54

Институт теоретической и
экспериментальной физики

21-00

ITEP-21-00

В.С.Попов

Критический заряд в квантовой электродинамике.

Fermilab Library
0 1160 0088644 4

FERMILAB
SEP 5 2001
LIBRARY

Москва 2000

УДК 530.1 М-16

КРИТИЧЕСКИЙ ЗАРЯД В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ:
Препринт ИТЭФ 21-00/

В.С.Попов – М., 2000–52 с.

В квантовой электродинамике сверхсильных кулоновских полей существенными параметрами являются критический заряд ядра Z_{cr} и критическое расстояние R_{cr} в системе двух сталкивающихся тяжелых ядер, при достижении которых основной уровень электронного спектра опускается до границы нижнего континуума, после чего (т.е. при $Z > Z_{cr}$, или $R < R_{cr}$) становится возможным спонтанное рождение позитронов из вакуума. Рассмотрены различные методы расчета Z_{cr} и R_{cr}, зависимость этих величин от экранировки поля ядра электронной оболочкой атома, от внешнего магнитного поля, от массы и спина частицы, и т.д. Обсуждаются метод эффективного потенциала для уравнения Дирака, применение метода ВКБ к кулоновскому полю при $Z > 137$, а также к двухчастичному уравнению Салпитера для системы кварк-антикварк. Описаны некоторые технические детали вычислений критического расстояния R_{cr} в релятивистской задаче двух кулоновских центров.

Critical charge in quantum electrodynamics.

V.S.Popov

The essential parameters in Quantum Electrodynamics of strong Coulomb fields are the critical charge of the nucleus Z_{cr} and the critical distance R_{cr} between two colliding heavy nuclei. At $Z = Z_{cr}$, or at $R = R_{cr}$ the electron ground state reaches the boundary of the lower continuum and the spontaneous production of positrons from vacuum becomes possible. We discuss different methods for calculation of Z_{cr} and R_{cr}, the dependence of these quantities on the screening of the nuclear charge Z by an atomic shell, on the external magnetic field, on the mass and spin of the particle, etc. The effective potential nethod for the Dirac equation and application of the WKB method to the Coulomb field at $Z > 137$ and to the two-particle Salpeter equation for the quark-antiquark system are also discussed. Some technical details of the calculation of the critical distance R_{cr} in the relativistic two Coulomb centres problem are described.

Рис. – 15. Список лит. – 145 наим.

© Институт теоретической и экспериментальной физики, 2000

Посвящается памяти
Аркадия Бенедиктовича Мигдала
и Михаила Самуиловича Маринова

"Это было время, нуждавшееся в гигантах
и породившее гигантов, гигантов учености,
духа и характера ..."

/Ф.Энгельс, *Диалектика природы*/

"Могучий и громадный, далек астральный лад ... "

/фольклор/

1. Введение

Квантовая электродинамика (КЭД) является сегодня общепризнанной теорией, описывающей взаимодействие электронов (позитронов) с фотонами. Она дает полное квантовомеханическое описание любых процессов с этими частицами, позволяя получать выражения, свободные от расходимостей, в любом (в принципе) порядке теории возмущений.

Тридцать лет тому назад возник интерес к предсказаниям КЭД для сверхсильных кулоновских полей, в том числе к эффекту спонтанного рождения позитронов из вакуума, см. например [1-30], обзоры [7,31-37] и монографии [38,39]. Особенностью данного процесса является то, что он не связан с частотой изменения электрического поля и может происходить при сколь угодно медленном (адиабатическом) возрастании заряда ядра $Z > Z_{cr}$, чем в принципе отличается от всех других, ранее известных, механизмов образования позитронов. Кроме того, его вероятность

нельзя рассчитать по теории возмущений [1] и необходим анализ точных решений уравнения Дирака во внешнем поле.

Постановка задачи принадлежит Померанчуку и Смородинскому [40], которые еще в 1945 г. рассмотрели энергетический спектр электрона в кулоновском поле с учетом конечного радиуса ядра и получили первую оценку для Z_{cr}. Однако затем в течение долгого времени этот вопрос не исследовался.

После 1969-70 г.г. возник поток теоретических работ, посвященных этой и родственным ей проблемам. Были детально исследованы различные аспекты спонтанного рождения позитронов [2] как для изолированного сверхтяжелого ядра, так и при сближении двух тяжелых ядер с суммарным зарядом $Z_u = Z_1 + Z_2 > Z_{cr}$, например, ядер урана. Весьма своеобразным оказалось теоретическое описание структуры вакуумной электронной оболочки сверхкритического ($Z > Z_{cr}$) атома [7,15-17,37]. Этот круг вопросов подробно рассмотрен в обзорах [7,31-39], к которым мы и отсылаем читателей.

