ITEP-40-95

Fermilab Library
0 1160 0040475 0

ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ФИЗИКИ

40-95

И.А.Воробьёв

МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ СВЕРХМАЛЫХ ПОТЕРЬ ЧАСТИЦ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ АНАЛИЗА ЭВОЛЮЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА В ЧИСЛЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ДИНАМИКИ ПУЧКА В ЛИНЕЙНОМ УСКОРИТЕЛЕ

FERMILAB
MAR 18 1996
LIBRARY

МОСКВА 1995

УДК 621.384.64 М-16

МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ СВЕРХМАЛЫХ ПОТЕРЬ ЧАСТИЦ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ АНАЛИЗА ЭВОЛЮЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА В ЧИСЛЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ДИНАМИКИ ПУЧКА В ЛИНЕЙНОМ УСКОРИТЕЛЕ: Препринт ИТЭФ 40-95/

И.А.Воробьёв - М., 1995 - 23 с.

Предложен новый подход к обработке результатов численного моделирования динамики пучка в ускорителях заряженных частиц. Он заключается в применении статистических инвариантов распределения и производных от них параметров - коэффициентов асимметрии и эксцесса. С использованием этих параметров проведён анализ эволюции распределения пространственного заряда в двух вариантах структуры с ПОКФ с различным режимом формирования сгустков. На основании проведённого анализа и принципа максимума энтропии обоснована методика определения сверхмалых потерь частиц в канале ЛУ с применением рядов Грама-Шарлье и Эджворта. Предложена формула, аппроксимирующая закон распределения пространственного заряда по поперечным координатам в классе унимодальных пучков со сильными ядром и ореолом.

Рис. - 10, список лит. - 16 наим.

© Институт теоретической и экспериментальной физики, 1995

1. Введение

Потребность в создании высокоинтенсивных ЛУ приводит к необходимости обеспечить транспортировку пучка с предельно низким уровнем потерь частиц в канале. В настоящее время допустимый интегральный уровень потерь оценивается величиной порядка $10^{-6} - 10^{-7}$ от значения среднего тока пучка. Обеспечение столь низких потерь при минимальной стоимости ускорителя является одним из основных критериев выбора схемы ЛУ и его параметров, в частности, апертуры канала. Необходимые для этого расчеты динамики пучка методом крупных частиц весьма трудоёмки и при существующих возможностях ЭВМ требуют огромного времени счёта при необходимом количестве крупных частиц в данном случае (свыше 10^7 частиц). Интенсивно развиваемые аналитические методы решения поставленной задачи уступают в точности численному моделированию и требуют вынесения предварительного суждения о характере протекания физических процессов в пучке и распределении частиц в фазовом пространстве. Не вдаваясь в детальный анализ существующих аналитических методов, отметим, что они наталкиваются на серьёзные математические трудности, связанные с вычислением соответствующих коэффициентов распределения и параметров исходного уравнения.

Целью данной работы является обоснование смешанного численно-аналитического подхода к решению указанной выше проблемы. Развиваемый метод заключается в применении и последующей разработке нового для ускорительной техники математического аппарата с применением статистических семиинвариантов распределения заряженных частиц в шестимерном фазовом пространстве, который позволяет однозначно описывать различные классы пучков, выявлять физические про-

цессы, протекающие при эволюции распределения частиц, и строить аналитические аппроксимации законов распределения частиц с использованием коэффициентов, вычисляемых по результатам прямого численного моделирования траекторий крупных частиц. При этом количество крупных частиц может быть значительно меньшим по сравнению с необходимым для прямого счёта сверхмалых потерь, но достаточным для вычисления статистических макропараметров распределения с высокой точностью. На основании получаемой таким образом аппроксимации определяется число частиц с координатами, превышающими апертуру канала, и вычисляются потери пучка при заданной апертуре. Преимуществами предлагаемого подхода являются значительное снижение трудоёмкости расчётов и математическая простота метода при сохранении разумной точности вычислений.

2. Анализ эволюции распределения пространственного заряда сгустка частиц в линейном ускорителе

2.1 Подход к анализу динамики пучка

Общий обзор и анализ проблемы расширения фазового объёма пучка с большим количеством ссылок как на теоретические, так и на экспериментальные работы разных лет изложен в разделе 4.5 монографии И.М.Капчинского [1]. В этой работе И.М.Капчинский пришёл к заключению, что в реальных ускоряющих и фокусирующих каналах распределения, ограниченные в фазовом пространстве, не являются устойчивыми. Из результатов расчётов динамики пучка в квадрупольных каналах методом крупных частиц [2-5] можно подметить, что величина нормализованного среднеквадратического эмиттанса пучка в ряде случаев наиболее быстро растёт на начальной стадии транспортировки, при низких энергиях, которая сменяется стадией медленного плавного роста при более высоких энергиях. Естественно предположить, что на стадии медленного роста пучок обладает некоторым квазистационарным распределением частиц по поперечным координатам и скоростям. Параметры и флуктуации этого распределения существенно влияют на величину потерь частиц при больших энергиях, где требования к потерям

являются наиболее жёсткими. Однако, значения параметров квазистационарного распределения являются результатом всей предыдущей эволюции пучка, особенно активной при низких энергиях. Поэтому, изучение физических процессов в ансамбле заряженных частиц необходимо проводить на всех этапах ускорения. Наблюдаемая зависимость среднеквадратического эмиттанса пучка от времени позволяет надеяться, что эволюция распределения частиц в каналах ускорения и транспортировки может удовлетворять гипотезе Боголюбова [6]. Согласно этой гипотезе при выполнении условия $T_1 \ll T_2 \ll T_3$ (T_1 - характерное время столкновения, приводящее к рассеянию частиц на большие углы; T_2 - время между столкновениями, T_3 - время макроскопической релаксации) система N тел претерпевает три чётко разделённых этапа динамической эволюции.

А. Хаотический этап быстрых изменений координат и скоростей частиц в течение времени $\approx T_1$. На этом этапе происходит первое сглаживание, в результате которого теряется точная исходная информация.

Б. Кинетический этап наступает по прошествии времени $\approx T_1$. На этом этапе вся зависимость системы от времени переходит в медленную функцию $f(\mathbf{x},\mathbf{v},t)$, которая удовлетворяет функциональному уравнению вида:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = F[\mathbf{x},\mathbf{v},f]$$

Уравнения Больцмана и Фоккера-Планка являются частными случаями этого уравнения.

В. Гидродинамический этап начинается по прошествии времени, в несколько раз превышающего время столкновения T_1. На этом этапе происходит второе сглаживание, после которого между скоростями обьектов устанавливается равновесие, а зависимость системы от времени целиком содержится в макроскопичеких параметрах.

