарности. Согласно соотношению унитарности, суммарное сечение пропорционально мнимой части диагонального матричного элемента (см. [11], §71). В нашем случае, однако, нужно вычислить адронную составляющую сечения. Но если мы будем пренебрегать всеми высшими поправками по α, то в диагональном матричном элементе можно выделить чисто кварковый вклад, который сводится к кварковым поправкам к пропагатору виртуального фотона. Т.е. сечение аннигиляции лептонной пары в адроны будет пропорционально мнимой части адронной составляющей фотонного поляризационного оператора. В КЭД поправка порядка α^2 к фотонному пропагатору была вычислена методом фейнмановских диаграмм еще в работе [2]. В этой работе был получен результат (см. также [5]):

$$\Sigma_\gamma = \Sigma_\gamma^{(2)}(1 + \frac{3\alpha}{4\pi}), \qquad s >> m^2, \tag{2}$$

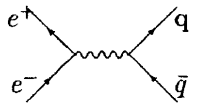
где $\Sigma_\gamma^{(2)}$ - поляризационный оператор фотонна в приближении e^2.

Можно показать, что поправка к поляризационному оператору в порядке $\alpha\alpha_s$ отличается от поправки α^2 в КЭД лишь цветовым множителем $\frac{4}{3}$ (см.

[3]). В результате получаем:

$$\sigma = \sigma_0(1 + \frac{\alpha_s}{\pi}), \qquad s >> m_q^2, \tag{3}$$

где σ_0 - сечение в первом порядке теории возмущений, m_q - масса кварков. Оно описывается единственной диаграммой аннигиляционного типа:



В пределе $s >> m_q^2$ выражение для σ_0 дается следующей формулой:

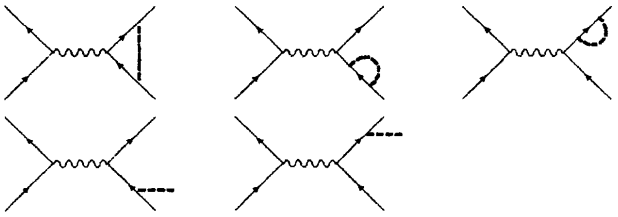
$$\sigma_0 = N_c \frac{4\pi\alpha^2 Q_q^2}{3s} = \frac{4\pi\alpha^2 Q_q^2}{s}, \tag{4}$$

где Q_q–заряд кварка (в единицах e), N_c– число цветов.

В заключение отметим, что расчеты этим методом значительно усложняются при вычислении сечения аннигиляции в лептоны, т.к. в этом случае необходимо учитывать диаграммы, в которых начальные и конечные электроны связаны двумя фотонными линиями, а кроме того нужно вычитать сечение аннигиляции в два фотона.

2.Расчет петли.

Перейдем теперь к непосредственным вычислениям. Т.к. $\alpha_s >> \alpha$, то основной вклад в радиационную поправку будут давать глюоны, и вкладом фотонов в первом порядке по α_s мы можем пренебречь. Соответственно в первом порядке по α_s нужно рассмотреть пять диаграмм:



(Здесь волнистая линия соответствует фотону, а пунктирная – глюонам)

Первые три диаграммы дают вклад в кварковый формфактор. Вершина взаимодействия глюона с кварком имеет вид: $-ig\bar{\Psi}\gamma_\mu A_\mu^a \frac{\lambda^a}{2}\Psi$. Легко показать, что матрицы Гелл-Манна для этих трех диаграмм факторизуются в виде множителя $\sum\limits_{j,a} \frac{\lambda^a_{ij}\lambda^a_{jk}}{4} = \frac{4}{3}\delta_{ik}$. Поэтому, вместо того, чтобы вычислять кварковый формфактор, мы можем воспользоваться выражением для

электронного формфактора, сделав в нем лишь замену $\alpha \to \frac{4}{3}\alpha_s$. Выражение для электронного формфактора $Re(f_e(s)-1)$ имеет вид [10][1]:

$$Re(f_e(s)-1) = \frac{\alpha}{\pi}[(1-ln\frac{s}{m^2})(ln\frac{m}{\lambda}-1) - \frac{1}{4}ln\frac{s}{m^2}(1+ln\frac{s}{m^2}) + \frac{\pi^2}{3}]. \quad (5)$$

