ITEP-29-96

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РФ
Институт теоретической и
экспериментальной физики

FERMILAB 29 -96
APR 8 1997
LIBRARY

Б.В.Медведев

ИНАМИЧЕСКАЯ СТОХАСТИЧНОСТЬ И СПЕКТР

Москва 1996

УДК 530.145.6 М-16
ДИНАМИЧЕСКАЯ СТОХАСТИЧНОСТЬ И СПЕКТР: Препринт ИТЭФ 29-96/
Б.В.Медведев - М., 1996 - 16с.

В работе – на примерах – исследуется, что есть характерные особенности квантового спектра динамически стохастической системы.

The paper demonstrates, through examples, what are the characteristic features of the quantum spectrum of a dynamically stochastic system.

Список лит. - 5 наим.

© Институт теоретической и экспериментальной физики, 1996

I. В литературе распространены утверждения, что спектры стохастических систем отличаются от спектров интегрируемых двумя основными особенностями:

(1) поскольку стохастические системы не имеют других интегралов движения кроме энергии, то **все энергетические уровни стохастической системы невырождены;**

(2) спектр стохастической системы **нерегулярен**, в смысле зависимости энергии от номера состояния;

Цель настоящей заметки сотоит в том, чтобы посмотреть, выполняются ли эти утверждения на простом примере. Того ради рассматривается модель Матиняна ([1]-[3]) – механическая система с двумя степенями свободы с Гамильтонианом:

$$H = \frac{p_x^2}{2} + \frac{p_y^2}{2} + \frac{x^2y^2}{2}, \tag{1}$$

исследовавшаяся ранее автором [4].

II. Линии уровня ее потенциальной энергии суть равнобочные гиперболы во всех четырех координатных углах. Система эта полностью стохастична; ее единственным интегралом движения является энергия E. Однако у нее есть и избранные (меры нуль по начальным условиям и неустойчивые) замкнутые траектории, в том числе - симметричные.

Если траектория замыкается после m "осцилляций" по одной переменной и n - по другой, то уместно говорить о "моде (m, n)". Такие моды были приближенно проинтегрированы в работе [4]. Кроме того, в классике вдоль осей $0x$ и $0y$ возможны и инфинитные движения, однако естественно ожидать, что после квантования сохранится только дискретный

спектр, поскольку инфинитность возможна только для x или y тождественно точно равных нулю, что в квантовом случае запрещено соотношением неопределенностей при $E < \infty$.

Замкнутые траектории были проквантованы по Бору-Зоммерфельду, что привело к спектру:

$$E = \left(\frac{3\pi}{16\sqrt{2}}\right)^{\frac{2}{3}} \hbar^{\frac{4}{3}}(2n_x \cdot 2n_y)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{3\pi}{16\sqrt{2}}\right)^{\frac{2}{3}} \hbar^{\frac{4}{3}}(2m \cdot 2n)^{\frac{2}{3}} k^{\frac{4}{3}}; 2n_x \cdot 2n_y = 2 \cdot 2N \tag{2}$$

где m и n характеризуют моду, а $k = 1, 2, 3, ...$ - степень ее возбуждения.

III. Из (2) видно, что чем сложнее мода, тем выше начинается отвечающий ей спектр - сложные моды с большими m и n "выжимаются" вверх по энергии. А так как незамкнутые - истинно стохастические - траектории можно мыслить как предел замкнутых при m и n стремящихся к бесконечности, (подобно тому, как иррациональное число можно представлять себе как предел рационального $\frac{m}{n}$ при взаимно простых m и n, стремящихся к бесконечности), то несколько литературно можно сказать, что **при квантовании свойство стохастичности системы выжимается на бесконечность по энергии**.