Если динамика пучка не удовлетворяет гипотезе Боголюбова, и мы наблюдаем смешанный тип эволюции при $T_1 \approx T_2 \approx T_3$, то аналитическое решение проблемы становится крайне затруднительным и развиваемый в настоящей работе смешанный подход может оказаться единственным выходом при существующих возможностях ЭВМ.

Для выяснения характеристик стационарного распределения ансамбля заряженных частиц и поиска закономерностей перераспределения плотности пространственного заряда пучка при его движении в произвольных внешних электромагнитных полях предлагается использовать термодинамическое описание, которое обладает наибольшей широтой и общностью по сравнению с другими физическими подходами [6], что делает его наиболее приемлемым для решения поставленной задачи. В работах [7-10] анализируются процессы, приводящие к росту эмиттанса, в локально-равновесном состоянии для некоторых типов пучков в каналах с постоянными параметрами. Рассмотрение процессов в условиях, близких к реальным, наталкивается на известные трудности при решении кинетических уравнений и в работах [7-10] не проведено, а вопрос об отыскании равновесной функции распределения не ставился. В отличие от [7-10], в предлагаемой автором работе уравнения движения решаются существенно более точно численным моделированием на ЭВМ по методу крупных частиц, а под энтропией ансамбля заряженных частиц понимается статистическая информационная энтропия [11], связанная с утратой исходной информации о частицах, вероятностью нахождения частицы в одном из возможных микросостояний и наиболее вероятным способом перехода из одного микросостояния в другое при эволюции пучка в реальных ускоряюще-фокусирующих каналах. При этом модель пучка не содержит никаких ограничений на характер взаимодействия между частицами, что выгодно отличает информационный подход как от бесстолкновительных моделей, так и от чисто марковских без памяти о прошедшей эволюции. Расширенное информационное понимание энтропии позволяет распространить методы термодинамики на анализ переходных процессов в ансамбле частиц, далёком от равновесного состояния, при наличии между частицами дальнодействующих сил, к которым относятся кулоновские силы. В этом случае решение стационарной задачи динамики пучка на основе термодинамических принципов выявит конечную цель эволюции распределения ансамбля заряженных частиц, а её достижение в конкретных каналах транспортировки определит конечные значения макропараметров системы.

Неполнота информации о траекториях микрочастиц при их укрупнении в макрочастицу, утрата информации при дискретизации времени интегрирования уравнений движения, ошибки округления и другие артефакты в численном моделировании, различные нелинейности ускоряюще-фокусирующего поля и случайные погрешности канала приводят в рамках информационной интерпретации к дополнительным поправкам к общей энтропии пучка, которые необходимо учесть при сопоставлении данных численного моделирования с реальным физическим экспериментом. Влияние подобных факторов на динамику частиц будет рассмотрено отдельно.

Для определения искомого стационарного распределения предлагается использовать принцип максимума информационной энтропии, в соответствии с которым система стремится к состоянию равновесия с наибольшим её значением [11]. Из числа известных аналитических непрерывных распределений наивысшей энтропией при одинаковом значении дисперсии обладает нормальное (гауссово) распределение. Из этого можно предположить, что достижение стационарного состояния сопровождается не только ростом энтропии, но также и перераспределением плотности пространственного заряда пучка по направлению к закону Гаусса.

Для анализа эволюции распределения частиц на всех стадиях ускорения и проверки его соответствия гауссовому типу предлагается использовать статистические семиинварианты (кумулянты) χ_k-распределения, определяемые разложением характеристической функции $P_x=M(e^{iqx})$ распределения велечины x (r - порядок разложения, q - действительная переменная, изменяющаяся от $-\infty$ до $+\infty$):

$$\log P_x(q)=\sum_{k=1}^{r}\chi_k\frac{(iq)^k}{k!}+o(q^r)\ ,$$

а также коэффициенты асимметрии γ_1 и эксцесса-γ_2, определяемые следующим образом:

$$\gamma_1 = \frac{m_3}{m_2^{3/2}} = \frac{\chi_3}{\chi_2^{3/2}}$$

$$\gamma_2 = \frac{m_4}{m_2^2} - 3 = \frac{\chi_4}{\chi_2^2} ,$$

где $m_k = M(x-Mx)^k$ - центральные моменты распределения k-ого порядка, Mx - математическое ожидание распределения величины x. Распределение статистической величины x однозначно определяется как своими центральными моментами, так и семиинвариантами, если они существуют. Важным преимуществом семиинвариантов является то, что они взаимно увязывают центральные моменты различных порядков и более интенсивно реагируют на флуктуации распределения. Для нормального распределения семиинварианты любого порядка, начиная с третьего, коэффициенты асимметрии и эксцесса равны нулю. Поэтому весьма удобно применить это свойство в качестве критерия на соответствие моделируемого распределения гауссовому. Для первых шести семиинвариантов в справочниках даны соотношения между семиинвариантами и центральными моментами:

$$\begin{aligned}
&\chi_1 = m_1 = Mx \\
&\chi_2 = m_2 = Dx = \sigma^2 \\
&\chi_3 = m_3 \\
&\chi_4 = m_4 - 3m_2^2 \\
&\chi_5 = m_5 - 10m_2 m_3 \\
&\chi_6 = m_6 - 15m_2 m_4 - 10m_3^2 + 30m_2^3 .
\end{aligned} \qquad (1)$$

Используя соотношения (1) и прямые вычисления центральных моментов из данных численного моделирования нетрудно проследить за эволюцией распределения пространственного заряда сгустка частиц в различных каналах транспортировки. В случае близости реального распределения к гауссовому искомую аналитическую аппроксимацию можно построить, например, с помощью рядов Грама-Шарлье и Эджворта, при удержании необходимого числа членов ряда. Коэффициентами ряда являются алгебраические выражения от центральных моментов распределения различных порядков.

2.2 Анализ эволюции распределения частиц по данным численного моделирования

Проведено два численных эксперимента по проводке пучка в ЛУ протонов, состоящем из начальной части на структуре с ПОКФ и следующими за ней тремя секциями ускорителя Альвареца до энергии 56 МэВ. Два расчёта соответствуют двум различным режимам формирования сгустков в структуре с ПОКФ. Первый вариант включает структуру с ПОКФ с квазистационарным участком формирования сгустков при увеличенном коэффициенте пространственной модуляции электродов [12]. Во втором варианте используется структура с модифицированным мягким режимом формирования сгустков на начальной стадии ускорения за счёт снижения начальных значений и медленного роста коэффициента пространственной модуляции электродов [13]. Моделирование динамики пучка проводилось по программе PROTON [4] со следующими параметрами :

входной ток пучка - *150* мА,
начальный фазовый объём - *0,2* см·мрад,
апертура канала - *1* см,
число крупных частиц в одном сгустке - *800*,
распределение частиц на входе - микроканоническое в поперечном фазовом пространстве и равномерное в продольном с разбросом по энергиям ±1%,
число сгустков - *3* в первом варианте и *5* во втором,
пучок согласован с каналом в поперечной плоскости,
влияние стенок канала на кулоновское поле не учитывалось.