При высоких энергиях ($s \to \infty$) вершинная часть Γ_μ равна $f(s)\gamma_\mu$. Поэтому, сечение аннигиляции будет пропорционально $\mid f \mid^2 = 1 + 2Re(f-1) + O(\alpha_s^2)$. Делая замену $\alpha \to \frac{4}{3}\alpha_s$ в $f_e(s)$, получаем:

$$\sigma(e^+e^- \to \bar{q}q) = \sigma_0[1 + \frac{4\alpha_s}{3\alpha}2Re(f_e(s)-1)] =$$

$$= \sigma_0[1 + \frac{8\alpha_s}{3\pi}((1-ln\frac{s}{m^2})(ln\frac{m}{\lambda}-1) - \frac{1}{4}ln\frac{s}{m^2}(1+ln\frac{s}{m^2}) + \frac{\pi^2}{3})], \quad (6)$$

λ–масса глюона, введенная для регуляризации интегралов, которые имеют инфракрасную расходимость. В конечном ответе мы перейдем к пределу $\lambda \to 0$.

3.Расчет радиационного сечения.

Сечение аннигиляции с испусканием одного глюона можно записать в виде:

$$\sigma(e^+e^- \to \bar{q}qg) = \sum_{a=1}^{8}\sigma(e^+e^- \to \bar{q}qg_a) = \sum_{a=1}^{8}\sum_{i,j}\mid \frac{\lambda_{ij}^a}{2} \mid^2 \sigma'(e^+e^- \to \bar{q}qg), \quad (7)$$

σ'–урезанное сечение, которое не учитывает цветовой структуры глюонов (т.е. как если бы у глюона не было цвета).

В дальнейшем мы будем использовать следующие обозначения:

k – импульс глюона ; k_-, k_+ – импульсы электрона и позитрона;

p_-, p_+ – импульсы кварков $(q, \bar{q})$;

$p = p_+ + p_- + k, p^2 = s$;

$k = (\omega, \vec{k}), p = (\varepsilon, \vec{p}), 2\sqrt{s}\omega = sy$,

$q_1 = -(p_+ + k), q_2 = (p_- + k)$ – импульсы виртуальных кварков;

$\xi_i = q_i^2 - m^2$,где m – масса кварка;

$\xi_1 = (p_+ + k)^2 - m^2 = 2p_+k, \xi_2 = 2p_-k$;

$M^2 = (p_+ + p_-)^2 = s - 2pk = s - 2\sqrt{s}\omega$ – приведенная масса двух кварков.

Будем все величины в с.ц.м. $q\bar{q}$ обозначать штрихом, а в с.ц.м. $q\bar{q}g$ – без штриха.

[1]Следует сказать, что в [11] приведено не совсем правильное выражение для f_e.

$\xi_{1,2} = 2p_{\pm}k = 2\varepsilon'_{+}\omega' \pm cos\theta' 2p'_{+}k' = a \pm xb$, где
$x = cos\theta', a = 2\varepsilon'_{+}\omega' = \sqrt{s}\omega, b = 2p'_{+}k' = \frac{p'_{+}}{\varepsilon'_{+}}\sqrt{s}k.$
Сечение вычисляется по стандартной формуле [10,11]:

$$\sigma = \frac{1}{4}\frac{1}{2\omega_{+}2\omega_{-}v_e}\sum_{f,i}\int |M_{fi}|^2 d\tau_3^{(f)}, \tag{8}$$

где множитель $\frac{1}{4}$ возник из-за усреднения по начальному состоянию.