Цель данной статьи более ограниченная – изложить и обсудить различные методы расчета критического заряда ядра Z_{cr} и критического расстояния R_{cr} при столкновении двух тяжелых ядер, а также некоторые уравнения для энергии уровней электронного спектра в области $Z \gtrsim Z_{cr}$. Эти величины являются основными физическими параметрами задачи и фигурируют во всех уравнениях, относящихся к теории спонтанного рождения позитронов. Вместе с тем, в известных мне обзорах данные вопросы обсуждаются менее подробно, чем хотелось бы.

Далее, как правило, $\hbar = c = m = 1$ (m – масса электрона), расстояния измеряются в единицах $\hbar/mc = 386.2$ Фм, ε – энергия уровня в единицах mc^2, $\alpha = e^2/\hbar c = 1/137$ и $\zeta = Z\alpha$. В ε мы включаем энергию покоя, так что $\varepsilon = 1$ соответствует покоящемуся свободному электрону (т.е. границе верхнего континуума решений уравнения Дирака), а $\varepsilon = -1$ – границе нижнего континуума, которой отвечает энергия связи $2mc^2$.

Эта работа посвящается памяти Аркадия Бенедиктовича Мигдала (1911–1991) и Михаила Самуиловича Маринова (1939–2000). Обсужде-

[1] Вероятность спонтанного рождения позитронов имеет неаналитическое (по параметру $\zeta = Z\alpha$) пороговое поведение при $Z \to Z_{cr}$, см. ниже формулу (37).

[2] А также сопутствующие процессы – такие, как вынужденное образование позитронов (связанное с отличной от нуля частотой изменения электрического поля при сближении ядер), парная конверсия при кулоновском возбуждении сталкивающихся ядер, образование δ-электронов и т.д., учет которых необходим при постановке эксперимента. По всем этим вопросам мы отсылаем к работам [7,10,21,25,39] и цитированной в них литературе.

ние с Аркадием Бенедиктовичем (АБ, как мы обычно называли его между собой) различных аспектов квантовой электродинамики сильных полей, равно как и более широкого круга физических (да и не только физических) вопросов, всегда было чрезвычайно интересным и поучительным для автора. Вспоминая прошлое, могу выделить некоторые характерные черты того образа АБ, который сохранился в моей памяти. Это, во-первых, его стремление всегда понять результат сложных вычислений "на пальцах", т.е. из простых физических соображений или на подходящей для этого модели. Во-вторых, любовь АБ к квазиклассике, которую он знал досконально и умел применять к сложным физическим задачам (в этой связи достаточно указать, например, на его замечательную книгу [41]). Третье – это демократичность АБ: он одинаково обсуждал научные проблемы и со студентом, и с академиком, а его несогласие с иной точкой зрения, выражавшееся порой в достаточно резкой форме, не переходило в плоскость личных отношений (знаю это по себе). Наконец, его научная смелость – так, например, АБ не побоялся пойти на нарушение принципа Паули для электронов, опустившихся в нижний континуум [30], и довольно долго и упорно отстаивал свою точку зрения, несмотря на критику многих советских теоретиков[3]. Вот, пожалуй, те особенности научного стиля АБ, которые произвели на меня наиболее сильное впечатление. Нисколько не удивлюсь, если у других современников АБ этот список будет совсем иной – ведь он был столь яркой и многогранной личностью, что можно сравнить его (в моем представлении) с творцами эпохи Возрождения, такими, как Джироламо Кардано или Бенвенуто Челлини ...

Мне хотелось бы еще вспомнить обсуждение вопроса о позитронных уровнях, которые могли бы с ростом Z возникать из нижнего континуума. Дело было в 1970 г., и в этом обсуждении участвовали АБ, ЯБ (Яков Борисович Зельдович) и автор этих строк. В то время АБ твердо верил в существование таких состояний, а мы с Яковом Борисовичем весьма сомневались в этом и возражали ему. Наши возражения раздражали АБ, обсуждение стало темпераментным и пошло "в разнос". Наконец, Яков Борисович сказал: "Кадя! Ты забыл про принцип Паули" – на что последовала мгновенная и бурная реакция АБ, и все закончилось словами Якова Борисовича: "Давай, Кадя, сегодня кончим на этом – но не думай, пожалуйста, что я не мог бы ответить тебе достойно и в том же стиле.