IV. Рассмотрение (опять, конечно, приближенное) той же задачи по волновой механике подтвердило эти выводы с тем уточнением, что теперь можно было утверждать, что рассмотренный по Бору-Зоммерфельду класс симметричных замкнутых орбит исчерпывает (с одним уточнением, речь о котором будет идти ниже) все стационарные состояния системы. Для энергии получалась та же формула

$$E_{n_x n_y} = \left(\frac{3\pi}{16\sqrt{2}}\right)^{\frac{2}{3}} \hbar^{\frac{4}{3}}[(2n_x+1)(2n_y+1)]^{\frac{2}{3}}; (2n_x+1)(2n_y+1) = (2M+1) \tag{3},$$

где $n_x, n_y = 1, 2, 3...$,
только с обычным добавлением половинок.

Мы видим, что спектр, как полученный по предписаниям Бора-Зоммерфельда, так и найденный из решения уравнения Шредингера, нарушает первую особенность, причем эти нарушения двоякого рода:
во-первых, значения энергии не меняются при замене $n_x \to n_y$. Это вырождение - обязательно; оно обусловлено тем, что хотя в классической механике рассматриваемая система и не имеет других интегралов движения, кроме энергии, при переходе к квантовому рассмотрению у нас появляются в качестве сохраняющихся наблюдаемых операторы дискретных симметрий (в нашем случае - группы C_{4v});

во-вторых, в (2) энергия оказывается одинаковой для пар (n_x, n_y) и (n'_x, n'_y), если

$$n_x n_y = n'_x n'_y. \tag{4}$$

Это, повидимому, является артефактом использовавшегося приближения, тем более, что из (3) следует уже несколько иное условие

$$(n_x + \frac{1}{2})(n_y + \frac{1}{2}) == (n'_x + \frac{1}{2})(n'_y + \frac{1}{2}). \tag{5}$$

Однако как само возникновение таких условий совпадения, так и их малое различие позволяют думать, что точные энергии связанных (4) или (5) пар должны быть близки.

V. Поскольку кратность уровня энергии (в примененном приближении) или группы близких уровней (в точном решении) определяется *числом способов, которыми целое число N может быть разбито на два целых множителя n_x и n_y (или нечетное целое число $(2M+1)$ может быть разбито в произведение двух целых множителей $(2n_x+1)$ и $(2n_y+1)$)*, то ясно, что зависимость величины $E \simeq N^{\frac{2}{3}}$ от порядкового номера ν состояния **не может быть гладкой**, так что вторая обсуждаемая в литературе особенность спектра стохастических систем выкладками нашего примера подтверждается (см. графики 1 и 2, на которых – для квантования по Бору-Зоммерфельду и квантования с помощью уравнения Шредингера приведена зависимость определяющих уровни энергии чисел $4N$ или $(2M+1)$ от порядкового номера состояния ν).

VI. Интересно, однако, попробовать понять, где лежит действительная причина этого явления. Рассмотрим того ради **точно интегрируемую систему с двумя степенями свободы**: квадратную потенциальную яму с бесконечно высокими стенками. Для нее полная энергия E есть сумма парциальных энергий движения по x и по y:

$$E = E_x + E_y, \tag{6}$$

каждая из которых пропорциональна квадрату соответствующего квантового числа

$$E_x \simeq n_x^2; \quad E_y \equiv n_y^2; \quad E \simeq P = n_x^2 + n_y^2, \tag{7}$$

и мы опять сталкиваемся со случаем, когда кратность уровня зависит от теоретикочисловой характеристики - теперь от числа способов, какими число N может быть представлено в виде суммы двух квадратов. В результате зависимость энергии от **одного** квантового числа ν опять оказывается нерегулярной (см. график 3) и только "в среднем" укладывается

на плавную кривую, причем теперь это уже точный результат, не использующий никаких приближений.

VII. Итак, главный вывод этого сообщения,:

Нерегулярная зависимость энергии стохастической системы от номера уровня определяется вовсе не ее стохастичностью, а тем, что энергия системы с двумя (или более; при одной степени свободы стохастичности не бывает) степенями свободы втискивается в прокрустово ложе одного квантового числа.[1] Если смотреть зависимость энергии от номера уровня **только для одной определенной моды с фиксированным** $\frac{m}{n}$, то она и в стохастическом случае оказывается совершенно регулярной!