Результаты расчётов в структурах с ПОКФ представлены на рис.1-2. При этом в статистику включены все частицы с отклонением продольной координаты Z на $\beta\lambda/2$ по обе стороны от синхронной частицы центрального сгустка, в том числе привходящие из других сгустков. Для более удобного сопоставления результатов моделирования динамики пучков с различными значениями среднеквадратического эмиттанса исходное распределение координат и скоростей частиц подвергалось

процедуре стандартизации к соответствующей приведенной координате $x=(X-MX)/\sigma_x$, после чего проводилась статистическая обработка стандартизованного распределения. Полученные результаты показывают, что семиинварианты и коэффициенты эксцесса распределений по координатам частиц центрального сгустка сходятся к нулю в обоих вариантах, однако, характер поведения семиинвариантов шестого порядка различен, что указывает на различия в процессе перераспределения плотности пространственного заряда в сгустке. Поведение поперечных коэффициентов асимметрии γ_1^{xy} ничем не отличается в обоих вариантах и практически равно нулю на всем протяжении ЛУ. Существенно, что наиболее сильно уменьшаются абсолютные значения поперечных семиинвариантов наиболее высокого порядка из числа использованных.. Отдельные выбросы исследуемых параметров связаны с включением в статистику выпавших из синхронизма частиц и наблюдаются, в основном, в продольной плоскости. Это позволяет принять гипотезу о сходимости распределения плотности пространственного заряда в поперечной плоскости к нормальному закону в качестве рабочей при построении искомой аналитической аппроксимации.

Сопоставление зависимостей среднеквадратического нормализованного эмиттанса с зависимостями параметров продольного движения от номера полупериода пространственной модуляции электродов n в варианте 1 показывает, что стадия резкого роста эмиттанса заканчивается несколько позже того момента, когда в продольной плоскости сформировано сильное сгущение плотности заряда, на что указывает большое положительное значение коэффициента эксцесса γ_2^z. Продольный коэффициент асимметрии γ_1^z меняется также достаточно сильно и на участке регулярного ускорения ПОКФ приобретает заметное отрицательное значение, что указывает на появление хвоста распределения в сторону отстающих от ускорения частиц. Эти результаты подтверждают сделанный ранее в работе [5] вывод о продольном сжатии монохроматического пучка, как основной причине резкого роста эмиттанса в ПОКФ, и дают дополнительную информацию о перераспределении плотности пространственного заряда. На участке продольного сжатия про-

исходит первичное образование небольшого ореола пучка, на что указывает быстрое увеличение максимальной абсолютной координаты $|x|_{max}$ частиц сгустка по отношению к среднеквадратическому отклонению σ_x. Знакопеременный затухающий характер изменения χ_6 по всем координатам и малая величина ореола пучка, вероятно, могут свидетельствовать о бурной релаксации плотности пространственного заряда сгустка, которая заканчивается при большой величине среднеквадратического фазового объёма пучка (в *2,4* раза большей исходного значения). Стабилизация около нуля значений семиинвариантов $\chi_6^{x,y}$ распределения пучка, в варианте 1, после завершения стадии резкого роста эмиттанса (номер ячейки n >*60*) позволяет предположить, что в дальнейшем эволюция распределения плотности пространственного заряда в поперечной плоскости происходит вокруг нормального закона. Последующий более медленный рост среднеквадратического эмиттанса может быть обусловлен как дополнительным поджатием сгустка в продольном направлении (плавный рост продольного эксцесса γ_2^z), так и добавочным ростом ореола пучка (медленный рост относительного максимального абсолютного отклонения $|x|_{max}/\sigma_x$ частиц сгустка) вследствие резонансных взаимодействий между пульсирующим ядром пучка и отдельными частицами. Как показывают результаты Jameson [14] по численному моделированию динамики двумерного непрерывного несогласованного пучка в квадрупольном канале, амплитуды колебаний частиц при таком резонасном взаимодействии ограничены. В нашем случае некоторое рассогласование может появиться в области продольной перетяжки (номер ячейки n ≅*30*), образованной в результате быстрой продольной компрессии сгустка, при которой среднеквадратические значения исходно согласованной поперечной огибающей не успевают полностью адаптироваться к их новым согласованным значениям, соответствующим увеличенной пиковой фазовой плотности тока в данном месте. Проведённый анализ подтверждает заложенную в проект данного варианта ПОКФ идею о поддержании квазистационарного режима ускорения сгустков при надлежащем продольном согласовании пучка на входе.

Во втором варанте с модифицированным ПОКФ семиинварианты $\chi_6^{x,y}$ изменяются более плавно знакопостоянным образом и достигают нуля несколько позже, чем в варианте 1. Продольный эксцесс γ_2^z такаже меняется медленнее и достигает примерно вдвое меньшего положительного значения на *20* полупериодов позже, что соответствует также меньшей скорости роста и максимальной величине нормализованного эмиттанса (примерно *1,9* от исходного значения). Продольный коэффициент асимметрии γ_1^z флуктуирует около нуля. Поведение продольных семиинвариантов свидетельствует о лучшем заполнении сепаратрисы в варианте 2 по сравнению с вариантом 1. Поперечные коэффициенты эксцесса $\gamma_2^{x,y}$ изменяются аналогично первому варианту, однако, их абсолютные значения и флуктуации несколько выше, что указывает на меньшую стабильность распределения. Наблюдаются более высокие значения относительного максимального абсолютного отклонения координат частиц $|x|_{max}/\sigma_x$ и при более низких энергиях по сравнению с вариантом 1, что свидетельствует о формировании более обширного ореола пучка в варианте 2. Проведённый анализ эволюции распределения частиц в варианте 2 показывает, что за счёт изменения режима формирования сгустков удалось снизить максимальный рост среднеквадратического поперечного эмиттанса пучка, коррелирующий с уменьшением первичного продольного эксцесса γ_2^z. Однако, такой режим приводит к снижению коэффициента захвата в ускорение, что может быть связано с развитием стохастических процессов в нелинейной части сепаратрисы.