[3]Конечно, в данном случае АБ ошибался, но этот пример хорошо иллюстрирует характерную для него черту – отсутствие преклонения перед, казалось бы, незыблемыми авторитетами.

Просто присутствие Владимира Степановича меня несколько стесняет". Вся эта сцена и сейчас стоит у меня перед глазами, но входить в дальнейшие подробности не берусь – для этого нужно другое перо, другие литературные способности. Данный эпизод нашел известное отражение в нашей с Я.Б.Зельдовичем статье [7].

С Мишей Мариновым меня связывала дружба и годы совместной работы, результаты которой (в части, относящейся к теории спонтанного рождения позитронов) использованы в данной статье, особенно в разделе 3. Миша был широко образованным физиком с глубоким знанием современной математики и ярко выраженным педагогическим талантом. Мне, например, надолго запомнились блестящие по форме и превосходные по содержанию лекции об исключительных группах Ли, октанионах Кэйли и числах Грассмана, которые Миша прочитал для сотрудников ИТЭФ вскоре после того, как эти (в то время – почти неизвестные физикам, даже теоретикам) математические конструкции стали употребляться в теории элементарных частиц.

2. Критический заряд ядра

Дискретный спектр уровней энергии электрона, движущегося в кулоновском поле ядра, расположен в интервале $-1 \leq \varepsilon < 1$. Задача допускает аналитическое решение в случае точечного заряда, при этом энергии уровней определяются известной формулой тонкой структуры Зоммерфельда [42]. Например, энергия основного терма $1s_{1/2}$ в кулоновском поле $V(r) = -\zeta/r$ равна

$$\varepsilon_0(\zeta) = \sqrt{1-\zeta^2}, \qquad 0 < \zeta = Z\alpha < 1 \ . \tag{1}$$

Кривая $1s$ – уровня обрывается при $Z = \alpha^{-1} = 137$ и $\varepsilon_0 = 0$, не дойдя до границы нижнего континуума. Аналогично, для (вырожденных по энергии) состояний $ns_{1/2}$ и $np_{1/2}$ при $\zeta \to 1$

$$\varepsilon_n(\zeta) = \frac{n-1}{N_0} + \frac{1}{N_0^3}\sqrt{1-\zeta^2} + O(1-\zeta^2), \qquad N_0 = \sqrt{n^2-2n+2}, \tag{1a}$$

где $n = 1, 2, 3, \ldots$ – главное квантовое число. Формальное аналитическое продолжение $\varepsilon_n(\zeta)$ на область $Z > 137$ приводит к мнимым значениям энергии и к комплексным волновым функциям, что с физической точки зрения представляется неудовлетворительным[4]. Причину появле-

[4]Тем не менее, такая возможность также рассматривалась в литературе [43,44]. При этом комплексность возникает из-за того, что накладывается граничное условие поглощения при $r \to 0$.

ния этой трудности легко проследить с помощью метода эффективного потенциала [4,7,18].

Для простоты ограничимся сначала сферически-симметричным случаем, $V = V(r)$.После разделения переменных уравнение Дирака в центральном поле сводится к системе дифференциальных уравнений для радиальных волновых функций $g(r)$ и $f(r)$. Подстановка

$$\varphi = W^{-1/2} g, \qquad W = 1 + \varepsilon - V(r), \tag{2}$$

где g отвечает верхней компоненте дираковского биспинора [45], преобразует эти уравнения к виду, аналогичному уравнению Шредингера, но только с эффективной энергией E и эффективным потенциалом U:

$$E = (\varepsilon^2 - 1)/2, \quad U(r) = \varepsilon V - \frac{1}{2}V^2 + \frac{\kappa(\kappa+1)}{2r^2} + \frac{V''}{4W} + \frac{3}{8}\left(\frac{V'}{W}\right)^2 - \frac{\kappa V'}{2rW} \cdot \tag{3}$$

Здесь квантовое число $\kappa = \mp(j + 1/2)$ для состояний с $j = l \pm 1/2$, j – полный момент количества движения электрона, l – орбитальный момент (для верхней компоненты g). Отметим, что эффективный потенциал U зависит от момента j и энергии уровня ε и имеет существенно разный вид при ε, близких к $+1$ и -1. В случае кулоновского поля точечного ядра

$$U(r) = \begin{cases} \frac{j(j+1)-\zeta^2}{2r^2} + \ldots, & r \to 0 \\ -\frac{\varepsilon\zeta}{r} + \frac{\kappa^2-\zeta^2+a}{2r^2} + \ldots, & r \to \infty \end{cases} \tag{4}$$

($a = \kappa$ при $\varepsilon > -1$, $a = -1/4$ при $\varepsilon = -1$).