VIII. Мы провели построение (график 1) зависимости определяющего энергию числа $4N = 2n_x \times 2n_y$ от номера состояния ν сперва для (приближенллго) квази-классического квантования по Бору-Зоммерфельду. Поскольку для этой зависимости оказались существенными теоретико-числовые свойства числа N, то интересно было посмотреть, что изменится при переходе к волновой механике, когда энергия будет определяться числом $2M + 1 = (2n_x + 1)(2n_y + 1)$, то есть при учете нулевой энергии колебаний по каждой координате. Показалось совершенно естественным, что при сохранении общего характера спектра детали нерегулярности совершенно изменились.

Однако кроме этого оказалось, что - на первый взгляд совершенно поразительным образом - усредненный по нерегулярностям спектра наклон кривой $(2M + 1) = f(\nu)$ уменьшился примерно вдвое сравнительно с наклоном кривой $4N = f(\nu)$. Иными словами, при переходе от рассмотрения по Бору-Зоммерфельду к уравнению Шредингера **число состояний** ν **с энергией, не большей** $E(\nu)$**, возрасло примерно в два раза!**.

IX. Объяснение этого парадокса оказалось несколько неожиданным и пришло через наблюдение того факта, что в исследованной области, для $(2M + 1) < 200$, больше половины состояний (199 из общего числа 345) отвечают или $n_x = 0$ или $n_y = 0$, то есть тому, что вдоль одной из осей происходят только нулевые колебания. Но в теории Бора нулевых колебаний нет, поэтому таким состояниям волновой механики в Боровской модели должны отвечать случаи, когда либо $x = 0$, либо $y = 0$ - но тогда (ведь соотношения неопределенностей нет!) должны быть возможны

[1] Тут уместно вспомнить, что фон Нейману [5] удалось сделать верной теорему, обратную теореме о коммутативности двух функций одного оператора, то есть то утверждение, что любые два коммутирующих оператора [скажем, **операторы координат** x **и** y] суть функции некоторого третьего, только ценой привлечения такого средства, как кривая Пэано.

инфинитные движения вдоль другой оси с любой (постоянной) скоростью - то есть должен быть кусок **непрерывного спектра**.

Именно состояния этого непрерывного спектра соответствуют в Боровской модели "лишним" состояниям волновомеханического описания.

ВЫВОДЫ. Какую мораль можно извлечь из рассмотренных примеров и проведенных рассуждений?

Во-первых, обоснована та точка зрения, что нерегулярность спектра не имеет прямого отношения к стохастичности классической системы, но вытекает из логического развития того древнего замечания, что в квантовой механике понятие числа степеней свободы системы строго говоря теряет свой смысл, поскольку (если спектр дискретен) всегда можно перенумеровать все стационарные состояния одной последовательностью натуральных чисел и считать их собственными состояниями единственной динамической переменной, которая будет полностью описывать систему.(Упоминавшаяся обратная теорема фон Неймана распространяет эту процедуру на непрерывный спектр).

Мы говорим теперь, что так сделать, конечно, можно, но за это придется заплатить потерей какой бы то ни было регулярности в зависимости энергии от номеров этих состояний.Именно эту цену и платят, когда располагают состояния стохастической системы только в порядке роста их энергии.

Во-вторых, в случае квазиклассического квантования по Бору-Зоммерфельду системы с несколькими степенями свободы игнорирование квантовых чисел равных нулю может приводить к потере целых больших серий реально существующих квантовых состояний.

Дополнение.
Построение зависимости $E = f(\nu)$.