Полученные результаты не позволяют сделать заключение о скорости роста и возможном насыщении зависимости нормализованного эмиттанса от времени при более высоких энергиях, так как в обоих вариантах происходит обрезка ореола пучка стенками канала, на что указывают потери пучка при снижении величин эмиттанса и относительного максимального отклонения частиц сгустка. Однако, на основании полученных результатов можно предположить, что эволюция пучка в варианте 1 удовлетворяет гипотезе Боголюбова, а динамика пучка в варианте 2 развивается по смешанному типу. Окончательное за-

ключение по этому вопросу возможно после доработки программы PROTON, проведения дополнительных расчётов в каналах с большой апертурой и анализа характерных времён физических процессов.

3. Методика определения сверхмалых потерь частиц

Предложенный выше подход к анализу эволюции распределения частиц с применением семиинвариантов позволил обнаружить сходимость распределения частиц к закону Гаусса в численном моделировании в соответствии с термодинамическим принципом максимума энтропии. Это обосновывает применение рядов Грама-Шарлье и Эджворта для построения аналитической аппроксимации распределения пространственного заряда по координатам и методики определения сверхмалых потерь частиц. Искомая аппроксимация распределения плотности пространственного заряда $\rho_x(x)$ по поперечной координате x имеет вид:

$$\rho_x(x)=\varphi_n(x)-\frac{\gamma_1}{3!}\varphi_n^{(3)}(x)+\frac{\gamma_2}{4!}\varphi_n^{(4)}(x)+10\frac{\gamma_1^2}{6!}\varphi_n^{(6)}(x) \qquad (2),$$

где $\varphi_n(x)=\exp(x^{\frac{-1}{2}})/\sqrt{2\pi}$ - плотность стандартизованного нормального (гауссова) распределения. Производные от нормальной функции распределения $\varphi_n^{(k)}(x)$ выражаются через многочлены Эрмита следующим образом:

$$\varphi_n^{(k)}(x)=\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^k H_k\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\varphi_n(x) \qquad (3).$$

Интересующие нас многочлены Эрмита имеют вид:

$$\begin{aligned} H_3(x)&=8x^3-12x\ ,\\ H_4(x)&=16x^4-48x^2+12\ ,\\ H_6(x)&=64x^6-480x^4+720x^2-120 \end{aligned} \qquad (4).$$

Коэффициенты асимметрии γ_1 и эксцесса γ_2 в разложении распределения $\rho_x(x)$ в ряд по гауссовому распределению $\varphi_n(x)$ являются коэффициентами искомого распределения $\rho_x(x)$. В нашем случае в качестве искомого распределения выступает дискретное распределение крупных частиц центрального сгустка по координатам. Вычисленые по данным численного моделирования траекторий крупных частиц семиинварианты χ_k и

следующие из них коэффициенты асимметрии γ_1 и эксцесса γ_2 подставляются в аппроксимирующую формулу (2). Функция распределения плотности пространственного заряда $\rho_x(x)$ определяет вероятность нахождения отдельной реальной заряженной частицы пучка на удалении x от его центра. Физическая интерпретация процессов, приводящих к появлению частиц на больших удалениях от оси канала ЛУ, в рамках поставленной задачи несущественна, а совокупность этих процессов (резонасные взаимодействия, диффузия Арнольда и др.) охватываются численным моделированием при заданных внешних полях и характеристиках инжектируемого пучка.

По физическоиу смыслу функция (2) должна удовлетворять стандартному условию нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)dx = 1 \qquad (5).$$

После подстановки выражений (3) и (4) в условие нормировки (5) оказывается, что интеграл (5) сводится к сумме табличных интегралов вида [15]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n \cdot \exp(-px^2 - qx)dx = \left(\frac{i}{2}\right)^n \sqrt{\pi}\, p^{-\frac{n+1}{2}} \exp\left(\frac{q^2}{4p}\right) H_n\left(\frac{iq}{2\sqrt{p}}\right) \qquad [\mathrm{Re}\,p > 0]$$

при $q=0$ (i-мнимая единица). После несложных алгебраических преобразований нетрудно видеть, что все интегралы при производных $\varphi_n^{(k)}(x)$ обращаются в ноль при $q=0$. Таким образом, предложенная аппроксимация (2) удовлетворяет условию нормировки (5) при любых значениях коэффициентов γ_1 и γ_2.

Результаты расчёта функции распределения Гаусса $\varphi_n(x)$ ($\varphi_n(x) = \rho_x(x)$ при $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$) и аппроксимированной по формуле (2) функции $\rho_x(x)$ при различных γ_1 и γ_2 представлены в таблицах 1,2. Интересующий нас интеграл вероятности $R_x(x)$, определяющий число частиц с координатой меньшей, чем заданная координата x, получается при замене в формуле (2) $\varphi_n(x)$ на интеграл вероятности для гауссова распределения $F_n(x)$. Используя таблицы для $F_n(x)$ и $\mathrm{erf}(x)$ нетрудно определить число час-

тиц с координатой, превышающей заданную апертуру канала или минимальную апертуру канала по заданному уровню предельно допустимых интегральных потерь частиц пучка. Для потерь на уровне 10^{-7} значение апертуры канала, содержащей требуемое число частиц, по отношению к среднеквадратическому размеру пучка, определённое по формуле (2) при $\gamma_2<1.0$ и $\gamma_1=0.0$, не превышает 6.5σ, что на $\approx 30\%$ больше, чем для распределения Гаусса.

Предложенная аппроксимация обладает четвёртым порядком точности в соответствии с максимальным порядком центральных моментов, входящих в формулу (2), и справедлива для широко распространенного класса унимодальных пучков со смещённым от центра ядром и ореолом на периферии при следующих ограничениях: $0 \le \gamma_2 < 2$, $|\gamma_1| < 0,3$. За пределами указанных диапазонов в формуле (2) появляются дополнительные моды распределения. Стандартным способом их устранения является привлечение дополнительных членов ряда более высоких порядков. Значения макропараметров стандартизованного поперечного микроканонического распределения в зависимости от числа крупных частиц в сгустке при прочих равных условиях представлены в таблице 3. Результаты расчётов показыват, что макропараметры чётных порядков воспроизводятся с хорошей точностью ($\approx 2-5\%$) при обычном количестве (≈ 800) крупных частиц в сгустке. Для моделирования распределения с высокой точностью при исчезающе малых асимметриях необходимо брать свыше 4000 крупных частиц в сгустке. При числе частиц меньше 300 статистика обладает низкой устойчивостью по отношению к макропараметрам высоких порядков.