Для достаточно больших значений заряда Z в эффективном потенциале на малых расстояниях возникает сингулярное притяжение $\propto r^{-2}$, которое приводит к известному из квантовой механики "падению на центр" [46-49]. Чтобы показать это, рассмотрим пробную функцию, отличную от нуля только в области $0 < r < r_0$. По соотношению неопределенностей Гейзенберга $\langle p^2 \rangle \cdot r_0^2 \geq 1/4$, откуда следует оценка

$$\langle H \rangle = \frac{1}{2}\langle p^2 \rangle + \langle U \rangle \leq \frac{(j+1/2)^2 - \zeta^2}{2r_0^2} + O\left(\frac{1}{r_0}\right), \quad \text{при} \quad r_0 \ll \hbar/mc = 1\,.$$

При $\zeta > j + 1/2$ спектр эффективного гамильтониана H не ограничен снизу, т.к. $\langle H \rangle \to -\infty$ при $r_0 \to 0$. Такая ситуация в классической

механике отвечает падению частицы на центр сил, а в случае уравнения Дирака – появлению комплексных "собственных значений" ε_n, что (как видно из выражений (1) и (1a)) как раз и происходит при формальном продолжении энергетического спектра уровней для электрона в поле точечного заряда на область $\zeta > 1$.

Из сказанного ясно, что появление сингулярности в формулах для $\varepsilon_n(\zeta)$ при $\zeta = 1$ связано с идеализацией точечного заряда. Такое приближение, имеющее хорошую точность в области легких ядер, при $\zeta > 1$ становится непригодным для состояний с $j = 1/2$, а для состояний с моментом j – при $\zeta > j + 1/2$. Уравнение Дирака при столь больших Z нужно решать с потенциалом, обрезанным на малых расстояниях, т.е. с учетом конечных размеров ядра:

$$V(r) = \begin{cases} -\zeta/r, & r > r_N \\ -\frac{\zeta}{r_N} f(\frac{r}{r_N}), & 0 < r < r_N \end{cases} \tag{5}$$

(вид обрезающей функции $f(r/r_N)$ определяется распределением электрического заряда по объему ядра).

Первыми заметили это Померанчук и Смородинский [40]. Введя в рассмотрение конечные размеры ядра, они показали, что решение уравнения Дирака существует во всей области от $Z = 0$, $\varepsilon = 1$ до $Z = Z_{cr}$, $\varepsilon = -1$, и приближенно оценили величину критического заряда ядра Z_{cr} (однако их оценка оказалась завышенной). Более точные значения Z_{cr} получили Вернер и Уилер [50], Воронков и Колесников [51]. При этом, однако, не было достигнуто полной ясности в понимании того, что же происходит при $Z > Z_{cr}$. В течение четверти века эта проблема не привлекала к себе особого внимания.

Сдвиг произошел в 1969-70 г.г., когда вопрос о критическом заряде ядра и о физических явлениях при $Z > Z_{cr}$ стал детально исследоваться. Прежде всего было вычислено точное значение Z_{cr} для сферического ядра. Эти значения были получены независимо двумя разными методами. Пипер и Грейнер [2] определяли энергию уровней путем численного решения уравнения Дирака и находили Z_{cr} как точку пересечения кривой уровня $\varepsilon_0(\zeta)$ с границей нижнего континуума (при этом заряд ядра считался равномерно распределенным по объему шара с радиусом $r_N = r_0 A^{1/3}$, где $r_0 = 1.2$ Фм, а зависимость атомного номера A от заряда ядра Z аппроксимировалась формулой: $A = 63.6 + 1.30\ Z + 0.00733 Z^2$, полученной из специального рассмотрения для области сверхтяжелых ядер,

$100 < Z < 250$).