Поскольку ожидаемая зависимость энергии отномера состояния нерегулярна, то для ее построения нет иного способа, кроме как составление таблиц, связывающих появляющиеся в рассматриваемых задачах три сорта целых "квантовых чисел": (1) парциальные квантовые числа n_x и n_y, отвечающие движениям в направлениях каждой из координатных осей; (2) выражающиеся через них регулярными формулами:

$$N = n_x \cdot n_y, \quad (2M+1) = (2n_x+1)(2n_y+1) \quad \textit{или} \quad P = n_x^2 + n_y^2$$

целые числа N, M и P, через которые опять-таки регулярно выражается энергия (ср.(2),(3) и (7)), и (3) числа ν, нумерующие **все** состояния в

порядке возрастания их энергии (внутри мультиплета нумерация произвольна).

Таблица 1 связывает номера состояний ν с числами N, характеризующими энергию $E \sim (4N)^{\frac{2}{3}}$ для модели Матиняна при квантовании по Бору-Зоммерфельду.

Таблица 2 устанавливает ту же связь с числами $(2M+1)$, определяющими энергию $E \sim (2M+1)^{\frac{2}{3}}$ при квантовании этой модели с помощью уравнения Шредингера.

Таблица 3 – с числом P, определяющим энергию $E \sim P$ для модели квадратной потенциальной ямы.

Получающиеся из этих таблиц зависимости чисел $4N, (2N+1)$ и P от ν приведены на графиках 1, 2 и 3. Из них наглядно видно, что **нерегулярны** тонкие детали этих зависимостей. Если отвлечься от них, то все три зависимости – на рассмотренных участках – **приближенно** укладываются на плавные кривые, а именно:

$$N \sim \nu^{0,77}; \quad (2M+1) \sim \nu^{0,8}; \quad P \sim \nu^{1}$$

Таблица 1. Построение спектра модели Матиняна по Бору-Зоммерфельду

N	наборы n_x, n_y	номера состояний ν
1	(1,1)	1
2	(2,1)(1,2)	2,3
3	(3,1)(1,3)	4,5
4	(4,1)(2,2)(1,4)	6-8
5	(5,1)(1,5)	9,10
6	(6,1)(3,2)(2,3)(1,6)	11-14
7	(7,1)(1,70)	15,16
8	(8,1)(4,2)(2,4)(1,8)	17-20
9	(9,1)(3,3)(1,9)	21-23
10	(10,1)(5,2)(2,5)(1,10)	24-27
11	(11,1)(1,11)	28,29
12	(12,1)(6,2)(4,3)(3,4)(2,6)(1,12)	30-35
13	(13,1)(1,13)	36,37
14	(14,1)(7,2)(2,7)(1,14)	38-41
15	(15,1)(5,3)(3,5)(1,15)	42-45
16	(16,1)(8,2)(4,4)(2,8)(1,16)	46-50
17	(17,1)(1,17)	51,52
18	(18,1)(9,2)(6,3)(3,6)(2,9)(1,18)	53-58
19	(19,1)(1,19)	59,60
20	(20,1)(10,2)(5,4)(4,5)(10,2)(20,1)	61-66
21	(21,1)(7,3)(3,7)(1,21)	67-70
22	(22,1)(11,2)(2,11)(1,22)	71-74
23	(23,1)(1,23)	75,76
24	(24,1)(12,2)(8,3)(6,4)(4,6)(3,8)(2,12)(1,24)	77-84
25	(25,1)(5,5)(1,25)	85-87
26	(26,1)(13,2)(2,13)(1,26)	88-91
27	(27,1)(9,3)(3,9)(1,27)	92-95
28	(28,1)(14,2)(7,4)(4,7)(2,24)(1,28)	96-101
29	(29,1)(1,29)	102,103
30	(30,1)(15,2)(10,3)(6,5)(5,6)(3,10)(2,15)(1,30)	104-111
31	(31,1)(1,31)	112,113
32	(32,1)(16,2)(8,4)(4,8)(2,16)(1,32)	114-119
33	(33,1)(11,3)(3,11)(1,33)	120-123
34	(34,1)(17,2)(2,17)(1,34)	124-127