Ниже приводятся выражения для сомножителей [10,11]:

$$\omega_{+}\omega_{-}v_e = \sqrt{(k_{+}k_{-})^2 - m_e^4} = \frac{s}{2}, \text{ при } s \to \infty. \tag{9}$$

$$d\tau_3 = d\tau_2(q\bar{q})\frac{d^3\vec{k}}{2\omega(2\pi)^3} = \frac{p'_{+}do'}{M(4\pi)^2}\frac{k^2dk}{\omega(2\pi)^2} = 2\frac{p'_{+}}{M}\frac{kd\omega dx}{(4\pi)^3} -$$

фазовый объем конечного состояния,

$$\sum_{f,i}|M_{fi}|^2 = 4e^2T^{(e)}_{\mu\nu}\frac{1}{s^2}T^{(q)\mu\nu}_{\alpha\beta}2\rho^{(g)}_{\alpha\beta}Q_q^2e^2g^2,$$

где $\rho^{(g)}_{\alpha\beta} = -\frac{g_{\alpha\beta}}{2}-$ матрица плотности глюона,

а общий множитель 4 учитывает цветовой множитель $\sum_{a,i,j}|\frac{\lambda^a_{ij}}{2}|^2 = 4$;

$$T^{(e)}_{\mu\nu} = Tr[(\hat{k}_{+} - m_e)\gamma_\mu(\hat{k}_{-} + m_e)\gamma_\nu] = 4(k_{+\mu}k_{-\nu} + k_{+\nu}k_{-\mu} - \frac{s}{2}g_{\mu\nu}); \tag{10}$$

$$T^{(q)\mu\nu}_{\alpha\beta} = Tr[(\hat{p}_{+} - m)(\gamma_\nu\frac{1}{\hat{q}_2 - m}\gamma_\alpha + \gamma_\alpha\frac{1}{\hat{q}_1 - m}\gamma_\nu)(\hat{p}_{-} + m)(\gamma_\mu\frac{1}{\hat{q}_1 - m}\gamma_\beta +$$
$$+\gamma_\beta\frac{1}{\hat{q}_2 - m}\gamma_\mu)].$$

Удобно определить:

$$2\rho^{(g)}_{\alpha\beta}T^{(q)\mu\nu}_{\alpha\beta} = -T_{\mu\nu}. \tag{11}$$

Принимая во внимание, что $\int d\tau_3^{(f)}T_{\mu\nu}$ зависит лишь от p^μ , а также поперечность этого тензора, можно записать:

$$\int d\tau_3 T_{\mu\nu} = -T(s)(p_\mu p_\nu - sg_{\mu\nu})$$

$$\int d\tau_3 T_{\mu\mu} = 3sT$$

$$\int d\tau_3 T_{\mu\nu} = \frac{1}{3s}(sg_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu)\int d\tau_3 T_{\mu\mu}$$

$$T^{(e)}_{\mu\nu}(sg_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu) = -4s^2. \tag{12}$$

Резюмируя все выше приведенные формулы, получим следующее выражение для сечения:

$$\sigma(e^+e^- \to q\bar{q}g) = \frac{4Q_q^2\alpha^2\alpha_s}{3s^2}\int \frac{p'_+}{M} k d\omega dx T_{\nu\nu}. \tag{13}$$

Входящий в эту формулу интеграл нам нужно вычислить с точностью до величин O(s). Величинами порядка $m^2 ln^n \frac{s}{m^2}(n = 0, 1, 2)$ будем пренебрегать, а массу глюона будем считать сколь угодно малой величиной. Чтобы упростить вычисления, замечаем, что результат интегрирования не изменится, если сделать замену : $p_+ \leftrightarrow p_-, k \to -k, \xi_1 \leftrightarrow \xi_2$. С учетом этой замены $T_{\nu\nu}$ можно записать в следующем виде:

$$T_{\nu\nu} \to 2(\frac{1}{\xi_2^2}Tr[\gamma_\mu(\hat{p}_+ - m)\gamma^\mu(\hat{q}_2 + m)\gamma_\nu(\hat{p}_- + m)\gamma^\nu(\hat{q}_2 + m)] +$$

$$+\frac{1}{\xi_1\xi_2}Tr[\gamma_\nu\hat{p}_+\gamma_\mu\hat{q}_2\gamma^\nu\hat{p}_-\gamma^\mu\hat{q}_1]) =$$

$$= 2(\frac{1}{\xi_2^2}(-8m^2Tr[\hat{p}_+\hat{q}_2] + 4Tr[\hat{p}_+\hat{k}\hat{p}_-\hat{k}]) - \frac{2}{\xi_1\xi_2}Tr[\hat{q}_2\hat{q}_1]4(p_+p_-)) =$$

$$= 2(\frac{1}{\xi_2^2}(8\xi_1\xi_2 - 16m^2(M^2 + 2a)) + \frac{8M^2(M^2 + 2a)}{\xi_1\xi_2}) =$$

$$= 16(-\frac{2m^2 s}{\xi_2^2} + \frac{\xi_1}{\xi_2} + \frac{M^2 s}{\xi_1\xi_2}). \tag{14}$$