В работе [3] было замечено, что решения уравнения Дирака сильно упрощаются при $\varepsilon = -1$, в силу чего можно получить уравнение непосредственно для Z_{cr}:

$$zK'_{i\nu}(z)/K_{i\nu}(z) = 2\xi, \tag{6}$$

где $z = \sqrt{8\zeta_{cr} r_N}$, $\nu = 2\sqrt{\zeta_{cr}^2 - \kappa^2}$, $\zeta_{cr} = Z_{cr}\alpha$, $K_{i\nu}(z)$ – функция Макдональда с мнимым индексом и $\xi = \xi(\zeta, \kappa)$ – логарифмическая производная внутренней волновой функции на краю ядра [5]. При численном решении уравнения (6) было принято $r_N = r_0 A^{1/3}$, $r_0 = 1.1$ф, $A = 2.6Z$ (как для обычных тяжелых ядер) и рассмотрены 2 модели обрезания:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I.} & f(x) \equiv 1 \\ \text{II.} & f(x) = (3 - x^2)/2 \end{array}\right\} \quad \text{при} \quad 0 < x = r/r_N < 1,$$

из которых вторая модель отвечает постоянной объемной плотности электрического заряда в ядре. Результаты расчета для модели II таковы (для нескольких нижних уровней):

$$Z_{cr} = 169(1s_{1/2}), \quad 185(2p_{1/2}), \quad 230(2s_{1/2}), \ldots. \tag{7}$$

(см. также рис.1) и согласуются со значениями Z_{cr} из работы [2].

Насколько чувствительна величина Z_{cr} к детальному виду распределения ядерной плотности в сверхтяжелых ядрах? На этот вопрос можно ответить, сравнивая значения Z_{cr} для моделей обрезания I и II: модель I соответствует концентрации всего заряда на поверхности ядра, в то время как модель II отвечает равномерной объемной плотности электрического заряда и является достаточно реалистической. При переходе от модели I к II значение электростатического потенциала в центре ядра увеличивается в 1,5 раза и составляет $V(0) = 1,5\zeta/r_N \simeq 70$ mc^2 =35 Мэв. Соответствующие значения $\zeta_{cr} = 1,271$ (I) и 1,243 (II) при $r_N = 10$ Фм; разность Z_{cr} для моделей I и II составляет всего 3,8 единицы. Отсюда уже ясно, что более мелкие изменения (учет диффузности края ядра, его несферичности, изменение соотношения между A и Z в сверхтяжелых ядрах, и т.п.) приводят к весьма малым изменениям Z_{cr} на величину $\lesssim 1$ (оценка этих эффектов проводилась в работах [13,18,25]).Итак, в качестве

[5]Значение ξ относится к верхней компоненте радиальной волновой функции $G = rg(r)$, см.(A.2) в Приложении A. Относительно функции $K_{i\nu}$ см. подробнее в Приложении B.

критического заряда Z_{cr} для голого ядра (не окруженного электронной оболочкой) можно принять значения (7).

До сих пор ядро считалось голым, т.е. полностью лишенным своей электронной оболочки. Если оно окружено оболочкой, то электроны оболочки часть времени проводят вблизи ядра, экранируя его заряд. Это приводит к эффективному уменьшению Z и соответственно увеличивает значение Z_{cr}. Оценка этого эффекта особенно важна в связи с постановкой опытов по спонтанному рождению позитронов в столкновениях тяжелых ядер. В самом деле, суммарный заряд ядер $Z_1 + Z_2$ лишь на 15-20 единиц может превысить критический заряд $Z_{cr} \approx 170$, вычисленный без учета экранировки. Поэтому возрастание Z_{cr} даже на 10 единиц чрезвычайно затруднило бы постановку опыта с известными в настоящее время тяжелыми ядрами.

Ввиду сложности расчета Z_{cr} в задаче двух центров, была расмотрена модельная задача о сферическом ядре. Плотность электронного облака бралась по уравнению Томаса-Ферми [52]. Хотя при $Z = Z_{cr}$ скорость электронов K-оболочки $v \sim c$, однако основная часть электронов находится на расстояниях $r \sim 137Z^{-1/3} \gg 1$ от ядра, что оправдывает использование нерелятивистской модели Томаса-Ферми. Для увеличения критического заряда при учете экранирования в случае нейтрального атома получено: в работе [11] $\Delta Z_{cr} = 1.5$, а в [19] $\Delta Z_{cr} = 1.2$ (рис.2). Небольшое различие между этими числами связано, повидимому, с тем, что были приняты разные формы распределения электрического заряда внутри ядра. В [11] проведен также более точный учет экранировки на основе релятивистского уравнения Хартри-Фока-Слэтера (см. [12]) и получено значение $Z_{cr} = 173$. Суммируя различные поправки, получаем, что при переходе от модели обрезания II к ядру с диффузным краем, окруженным электронной оболочкой с $N = Z$, приведенные в (7) значения Z_{cr} возрастают примерно на 3 ± 1 единицы (см.табл. 1).