В работе [16] обсуждаются поправки к нормальному распределению, обусловленные стохастическими процессами в накопительных электронных кольцах, при жёстких ограничениях на вышеупомянутые характерные времена с разделением процессов на три категории. При наложенных ограничениях функция распределения частиц в фазовом пространстве является постоянной во времени. Задача рассматривалась в рамках уравнения Фоккера-Планка с нулевым граничным условием на апертуре канала для функции распределения. Для коэффициен-

та диффузии, входящего в уравнение Фоккера-Планка, были взяты значения, табулированные для эффекта Тушека в слабофокусирующих каналах. Строго говоря, такой подход с нулевым граничным условием на апертуре для постоянной функции распределения не позволяет корректно вычислить потери частиц в линейных ускорителях, где время ускорения частиц может быть существенно меньше наложенных в [16] ограничений снизу.

Изложенные в настоящей работе исследования эволюции распределения заряженных частиц в каналах транспортировки будут продолжены. В частности, с целью вычисления коэффициентов диффузии и вязкого трения, в общем случае зависящих от времени, будет исследоваться уравнение Фоккера-Планка с учётом восстановленной из численного моделирования функции распределения частиц. Эти исследования необходимы для расчёта дифференциальной функции потерь частиц вдоль канала ЛУ и определения эффективности обрезки ореола пучка.

4. Заключение

Для анализа эволюции распределения частиц в шестимерном фазовом пространстве и построения методики определения сверхмалых потерь тока пучка предложено использовать принцип максимума энтропии и математический аппарат статистических семиинвариантов высоких порядков совместно с производными от них параметрами - коэффициентами асимметрии и эксцесса. Предложенный способ обработки данных обнаруживает большую чувствительность к изменениям распределения частиц и является удобным инструментом для анализа динамики пучка в ускорителях.

Проведён анализ эволюции распределения частиц пучка по поперечным координатам с согласованными входными параметрами по результатам численного моделирования в идеальных квадрупольных каналах с различным режимом формирования сгустков. Полученные зависимости значений семиинвариантов от времени указывают на сходимость распределения частиц по поперечным координатам к гауссовому закону в соответствии с принципом максимума энтропии. Этим обосновывается

построение методики определения интегральных потерь частиц пучка на сверхмалом уровне с применением рядов Грама-Шарлье и Эджворта. Предложена формула, аппроксимирующая функцию распределения частиц по координатам, и представлены расчёты плотности пространственного заряда пучка при различных значениях коэффициентов асимметрии и эксцесса в сравнении с нормальным законом. Данная формула справедлива в широком классе унимодальных пучков со смещённым от центра ядром и ореолом на периферии.

Предложенные математический аппарат и методика расчёта потерь частиц могут быть развиты и применены для анализа динамики ансамбля заряженных частиц с различными исходными распределениями в неидеальных каналах различных типов и определения дифференциальной функции потерь тока пучка вдоль ускоряющего канала.

Таблица 1. Плотность пространственного распределения заряда ρ при γ_2=0.

X \ γ_1	-0.1	-0.05	-0.01	0,	0.01	0.05	0.1
-8.	$1.9\cdot10^{-13}$	$6.1\cdot10^{-14}$	$1.1\cdot10^{-14}$	$5.1\cdot10^{-15}$	$2.4\cdot10^{-15}$	$2.0\cdot10^{-14}$	$1.1\cdot10^{-13}$
-7.	$1.6\cdot10^{-10}$	$6.0\cdot10^{-11}$	$1.5\cdot10^{-11}$	$9.1\cdot10^{-12}$	$5.3\cdot10^{-12}$	$1.1\cdot10^{-11}$	$6.6\cdot10^{-11}$
-6.	$5.0\cdot10^{-8}$	$2.2\cdot10^{-8}$	$8.3\cdot10^{-9}$	$6.1\cdot10^{-9}$	$4.3\cdot10^{-9}$	$2.1\cdot10^{-9}$	$1.0\cdot10^{-8}$
-5.	$5.7\cdot10^{-6}$	$3.2\cdot10^{-6}$	$1.8\cdot10^{-6}$	$1.5\cdot10^{-6}$	$1.2\cdot10^{-6}$	$5.0\cdot10^{-7}$	$2.8\cdot10^{-7}$
-4.	$2.7\cdot10^{-4}$	$2.0\cdot10^{-4}$	$1.5\cdot10^{-4}$	$1.3\cdot10^{-4}$	$1.2\cdot10^{-4}$	$8.0\cdot10^{-5}$	$3.6\cdot10^{-5}$
-3.	0.00570	0.00508	0.00456	0.0043	0.00430	0.00375	0.00304
-2.	0.0557	0.05487	0.05417	0.05399	0.05381	0.05307	0.0521
-1.	0.2344	0.2381	0.2412	0.2420	0.2428	0.2461	0.2506
0.	0.3981	0.3987	0.3989	0.3989	0.3989	0.3987	0.3981
1.	0.2506	0.2461	0.2428	0.2420	0.2412	0.2381	0.2344
2.	0.0521	0.05307	0.0538	0.05399	0.05417	0.05487	0.0557
3.	0.00304	0.00375	0.00430	0.00443	0.00456	0.00508	0.00570
4.	$3.6\cdot10^{-5}$	$8.0\cdot10^{-5}$	$1.2\cdot10^{-4}$	$1.3\cdot10^{-4}$	$1.5\cdot10^{-4}$	$2.0\cdot10^{-4}$	$2.7\cdot10^{-4}$
5.	$2.8\cdot10^{-7}$	$5.0\cdot10^{-7}$	$1.2\cdot10^{-6}$	$1.5\cdot10^{-6}$	$1.8\cdot10^{-6}$	$3.2\cdot10^{-6}$	$5.7\cdot10^{-6}$
6.	$1.0\cdot10^{-8}$	$2.1\cdot10^{-9}$	$4.3\cdot10^{-9}$	$6.1\cdot10^{-9}$	$8.3\cdot10^{-9}$	$2.2\cdot10^{-8}$	$5.0\cdot10^{-8}$
7.	$6.6\cdot10^{-11}$	$1.1\cdot10^{-11}$	$5.3\cdot10^{-12}$	$9.1\cdot10^{-12}$	$1.5\cdot10^{-11}$	$6.0\cdot10^{-11}$	$1.6\cdot10^{-10}$
8.	$1.1\cdot10^{-13}$	$2.0\cdot10^{-14}$	$2.4\cdot10^{-15}$	$5.1\cdot10^{-15}$	$1.1\cdot10^{-14}$	$6.1\cdot10^{-14}$	$1.9\cdot10^{-13}$

Таблица 2. Плотность пространственного распределения заряда ρ при γ_1=0.