Здесь отбрасывались слагаемые , пропорциональные $\frac{m^2}{\xi_2}, m^4$, а также были использованы соотношения :

$\xi_1 + \xi_2 = 2a,$

$M^2 + 2a = (s - 2\sqrt{s}\omega) + 2\sqrt{s}\omega = s.$

Делая замену $\xi_1 \leftrightarrow \xi_2$, получаем:

$$\frac{1}{\xi_1\xi_2} = \frac{1}{2a}(\frac{1}{\xi_1} + \frac{1}{\xi_2}) \to \frac{1}{a\xi_2}$$

$$T_{\nu\nu} \to 16\{(-\frac{2m^2 s}{\xi_2^2} + \frac{s^2}{a\xi_2}) + (\frac{1}{\xi_2}(2a + \frac{s(M^2-s)}{a}) - 1)\}. \qquad (15)$$

Итак нужно вычислить интеграл:

$$\int\limits_{\lambda}^{\omega_m} \frac{p'_+}{M} k d\omega \int\limits_{-1}^{1} dx T_{\nu\nu} = J_1 + J_2,$$

где

$$J_1 = \int 16(-\frac{2m^2 s}{\xi_2^2} + \frac{s^2}{a\xi_2})\frac{p'_+}{M} k d\omega dx$$

$$J_2 = \int 16(\frac{1}{\xi_2}(2a + \frac{s(M^2-s)}{a}) - 1)\frac{p'_+}{M} k d\omega dx. \qquad (16)$$

J_1 – это расходящийся интеграл (при $\lambda \to 0$). Ниже он будет вычислен (см. Приложение). Здесь же приведем лишь окончательное выражение для него:

$$J_1 = \frac{s}{2}\{-\frac{\pi^2}{3} + 1 + ln\frac{m}{\lambda}(ln\frac{s}{m^2} - 1) + \frac{1}{4}ln^2\frac{s}{m^2}\}. \qquad (17)$$

Интеграл J_2 имеет конечный предел при $\lambda \to 0$. Положив $\lambda = 0$, и сделав замену $\omega = \omega_m y$,где $4\omega_m^2 = s$, получим:

$$J_2 = \frac{\omega_m^2}{2}\int\limits_0^1 y dy \int\limits_{-1}^{1} dx(\frac{s}{\xi_2}(y-2) - 1) = \frac{\omega_m^2}{2}\int\limits_0^1 y dy[\frac{s}{b} ln\frac{a+b}{a-b}(y-2) - 2] =$$

$$= \frac{s}{8}(\frac{3}{2} - 3ln\frac{s}{m^2}). \qquad (18)$$

Складывая J_1 с J_2 , получим выражение для искомого интеграла:

$$\int\limits_{\lambda}^{\omega_m} \frac{p'_+}{M} k d\omega \int\limits_{-1}^{1} dx T_{\nu\nu} = 8s\{ln\frac{m}{\lambda}(ln\frac{s}{m^2} - 1) + \frac{1}{4}ln^2\frac{s}{m^2} - \frac{3}{4}ln\frac{s}{m^2} - \frac{\pi^2}{3} + \frac{11}{8}\}. \qquad (19)$$

Таким образом сечение аннигиляции в состояние $q\bar{q}g$ равно:

$$\sigma(e^+e^- \to q\bar{q}g) = \frac{4Q_q^2\alpha^2\alpha_s}{3s^2} 8s\{ln\frac{m}{\lambda}(ln\frac{s}{m^2} - 1) + \frac{1}{4}ln^2\frac{s}{m^2} - \frac{3}{4}ln\frac{s}{m^2} - \frac{\pi^2}{3} + \frac{11}{8}\} =$$

$$= \sigma_0\frac{8\alpha_s}{3\pi}\{ln\frac{m}{\lambda}(ln\frac{s}{m^2} - 1) + \frac{1}{4}ln^2\frac{s}{m^2} - \frac{3}{4}ln\frac{s}{m^2} - \frac{\pi^2}{3} + \frac{11}{8}\}. \qquad (20)$$

4.Заключение.