N	наборы n_x, n_y	номера состояний ν
35	(35,1)(7,5)(5,7)(1,35)	128-131
36	(36,1)(18,2)(12,3)(9,4)(6,6)(4,9)(3,12)(2,18)(1,36)	132-140
37	(37,1)(1,37)	141,142
38	(38,1)(19,2)(2,19)(1,38)	143-146
39	(39,1)(13,3)(3,13)(1,39)	147-150
40	(40,1)(20,2)(10,4)(8,5)(5,8)(4,10)(2,20)(1,40)	151-158
41	(41,1)(1,41)	159,160
42	(42,1)(21,2)(14,3)(7,6)(6,7)(3,14)(2,21)(1,42)	161-168
43	(43,1)(1,43)	169,170
44	(44,1)(22,2)(11,3)(3,11)(2,22)(1,44)	171-176
45	(45,1)(15,3)(9,5)(5,9)(3,15)(1,45)	177-182
46	(46,1)(23,2)(2,23)(1,46)	183-186
47	(47,1)(1,47)	187,188
48	(48,1)(24,2)(16,3)(12,4)(8,6)(6,8)(4,12)(3,16)(2,24)(1,48)	189-198
49	(49,1)(7,7)(1,49)	199-201
50	(50,1)(25,2)(10,5)(5,10)(2,25)(1,50)	202-207

Таблица 2. Построение спектра модели Матиняна по волновой механике.

M	$2M+1$	наборы n_x, n_y	номера состояний ν
0	1	(0,0)	1
1	3	(1,0)(0,1)	2,3
2	5	(2,0)(0,2)	4,5
3	7	(3,0)(0,3)	6,7
4	9	(4,0)(2,2)(0,4)	8-10
5	11	(5,0)(0,5)	11,12
6	13	(6,0)(0,6)	13,14
7	15	(7,0)(2,1)(1,2)(0,7)	15-18
8	17	(8,0)(0,8)	19,20
9	19	(9,0)(0,9)	21,22
10	21	(10,0)(3,1)(1,3)(0,10)	23-26
11	23	(11,0)(0,11)	27,28
12	25	(12,0)(2,2)(0,12)	29-31
13	27	(13,0)(4,1)(1,4)(0,13)	32-35
14	29	(14,0)(0,14)	36,37
15	31	(15,0)(0,15)	38,39
16	33	(16,0)(5,1)(1,5)(0,16)	40-43
17	35	(17,0)(3,2)(2,3)(0,17)	44-47
18	37	(18,0)(0,18)	48,49
19	39	(19,0)(6,1)(1,6)(0,19)	50-53
20	41	(20,0)(0,20)	54,55
21	43	(21,0)(0,21)	56,57
22	45	(22,0)(7,1)(4,2)(2,4)(1,7)(0,22)	58-63
23	47	(23,0)(0,23)	64,65
24	49	(24,0)(3,3)(0,24)	66-68
25	51	(25,0)(8,1)(1,8)(0,25)	69-72
26	53	(26,0)(0,26)	73,74
27	55	(27,0)(5,2)(2,5)(0,27)	75-78
28	57	(28,0)(9,1)(1,9)(0,28)	79-82
29	59	(29,0)(0,29)	83,84
30	61	(30,0)(0,30)	85,86
31	63	(31,0)(10,1)(4,3)(3,4)(1,10)(0,31)	87-92
32	65	(32,0)(6,2)(2,6)(0,32)	93-96
33	67	(33,0)(0,33)	97,98
34	69	(34,0)(11,1)(1,11)(0,34)	99-102