X \ γ_2	0.	0.01	0.05	0.1	0.5	1.	2.
0.	0.3989	0.3994	0.4014	0.4039	0.4239	0.4489	0.4987
1.	0.2420	0.2418	0.2410	0.2400	0.2319	0.2218	0.2016
2.	0.05399	0.05388	0.05343	0.05286	0.04837	0.04274	0.03150
3.	0.00443	0.00449	0.00471	0.00499	0.00720	0.00997	0.01551
4.	$1.3\cdot10^{-4}$	$1.4\cdot10^{-4}$	$1.8\cdot10^{-4}$	$2.2\cdot10^{-4}$	$5.9\cdot10^{-4}$	0.00104	0.00195
5.	$1.5\cdot10^{-6}$	$1.8\cdot10^{-6}$	$3.0\cdot10^{-6}$	$4.4\cdot10^{-6}$	$1.6\cdot10^{-5}$	$3.1\cdot10^{-5}$	$6.1\cdot10^{-5}$
6.	$6.1\cdot10^{-9}$	$8.8\cdot10^{-9}$	$2.0\cdot10^{-8}$	$3.3\cdot10^{-8}$	$1.4\cdot10^{-7}$	$2.8\cdot10^{-7}$	$5.5\cdot10^{-7}$
7.	$9.1\cdot10^{-12}$	$9.1\cdot10^{-12}$	$4.9\cdot10^{-11}$	$8.9\cdot10^{-11}$	$4.1\cdot10^{-10}$	$8.1\cdot10^{-10}$	$1.6\cdot10^{-9}$
8.	$5.1\cdot10^{-15}$	$1.3\cdot10^{-14}$	$4.4\cdot10^{-14}$	$8.3\cdot10^{-14}$	$4.0\cdot10^{-13}$	$7.9\cdot10^{-13}$	$1.6\cdot10^{-12}$

Таблица 3. Значения макропараметров при различном числе частиц.

N	γ_1	γ_2	m_5	m_6	χ_5	χ_6
100	-0.033516	-1.1182	-0.12527	4.1811	0.20989	5.9434
200	-0.068275	-0.99208	-0.36502	4.9745	0.31772	4.8091
300	0.061124	-0.98889	0.24254	5.1048	-0.36870	4.9008
400	-0.073688	-1.0190	0.24928	4.9494	-0.48759	5.1796
600	0.060466	-1.0020	0.21781	5.0639	-0.38685	5.0578
800	0.031452	-0.93115	0.11610	5.5190	-0.19841	4.4764
1600	0.030671	-0.93354	0.13723	5.4977	-0.16948	4.4914
3200	0.030558	-0.90192	0.12022	5.7125	-0.18535	4.2319
4000	0.011011	-0.90624	0.04512	5.6690	-0.06499	4.2613

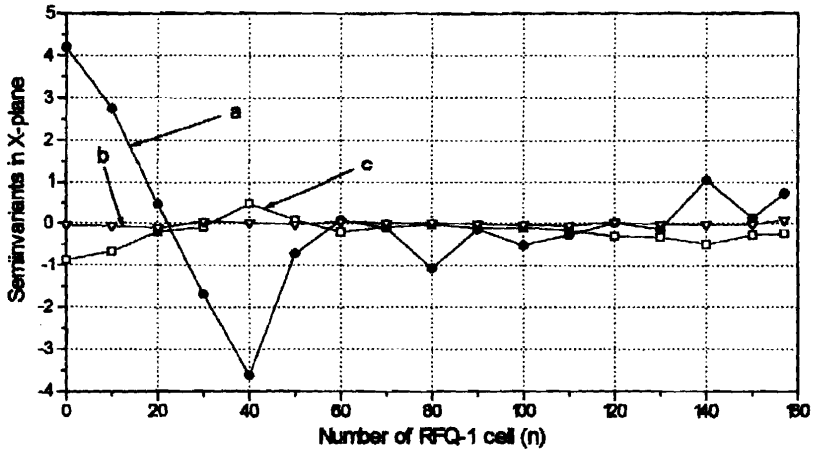

Рис.1.1 Зависимость семиинварианта χ_6 (**a**), коэффициента асимметрии γ_1 (**b**) и коэффициента эксцесса γ_2 (**c**) от номера ячейки в ПОКФ-1 для X-плоскости.

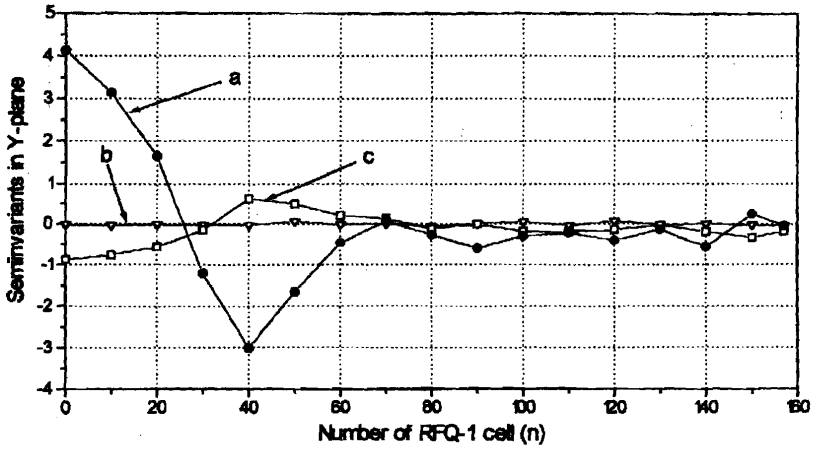

Рис.1.2 Зависимость семиинварианта χ_6 (**a**), коэффициента асимметрии γ_1 (**b**) и коэффициента эксцесса γ_2 (**c**) от номера ячейки в ПОКФ-1 для Y-плоскости.

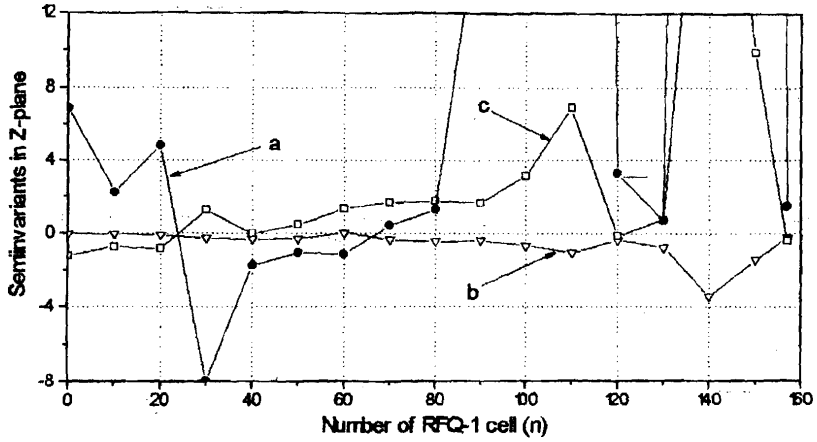

Рис.1.3 Зависимость семиинварианта χ_6 (**a**), коэффициента асимметрии γ_1 (**b**) и коэффициента эксцесса γ_2 (**c**) от номера ячейки в ПОКФ-1 для Z-плоскости.