Теперь уже нетрудно видеть, складывая сечения (6) и (20) , что в полном сечении все расходимости сокращаются:

$\sigma_{tot} = \sigma(e^+e^- \to q\bar{q}g) + \sigma(e^+e^- \to q\bar{q}) = \sigma_0(1 + \frac{\alpha_s}{\pi})$.

Приведем окончательное выражение для полного сечения аннигиляции лептон-антилептонной пары в кварки в пределе высоких энергий:

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi\alpha^2 Q_q^2}{s}(1 + \frac{\alpha_s}{\pi}). \tag{21}$$

Приложение.
Вычисление рассходящихся интегралов.

1.Предварительные соотношения.

Ниже нам понадобятся следующие соотношения:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\varepsilon'_+ + p'_+}{\varepsilon'_+ - p'_+} = \frac{(\varepsilon'_+ + p'_+)^2}{m^2} = \frac{M^2}{m^2} = \frac{s(1-y)}{m^2}, \tag{1}$$

$$a^2 - b^2 = s\omega^2 - (\frac{p'_+}{\varepsilon'_+})^2 sk^2 = s\lambda^2 + \frac{4m^2}{M^2}sk^2 = (1 + O(\frac{\lambda}{m}))\frac{4m^2 s}{M^2}(\frac{s\lambda^2}{4m^2} + k^2), \tag{2}$$

$$\frac{2p'_+}{M} = \frac{p'_+}{\varepsilon'_+} = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{M^2}} = \sqrt{\frac{1 - y - \varepsilon_2}{1-y}}, \tag{3}$$

где $\varepsilon_2 = \frac{4m^2}{s}$.

Покажем теперь, что с требуемой точностью можно заменить $\frac{2p'_+}{M}$ на $\sqrt{1-\varepsilon_2}$.

Пишем:

$$\frac{2p'_+}{M} - \sqrt{1-\varepsilon_2} = \frac{\sqrt{1-y-\varepsilon_2} - \sqrt{(1-\varepsilon_2)(1-y)}}{\sqrt{1-y}} \simeq$$

$$\simeq \frac{\sqrt{1-y-\varepsilon_2}}{\sqrt{1-y}}(-\frac{y\varepsilon_2}{2(1-y-\varepsilon_2)}) \simeq -\frac{\varepsilon_2 y}{2(1-y)}, \tag{4}$$

при $\frac{y\varepsilon_2}{1-y} << 1$.

Т.е. $\frac{2p'_+}{M} = \sqrt{1-\varepsilon_2} + O(\varepsilon_2 y)$. Т.к. интегралы расходятся логарифмически при $y \to 0$, то разлагая $\frac{2p'_+}{M}$ в подинтегральной функции по степеням $\varepsilon_2 y$, видим , что $\int \frac{dy}{y} O(\varepsilon_2 y) = O(\varepsilon_2)$ и им можно пренебречь, что и требовалось показать. Поскольку в конечных формулах $\varepsilon_2 \to 0$, то можно сделать замену $\sqrt{1-\varepsilon_2} \to 1$.

2.Вычисление J_1.

Теперь мы уже можем перейти к непосредственному вычислению интегралов. Во всех конечных интегралах положим $\lambda = 0$ и будем отбрасывать все величины много меньше s. Рассмотрим сначала первое слагаемое J_1 :

$$\int \frac{p'_+}{M} k d\omega \int_{-1}^{1} dx \frac{2m^2 s}{\xi_2^2} = \int_{\lambda}^{\omega_m} \frac{1}{2} \frac{4m^2 s}{a^2 - b^2} k d\omega = \frac{1}{2} \int_{\lambda}^{\omega_m} \frac{4m^2 s M^2}{4m^2 s(\frac{s\lambda^2}{4m^2} + k^2)} k d\omega =$$

$$= \frac{s}{2} \int_0^{\frac{km}{\lambda}} \frac{t^2 dt}{\sqrt{t^2+1}(\frac{s}{4m^2} + t^2)} - \frac{s}{2} \int_0^1 \frac{y}{y^2} y dy =$$

$$= \frac{s}{2} \{ \int_0^{\frac{km}{\lambda}} \frac{t dt}{\frac{s}{4m^2} + t^2} + \int_0^{\infty} [\frac{t}{\sqrt{t^2+1}} - 1] \frac{t dt}{\frac{s}{4m^2} + t^2} - 1 \} =$$

$$= \frac{s}{2} \{ \frac{1}{2} ln(\frac{s}{4m^2} + t^2) |_0^{\frac{km}{\lambda}} - 1 \} = \frac{s}{2} \{ ln \frac{m}{\lambda} - 1 \}. \qquad (5)$$