Можно исследовать также зависимость Z_{cr} от степени ионизации электронной оболочки $q = (Z - N)/Z$, где N – полное число электронов в оболочке (для нейтрального атома $q = 0$, для голого ядра $q = 1$).С учетом эффекта экранировки самосогласованный потенциал для электрона равен $V_q(r) = -(\frac{Z}{r_N} f(r/r_N) + \frac{Z-N}{r_0})e^2$ при $0 < r < r_N$, $V_q(r) = -(\frac{Z}{r}\varphi(x) + \frac{Z-N}{r_0})e^2$ в области $r_N < r < r_0$ и $V_q(r) = -(Z - N)e^2/r$ при $r > r_0$; здесь $\varphi(x)$ – решение уравнения Томаса-Ферми для иона, $x = (128Z/9\pi^2)^{1/3} r/a_B = 0.0425\zeta^{1/3} r$ и r_0 – радиус положительного иона в модели Томаса-Ферми [52], причем $r_0 \to \infty$ при $q = 0$ ($r_0 \gg r_N$).

Изменение Z_{cr} можно найти по теории возмущений [18]:

$$\delta\zeta_{cr} = \beta^{-1}\langle\delta V\rangle, \quad \langle\delta V\rangle = \int \delta V(r)\rho_{cr}(r)r^2 dr, \tag{8}$$

где $\rho_{cr} = \psi^+\psi$ – плотность электронного облака в критической точке, а β – наклон уровня (см.ниже (12)). Подставляя сюда $\delta V = V_q(r) - V_0(r)$ и учитывая, что основной вклад в интеграл вносит область $r \sim r_K \ll r_a$ (r_K – радиус K – оболочки, r_a – средний радиус атома), получаем [53]

$$\Delta Z_{cr}(q) = \Delta Z_{cr}(0) \cdot F(q)\,. \tag{9}$$

Поправка $\Delta Z_{cr}(0)$ для нейтрального атома находилась численным решением уравнения Дирака с энергией $\varepsilon = -1$ и потенциалом $V_0(r) = -\zeta r^{-1}\varphi_0(x)$, $q = 0$. Результаты расчета приведены в табл.1, график функции $F(q)$ – на рис.3. Как видно из рисунка, при $q \lesssim 0.5$ эта функция меняется мало: так, $F(0.5) = 0.907$ (значения $q \approx 0.5$ отвечают квазимолекуле (Z_1, Z_2, e), возникающей при столкновении голого ядра с нейтральным атомом, поскольку обычно $Z_1 \approx Z_2$). Таким образом, поправка на экранировку в ионе со степенью ионизации $q \sim 0.5$ почти та же, что и в нейтральном атоме. Это легко понять: с ростом степени ионизации q электронная оболочка поджимается к ядру, что частично компенсирует уменьшение экранирующего заряда оболочки, равного $(1-q)Z$. С другой стороны, при переходе к голому ядру ($q \to 1$) происходит быстрое уменьшение поправки ΔZ_{cr}, поскольку $F(q) \propto (1-q)^{1/3} \to 0$.

В расчетах [53] учитывалась также экранировка заряда ядра вакумной оболочкой сверхкритического атома (которую "натягивает" на себя ядро с $Z > Z_{cr}$ после испускания позитронов [26,54]), а также диффузность края ядра. Окончательные результаты приведены в таблице 1.

Интересно посмотреть, каким образом учет конечных размеров ядра устраняет особенность энергии $\varepsilon_0(\zeta)$ при $\zeta = Z\alpha = 1$. Допустим, что радиус обрезания r_N сколь угодно мал по сравнению с комптовской длиной волны электрона. В (несколько академическом) пределе $\Lambda = ln(1/r_N) \gg 1$ для энергии $1s$ – уровня можно получить весьма наглядную формулу [5,7]

$$\varepsilon_0(\zeta) = \gamma\ cth\ \Lambda\gamma, \qquad \gamma = \sqrt{1-\zeta^2}. \tag{10}$$

В области $Z < 137$ функция $cth\ \Lambda\gamma = 1 + exp(-2\Lambda\gamma) + ...$ экспоненциально быстро стремится к единице, и при $1 - \zeta \gg \Lambda^{-2}$ энергия $\varepsilon_0(\zeta)$ совпадает с выражением (1) для точечного заряда (и практически не зависит от

способа обрезания кулоновского потенциала внутри ядра). С другой стороны, при $r_N > 0$ точка $\zeta = 1$ уже не является особой точкой для функции $\varepsilon_0(\zeta)$, и формула (10) продолжается в область $Z > 137$:

$$\varepsilon_0 = \tilde{\gamma}\ ctg\ \Lambda\tilde{\gamma}, \quad \tilde{\gamma} = \sqrt{\zeta^2 - 1} \tag{10a}$$