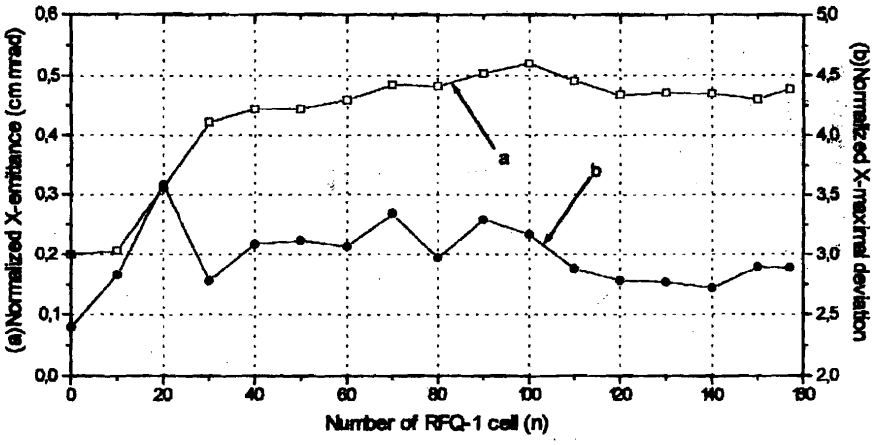

Рис.1.4 Зависимость нормализованного эмиттанса (**a**) и относительного максимального отклонения частиц (**b**) от номера ячейки (n) в ПОКФ-1 для X-плоскости.

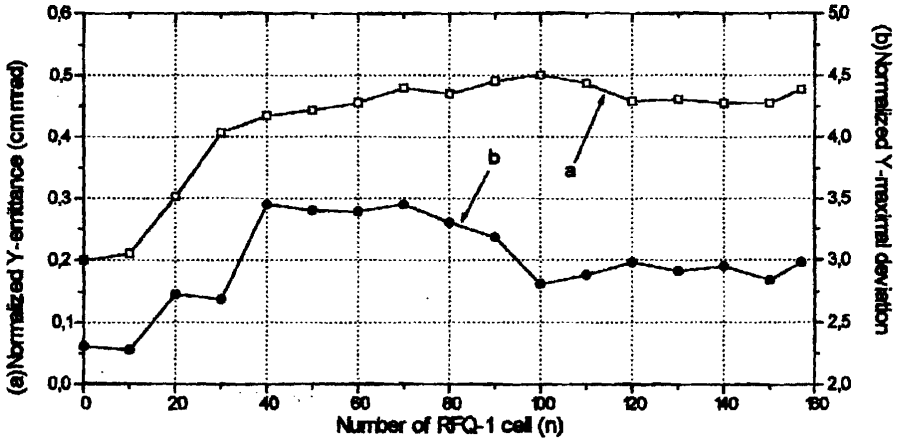

Рис.1.5 Зависимость нормализованного эмиттанса (**a**) и относительного максимального отклонения частиц (**b**) от номера ячейки (n) в ПОКФ-1 для Y-плоскости.

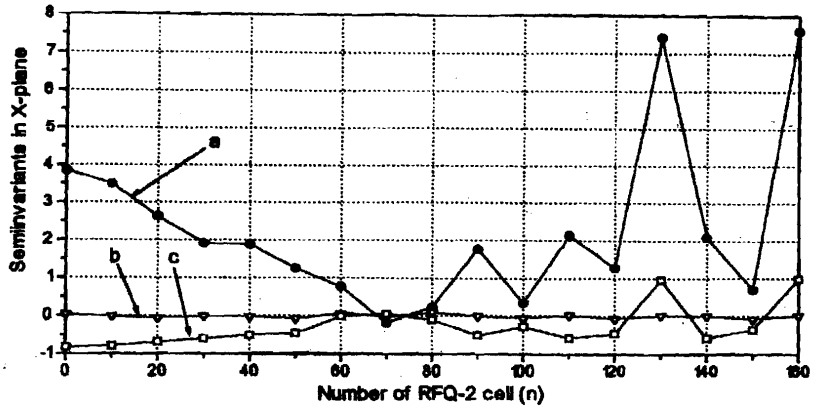

Рис.2.1 Зависимость семиинварианта χ_6 (a), коэффициента асимметрии γ_1 (b) и коэффициента эксцесса γ_2 (c) от номера ячейки в ПОКФ-2 для X-плоскости.

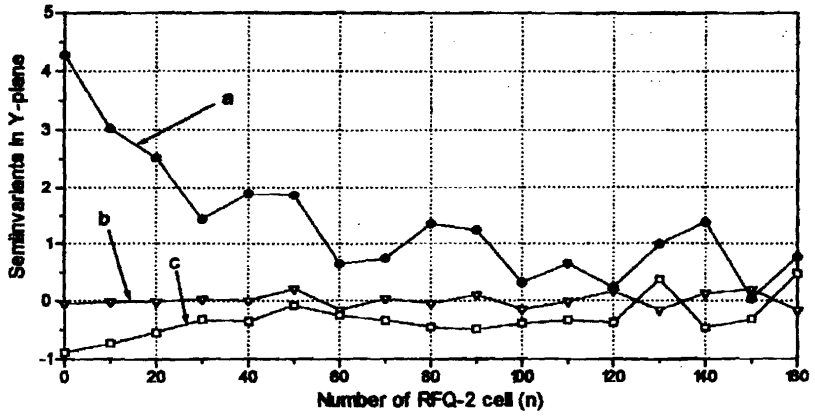

Рис.2.2 Зависимость семиинварианта χ_6 (a), коэффициента асимметрии γ_1 (b) и коэффициента эксцесса γ_2 (c) от номера ячейки в ПОКФ-2 для Y-плоскости.

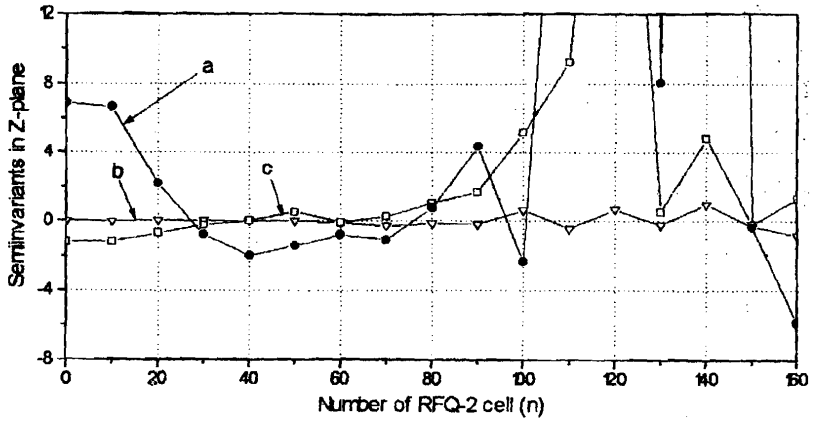

Рис.2.3 Зависимость семиинварианта χ_6 (**a**), коэффициента асимметрии γ_1 (**b**) и коэффициента эксцесса γ_2 (**c**) от номера ячейки в ПОКФ-2 для Z-плоскости.