Здесь было отброшено слагаемое

$$\int_0^{\infty} [\frac{t}{\sqrt{t^2+1}} - 1] \frac{t dt}{\frac{s}{4m^2} + t^2} \approx \int_0^9 \frac{4m^2}{s} [\frac{t}{\sqrt{t^2+1}} - 1] t dt + \frac{4m^2}{s} O(\int_9^{\sqrt{\frac{s}{4m^2}}} \frac{dt}{t}) + \qquad (6)$$

$$+ O(\int_{\sqrt{\frac{s}{4m^2}}}^{\infty} \frac{dt}{t^3}) = O(\frac{4m^2}{s} ln \frac{s}{m^2}) \to 0, \qquad \text{при } s \to \infty.$$

Второе слагаемое J_1 :

$$\int \frac{p'_+}{M} k d\omega \int_{-1}^{1} dx \frac{s^2}{a \xi_2} = \frac{s}{2} \int_{\lambda}^{\omega_m} \frac{d\omega}{\omega} ln \frac{(a+b)^2}{a^2 - b^2} = \frac{s}{2} \int_{\lambda}^{\omega_m} \frac{d\omega}{\omega} ln [\frac{s\omega^2 (1 + \frac{p'_+}{\varepsilon'_+} \frac{k}{\omega})^2 s(1-y)}{4m^2 s \lambda^2 (\frac{s}{4m^2} + \frac{\omega^2}{\lambda^2})}] =$$

$$= \frac{s}{2}\{\int_0^1 \frac{dy}{y} ln(1-y) + ln\frac{\omega_m}{\lambda} ln\frac{s}{m^2} + \int_\lambda^{\omega_m} \frac{d\omega}{\omega} ln\frac{(1+\frac{p'_+}{\varepsilon'_+})^2}{4} + \int_1^{\frac{\omega_m}{\lambda}} \frac{dt}{t} ln(\frac{t^2}{\frac{s}{4m^2}+t^2})\}. \quad (7)$$

Вычислим каждое слагаемое по отдельности.

$$\int_0^1 \frac{dy}{y} ln(1-y) = -\frac{\pi^2}{6} \qquad \text{– табличный интеграл.} \quad (8)$$

$$\int_\lambda^{\omega_m} \frac{d\omega}{\omega} ln\frac{(1+\frac{p'_+}{\varepsilon'_+})^2}{4} = \int_1^{\frac{\omega_m}{\lambda}} \frac{dt}{t}[ln(\frac{1+\sqrt{1-\varepsilon_2}}{2})^2 + ln(\frac{1+\frac{\sqrt{(1-\varepsilon_2)(t^2-1)}}{t}}{1+\sqrt{1-\varepsilon_2}})^2] =$$

$$= ln\frac{\omega_m}{\lambda} O(\varepsilon_2) + \int_1^\infty \frac{dt}{t} ln(\frac{1+\frac{\sqrt{t^2-1}}{t}}{2})^2. \quad (9)$$

В последнем интеграле можно сделать замену $\frac{1+\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}}{2} = z$, $\frac{dt}{t} = \frac{(2z-1)dz}{2z(1-z)}$:

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t} ln(\frac{1+\frac{\sqrt{t^2-1}}{t}}{2})^2 = \int_{0.5}^1 \frac{(2z-1)dz}{2z(1-z)} lnz^2 = \int_{0.5}^1 [\frac{1}{1-z} - \frac{1}{z}] lnzdz = \quad (10)$$

$$= \frac{1}{2}(ln^2 2 - \frac{\pi^2}{6}) + \frac{1}{2} ln^2 2 = ln^2 2 - \frac{\pi^2}{12},$$