Выражения (10) и (10а) образуют единую аналитическую функцию, которая в окрестности точки $\zeta = 1$ разлагается в сходящийся ряд по целым степеням $1 - \zeta$:

$$\varepsilon_0(\zeta) = \frac{1}{\Lambda}\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n}\frac{B_{2n}}{(2n)!}\Lambda^{2n}(1-\zeta^2)^n\right\}, \tag{10б}$$

где B_{2n} - числа Бернулли ($B_2 = 1/6$, $B_4 \equiv -1/30$, ..., $B_{2n}/(2n)! \approx 2(-1)^{n-1} \cdot (2\pi)^{-2n}$ при $n \to \infty$). Выражение (10а) имеет полюс [6] при $\tilde{\gamma} = \pi/\Lambda$, откуда следует асимптотическая формула

$$\zeta_{cr} = 1 + \frac{\pi^2}{2\Lambda^2} + O(\Lambda^{-3}), \qquad \Lambda \gg 1 \tag{11}$$

Из нее видно, что ζ_{cr}, как функция радиуса обрезания r_N, имеет особенность при $r_N \to 0$. Поэтому конечные размеры ядра нельзя учесть по теории возмущений, если $Z > 137$. В этом наглядно проявляется "падение на центр" для уравнения Дирака с точечным кулоновским потенциалом.

В пределе нулевого радиуса ($r_N = 0$) кривая $1s$-уровня доходит до $\varepsilon = 0$ при $\zeta = 1$, и далее круто обрывается (производная $d\varepsilon_0/d\zeta = -\infty$). Это показывает, что приближение нулевого радиуса в данной задаче неприменимо. С другой стороны, если $r_N > 0$, то $\varepsilon_0(\zeta)$ спокойно пересекает линию $\varepsilon = 0$, не имея здесь никаких особенностей, и при $\zeta = \zeta_{cr}$ входит в нижний континуум с конечным наклоном β:

$$\beta = -\frac{d\varepsilon}{d\zeta}\ |_{\zeta=\zeta_{cr}} = \int v(\mathbf{r})\rho_{cr}d^3r, \qquad \rho_{cr} = \psi_0^2(r)\ |_{\zeta=\zeta_{cr}}, \tag{12}$$

(см.рис.4), причем здесь мы записали потенциал в виде $V(\mathbf{r}) = -\zeta v(\mathbf{r})$, предполагая, что функция v, определяющая форму потенциала, уже не зависит от ζ (что для (5) выполняется с хорошей точностью, поскольку зависимость $r_N \propto \zeta^{1/3}$ довольно слабая). Параметр β определяет пороговое поведение вероятности спонтанного рождения позитронов [4,7].

[6] На самом деле, разумеется, этот полюс - фиктивный и устраняется при более точном решении задачи, которое показывает, что вблизи критической точки имеется сравнительно узкая область $\zeta_{cr} - \zeta \sim \Lambda^{-3} \ll \zeta_{cr} - 1$, в которой формула (10а) уже неприменима. Соответствующее выражение для энергии уровня можно найти в работе [5].

Были исследованы также свойства атомных состояний при $Z > 137$. Приведем формулу для среднего радиуса основного состояния и его дисперсии. При $Z < 137$ для точечного ядра имеем (см. формулы (B.2) и (B.9) в Приложении B):

$$\langle r\rangle = (1+2\sqrt{1-\zeta^2})/2\zeta, \qquad \Delta r = \frac{\langle r\rangle}{(1+2\sqrt{1-\zeta^2})^{1/2}}, \tag{13}$$

а для состояний с $\kappa = -1$ (т.е. $ns_{1/2}$) на краю нижнего континуума [3]

$$\langle r\rangle = \frac{(4\zeta_{cr}^2-3)(1+0.3\zeta_{cr}^2)}{2\zeta_{cr}(2\zeta_{cr}^2+3)}, \qquad \varepsilon = -1 \tag{14}$$