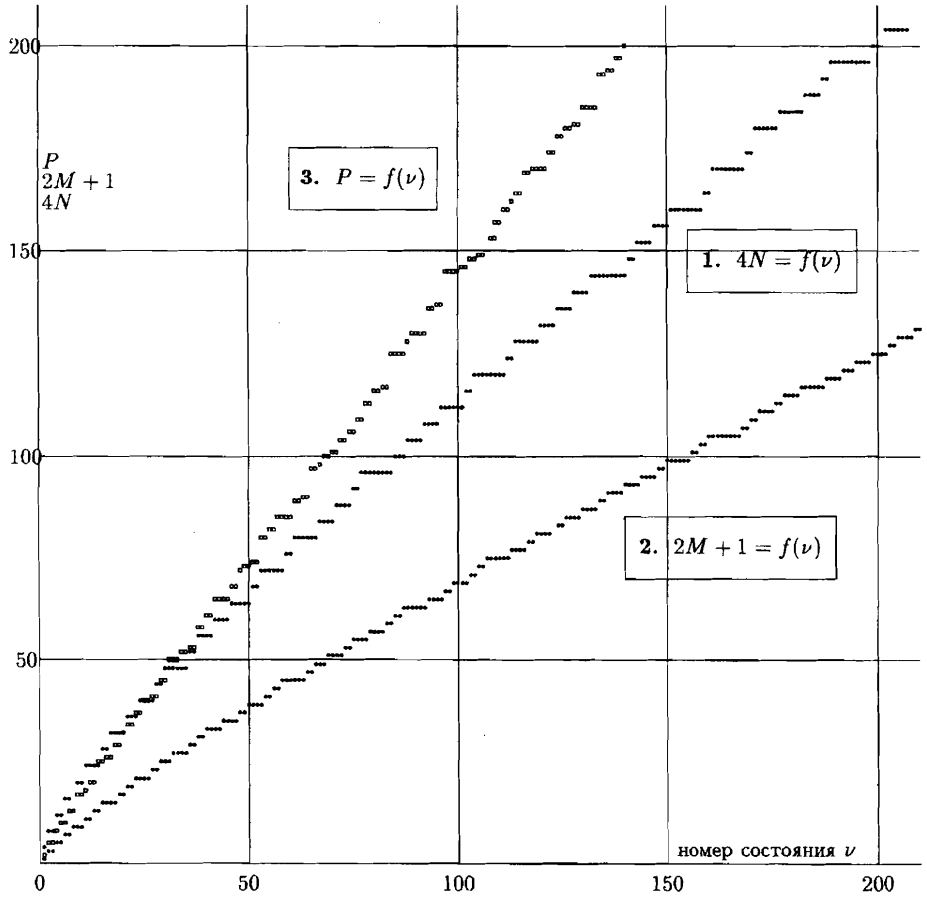
M	$2M+1$	наборы n_x, n_y	номера состояний ν
35	71	(35,0)(0,35)	103,104
36	73	(36,0)(0,36)	105,106
37	75	(37,0)(12,1)(7,2)(2,7)(1,12)(0,37)	107-112
38	77	(38,0)(5,3)(3,5)(0,38)	113-116
39	79	(39,0)(0,39)	117,118
40	81	(40,0)(13,1)(4,4)(1,13)(0,40)	119-123
41	83	(41,0)(0,41)	124,125
42	85	(42,0)(8,2)(2,8)(0,42)	126-129
43	87	(43,0)(14,1)(1,14)(0,43)	130-133
44	89	(44,0)(0,44)	134,135
45	91	(45,0)(6,3)(3,6)(0,45)	136-139
46	93	(46,0)(15,1)(1,15)(0,46)	140-143
47	95	(47,0)(9,2)(2,9)(0,47)	144-147
48	97	(48,0)(0,48)	148,149
49	99	(49,0)(16,1)(5,4)(4,5)(1,16)(0,49)	150-155
50	101	(50,0)(0,50)	156,157
51	103	(51,0)(0,51)	158,159
52	105	(52,0)(17,1)(10,2)(7,3)(3,7)(2,10)(1,17)(0,52)	160-167
53	107	(53,0)(0,53)	168,169
54	109	(54,0)(0,54)	170,171
55	111	(55,0)(18,1)(1,18)(0,55)	172-175
56	113	(56,0)(0,56)	176,177
57	115	(57,0)(11,2)(2,11)(0,57)	178-181
58	117	(58,0)(19,1)(6,4)(4,6)(1,19)(0,58)	182-187
59	119	(59,0)(8,3)(3,8)(0,59)	188-191
60	121	(60,0)(5,5)(0,60)	192-194
61	123	(61,0)(20,1)(1,20)(0,61)	195-198
62	125	(62,0)(12,2)(2,12)(0,62)	199-202
63	127	(63,0)(0,63)	203,204
64	129	(64,0)(21,1)(1,21)(0,64)	205-208
65	131	(65,0)(0,65)	209,210
66	133	(66,0)(9,3)(3,9)(0,66)	211-214
67	135	(67,0)(22,1)(13,2)(7,4)(4,7)(2,13)(1,22)(0,67)	215-222