т.к.

$$\int_{0.5}^1 \frac{lnzdz}{1-z} = -lnzln(1-z)|_{0.5}^1 + \int_{0.5}^1 ln(1-z)\frac{dz}{z} = ln^2 2 + \int_0^{0.5} \frac{lnz}{1-z} dz =$$

$$= \frac{1}{2}(ln^2 2 + \int_0^1 \frac{lnz}{1-z} dz) = \frac{1}{2}(ln^2 2 - \frac{\pi^2}{6}). \quad (11)$$

В последнем слагаемом сделаем замену $\frac{1}{\varepsilon_2 t^2} = z$:

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t} ln(\frac{t^2}{\frac{s}{4m^2}+t^2}) = -\frac{1}{2}\int_0^{1/\varepsilon_2} \frac{dz}{z} ln(1+z) =$$

$$= -\frac{1}{2}(\int_1^{1/\varepsilon_2} \frac{dz}{z} lnz + \int_1^\infty \frac{dz}{z} ln\frac{1+z}{z} + \int_0^1 \frac{dz}{z} ln(1+z)) =$$

$$= -\frac{1}{2}(\frac{1}{2}ln^2\frac{s}{4m^2} + 2\int_0^1 \frac{dz}{z}ln(1+z)) = -(\frac{1}{4}ln^2\varepsilon_2 + \frac{\pi^2}{12}). \qquad (12)$$

Таким образом

$$\int \frac{p'_+}{M}kd\omega \int_{-1}^{1} dx\frac{s^2}{a\xi_2} = \frac{s}{2}\{-\frac{\pi^2}{3} + ln\frac{m}{\lambda}ln\frac{s}{m^2} + \frac{1}{4}ln^2\frac{s}{m^2}\}. \qquad (13)$$

Окончательное выражение для J_1 имеет вид:

$$J_1 = \int 16(-\frac{2m^2s}{\xi_2^2} + \frac{s^2}{a\xi_2})\frac{p'_+}{M}kd\omega dx = 8s\{-\frac{\pi^2}{3} + 1 + ln\frac{m}{\lambda}(ln\frac{s}{m^2} - 1) + \frac{1}{4}ln^2\frac{s}{m^2}\}. \qquad (14)$$

Автор благодарен М.И. Высоцкому и Л.Б. Окуню за их активную помощь в написании этой работы.

Работа была поддержана грантом РФФИ 96-15-96578.

Литература.

[1] Physical Review, Phys. Rev., 1996, Vol. D54, P.81.

[2] R. Jost and J.M. Luttinger // Helv. Rhys. Acta, 1950. Vol. 23, P.201 (cf. Eqs. (25) and (37)).

[3] T. Appelquist and H. Georgi // Phys. Rev.,1973, Vol. D8, P.4000;

A. Zee // Phys. Rev.,1973, Vol. D8, P.4038.

[4] F.J. Yndurain, QCD: An Introduction to the Theory of Quarks and Gluons (Springer-Verlag, New York, 1983).

[5] Ю. Швингер, Частицы.Источники.Поля., М.: Мир, 1976, Т.2, гл.5, §4 (4.201).

[6] E.G. Floratos, D.A. Ross, and C.T. Sachrajda // Nucl. Phys. , 1977, Vol. B129, P.66.

[7] M. Dine and J. Sapirstein // Phys. Rev. Lett., 1979. Vol. 43, P.668;

K.G. Chctyrkin, A.L. Kataev and F.V. Tkachev // Phys. Lett., 1979. Vol. 85B, P.277;

W. Celmaster and R.J. Gonsalves // Phys. Rev. Lett., 1980, Vol. 44, P.560.

[8] S.G. Gorishny, A. Kataev, and S.A. Larin // Phys. Lett., 1991. Vol. **B259**, P.114.

[9] L.R. Surguladze and M.A. Samuel // Phys. Rev. Lett.,1991. Vol. **66**, P.560.

[10] А.И.Ахиезер, В.Б.Берестецкий, Квантовая электродинамика, М.: Наука, 1981.

[11] В.Б.Берестецкий, Е.М.Лифшиц, Л.П.Питаевский, Квантовая электродинамика, М.: Наука, 1989.