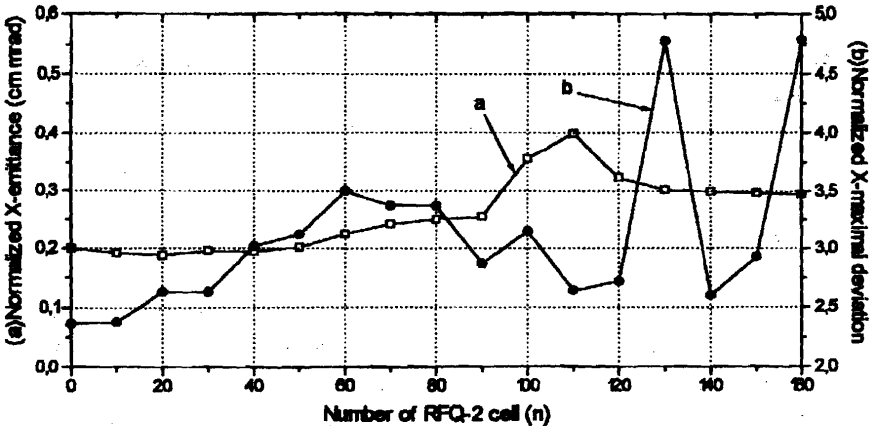

Рис.2.4 Зависимость нормализованного эмиттанса (**a**) и относительного максимального отклонения частиц (**b**) от номера ячейки (n) в ПОКФ-2 для X-плоскости.

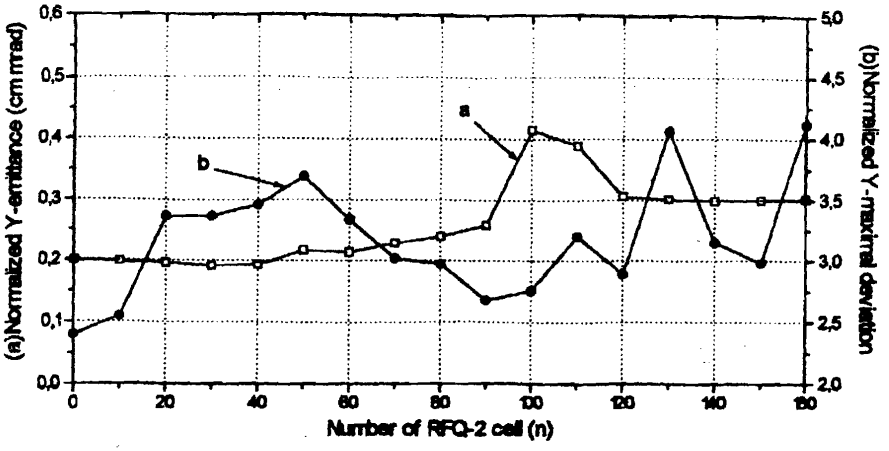

Рис.2.5 Зависимость нормализованного эмиттанса (a) и относительного максимального отклонения частиц (b) от номера ячейки (n) в ПОКФ-2 для Y-плоскости.

5. Литература

1. И.М.Капчинский. Теория линейных резонасных ускорителей. М.: Энергоиздат, 1982.
2. I.Haber, A.W.Maschke. Steady-State Transport of High-Current Beams in a Focused Channel // Physycal Rewiew Letters. 1979. V.42, No.22, PP.1479-1482.
3. T.P.Wangler, R.S.Mills, K.R.Crandall. Emittance Growth in Intense Beams. Preprint LA-UR-87-861, 1987.
4. И.А.Воробьев и др.. Численное моделирование динамики пучка в ускорителе ИТЭФ с пространсвенно-однородной квадрупольной фокусировкой. М., Препринт ИТЭФ, 1986, N^0 52.
5. И.А.Воробьев, А.А.Коломиец, Н.В.Шахрай. Рост эмиттанса в ускорителе с пространственно-однородной квадрупольной фокусировкой ИТЭФ // Труды 11 Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц, 25-27 октября 1988 г./Дубна, 1989. Том 1, с.506-508.

6.У.Саслау. Гравитационная физика звёздных и галактических систем. М.: Мир, 1989.

7.В.А.Ваталин. Необратимые процессы в бинарной системе канала охлаждения. М., Препринт ИТЭФ, 1981, N⁰ 102.

8.В.А.Ваталин. Рост эмиттанса пучка в ускорителе ионов, связанный с внутренним трением в пучке. М., Препринт ИТЭФ, 1982, N⁰ 128.

9.В.А.Ваталин. Роль необратимых процессов при формировании эмиттанса пучка на выходе источника ионов. М., Препринт ИТЭФ, 1984, N⁰ 105.

10.В.А.Ваталин. Термодинамика пучка заряженных частиц. Рост энтропии пучка при ускорении и транспортировке. М., Препринт ИТЭФ, 1986, N⁰ 34.

11.Г.Хакен. Информация и самоорганизация. Макроскопический подход к сложным системам. М.: Мир, 1991.

12.А.И.Балабин и др.. Основные физические параметры протонного линейного ускорителя Истра-56 (Часть-1). М., ЦНИИатоминформ, Препринт ИТЭФ, 1989, N⁰ 157.

13.Р.М.Венгров и др.. Линейный протонный ускоритель с пространственно-однородной фокусировкой на энергию 3 МэВ. М., Препринт ИТЭФ, 1993, N⁰ 34.

14.R.A.Jameson. Beam Halo from Collective Core/Single-Particle Interactions. LANL: LA-UR-93-1209, 1993.

15.А.П.Прудников, Ю.А.Брычков, О.И.Маричев. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981.

16.P.R.Zenkevich. Tails in the Distribution Functions of Electron Beams due to Incoherent Stochastic Effects. KEK Report 92-5, 1992.

Подписано к печати 21.08.95 Формат 60x90 1/16 Офсетн.печ.
Усл.-печ.л.1,5 Уч.-изд.л. 1,1 Тираж 90экз. Заказ 40
Индекс 3649

Отпечатано в ИТЭФ, 117259, Москва, Б.Черемушкинская,25