M	$2M+1$	наборы n_x, n_y	номера состояний ν
68	137	(68,0)(0,68)	223,224
69	139	(69,0)(0,69)	225,226
70	141	(70,0)(23,1)(1,23)(0,70)	227-230
71	143	(71,0)(6,5)(5,6)(0,71)	231-234
72	145	(72,0)(14,2)(2,14)(0,72)	235-238
73	147	(73,0)(24,1)(10,3)(3,10)(1,24)(0,73)	239-244
74	149	(74,0)(0,74)	245,246
75	151	(75,0)(),75)	247,248
76	153	(76,0)(25,1)(8,4)(4,8)(1,25)(0,76)	249-254
77	155	(77,0)(15,2)(2,15)(0,77)	255-258
78	157	(78,0)(0,78)	259,260
79	159	(79,0)(26,1)(1,26)(0,79)	261-264
80	161	(80,0)(11,3)(3,11)(0,80)	265-268
81	163	(81,0)(0,81)	269,270
82	165	(82,0)(27,1)(16,2)(7,5)(5,7)(2,16)(1,27)(0,82)	271-278
83	167	(83,0)(0,83)	279-280
84	169	(84,0)(6,6)(0,84)	281-283
85	171	(85,0)(28,1)(9,4)(4,9)(1,28)(0,85)	284-289
86	173	(86,0)(0,86)	290,291
87	175	(87,0)(17,2)(12,3)(3,12)(2,17)(0,87)	292-297
88	177	(88,0)(29,1)(1,29)(0,88)	298-301
89	179	(89,0)(0,89)	302,303
90	181	(90,0)(0,90)	304,305
91	183	(91,0)(30,1)(1,30)(0,91)	306-309
92	185	(92,0)(18,2)(2,18)(0,92)	310-313
93	187	(93,0)(8,5)(5,8)(0,93)	314-317
94	189	(94,0)(32,1)(19,2)(7,6)(6,7)(2,19)(1,32)(0,94)	318-325
95	191	(95,0)(0,95)	326,327
96	193	(96,0)(0,96)	328,329
97	195	(97,0)(32,1)(19,2)(7,6)(6,7)(2,19)(1,32)(0,97)	330-337
98	197	(98,0)(0,98)	338,339
99	199	(99,0)(0,99)	340,341
100	201	(100,0)(33,1)(1,33)(0,100)	342-345

Таблица 3. Построение спектра квадратной потенциальной ямы.

$P = n_x^2 + n_y^2$	наборы n_x, n_y	номера состояний ν
2	(1,1)	1
5	(2,1)(1,2)	2,3
8	(2,2)	4
10	(3,1)(1,3)	5,6
13	(3,2)(2,3)	7,8
17	(4,1)(1,4)	9,10
18	(3,3)	11
20	(4,2)(2,4)	12,13
25	(4,3)(3,4)	14,15
26	(5,1)(1,5)	16,17
29	(5,2)(2,5)	18,19
32	(4,4)	20
34	(5,3)(3,5)	21,22
37	(6,1)(1,6)	23,24
40	(6,2)(2,6)	25,26
41	(5,4)(4,5)	27,28
45	(6,3)(3,6)	29,30
50	(7,1)(5,5)(1,7)	31-33
52	(6,4)(4,6)	34,35
53	(7,2)(2,7)	36,37
58	(7,3)(3,7)	38,39
61	(6,5)(5,6)	40,41
65	(8,1)(7,4)(4,7)(1,8)	42-45
68	(8,2)(2,8)	46,47
72	(6,6)	48
73	(8,3)(3,8)	49,50
74	(7,5)(5,7)	51,52
80	(8,4)(4,8)	53,54
82	(9,1)(1,9)	55,56
85	(9,2)(7,6)(6,7)(2,9)	57-60
89	(8,5)(5,8)	61,62
90	(9,3)(3,9)	63,64
97	(9,4)(4,9)	65,66

$F = n_x^2 + n_y^2$	наборы n_x, n_y	номера состояний ν
98	(7,7)	67
100	(8,6)(6,8)	68,69
101	(10,1)(1,10)	70,71
104	(10,2)(2,10)	72,73
106	(9,5)(5,9)	74,75
109	(10,3)(3,10)	76,77
113	(8,7)(7,8)	78,79
116	(10,4)(4,10)	80,81
117	(9,6)(6,9)	82,83
125	(11,4)(10,5)(5,10)(4,11)	84-87
128	(8,8)	88
130	(11,3)(9,7)(7,9)(3,11)	89-92
136	(10,6)(6,10)	93,94
137	(11,4)(4,11)	95,96
145	(12,1)(9,8)(8.9)(1,12)	97-100
146	(11,5)(5,11)	101,102
148	(12,2)(2,12)	103,104
149	(10,7)(7,10)	105,106
153	(12,3)(3,12)	107,108
157	(11,6)(6,11)	109,110
160	(12,4)(4,12)	111,112
162	(9,9)	113
164	(10,8)(8,10)	114,115
169	(12,5)(5,12)	116,117
170	(13,1)(11,7)(7,11)(1,13)	118-121
174	(13,2)(2,13)	122,123
178	(13,3)(3,13)	124,125
180	(12,6)(6,12)	126,127
181	(10,9)(9,10)	128,129
185	(13,4)(11,8)(8,11)(4,13)	130-133
193	(12,7)(7,12)	134,135
194	(13,5)(5,13)	136,137
197	(14,1)(1,14)	138,139
200	(10,10)	140


200
150
100
50
0
50
100
150
200
P
2M + 1
4N
3. P = f(ν)
1. 4N = f(ν)
2. 2M + 1 = f(ν)
номер состояния ν

Список литературы

[1] *Бассеян Г.З., Матинян С.Г. и Саввиди Г.К.* // Письма в ЖЭТФ. 1979. Т.29. С.641-646.

[2] *Матинян С.Г., Саввиди Г.К. и Тер-Арутюнян-Саввиди Н.Г.*// ЖЭТФ, 1981. Т.80. С.830-846.

[3] *Матинян С.Г., Саввиди Г.К. и Тер-Арутюнян-Саввиди Н.Г.* // Письма в ЖЭТФ. 1981. Т.34. С.613-617.

[4] *Медведев Б.В.* // ТМФ. 1984. Т.60. С.224-244.

[5] *Иоган фон НЕЙМАН* // Математические основы квантовой механики, М. Наука 1964. С.135.

Подписано к печати 10.06.96 Формат 60x90 1/16 Офсетн.печ.
Усл.-печ.л.1,0. Уч.-изд.л.0,7. Тираж 100 экз. Заказ 29.
Индекс 3649

Отпечатано в ИТЭФ, 117259, Москва, Б.Черемушкинская, 25