(см.табл.1). Для произвольной энергии уровня, $0 > \varepsilon > -1$, выражение для $\langle r\rangle$ сильно усложняется [3]. Численный расчет показывает, что средний радиус основного состояния монотонно уменьшается с ростом ζ, см.рис.5 в [3] (причем это уменьшение особенно заметно при возрастании заряда от $Z = 137$ до Z_{cr} – сравните соответствующие числа для $\langle r\rangle$ из табл.1), а относительная дисперсия $\Delta r/\langle r\rangle$ – наоборот, возрастает. Приведем также формулу для магнитного момента электрона в связанном s-состоянии [6]

$$\mu_{cr} \equiv \mu(\zeta = \zeta_{cr}) = 2(4\zeta_{cr}^2-3)/3(2\zeta_{cr}^2+3), \qquad \kappa = -1 \tag{15}$$

В частности, $\mu_{cr} \to 2/15 = 0.133$ при $\zeta_{cr} \to 1$, а для $\zeta_{cr} = 1.245$ (основной уровень $1s$) $\mu_{cr} = 0.35 \approx 1/3$ магнетона Бора.

Уравнения (13)-(15) можно обобщить и на другие состояния дискретного спектра – см.Приложение C, в частности, формулу (C.13). В табл. 1 приведены также значения параметра $\rho = w_2/w_1$, характеризующего относительный вес нижней и верхней компоненты дираковского биспинора (см.(C.3)). Поскольку значения $\rho \sim 1$, то связанное состояние электрона на краю нижнего континуума является полностью релятивистским (конечно, этого и следовало ожидать).

Уравнения (6),(14) и (15) имеют столь простой вид благодаря тому, что в случае кулоновского поля $V(r) = -\zeta/r$ решения уравнения Дирака с энергией $\varepsilon = -1$, убывающие на бесконечности, выражаются в явном виде через функцию Макдональда:

$$G(r) \equiv rg(r) = K_{i\nu}(z), \quad F(r) \equiv rf(r) = \zeta^{-1}(rG' + \kappa G) = \\ = \zeta^{-1}\left[\kappa K_{i\nu}(z) + \frac{1}{2}zK'_{i\nu}(z)\right] \tag{16}$$

(с точностью до нормировки). Здесь $z = 2^{3/2}(\zeta r)^{1/2}$, $\nu = 2(\zeta^2 - \kappa^2)^{1/2}$, $\zeta > |\kappa|$, радиальные волновые функции $g(r)$ и $f(r)$ соответствуют определению в [45], а условие нормировки имеет вид $\int\limits_0^\infty (G^2 + F^2)dr = 1$ (в пределе $r_N \to 0$ нормировочный множитель можно вычислить в явном виде [4,21]). Из (16) вытекает, что при $r \to \infty$

$$G(r) \approx c_1\, r^{-1/4} exp(-\sqrt{8\zeta_{cr} r}), \quad F(r) \approx c_2 r^{1/4} exp(-\sqrt{8\zeta_{cr} r}), \qquad (17)$$

причем $c_1/c_2 = -\sqrt{\zeta_{cr}/2}$. Таким образом, электронный уровень, опустившийся до границы нижнего континуума, остается локализованным (сравните, однако, с [1]). При этом на больших расстояниях от ядра $F/G \propto \sqrt{\zeta_{cr} r} \gg 1$, а плотность электронного облака затухает экспоненциально:

$$\rho_{cr}(r) = (G^2(r) + F^2(r))/4\pi r^2 \approx const \cdot r^{-3/2} exp(-c_3\sqrt{\zeta_{cr} r}), \quad r \to \infty, \qquad (17a)$$

с численно большим коэффициентом $c_3 = 2^{5/2} = 5.657$.

Существенное упрощение формул (14)-(16) по сравнению с общим случаем $\varepsilon \neq -1$ связано, возможно, с какой-то дополнительной симметрией уравнения Дирака для кулоновского поля. В этой связи отметим, что группа "скрытой" симметрии атома водорода (открытая в нерелятивистском случае Фоком [55] и Баргманом [56], см. также работы [57-62]) была рассмотрена для релятивистской кулоновской задачи в [63-65]. При этом, однако, случай состояний с энергией $\varepsilon = -1$, лежащих на краю нижнего континуума, специально не изучался.

3. Критическое расстояние для сталкивающихся ядер

Ядер с зарядом $Z \sim Z_{cr} > 170$ в природе нет, и перспективы их синтеза в настоящее время совершенно неясны [7]. Однако, как заметили Герштейн и Зельдович [1], сверхкритические электрические поля образуются (на короткое время) при сближении двух обычных тяжелых ионов (например, двух голых ядер урана с суммарным зарядом $Z_u = Z_1 + Z_2 = 184 > Z_{cr}$) на расстояние $R < R_{cr}$. Такой эксперимент вполне реален, и ему отвечает задача двух центров для уравнения Дирака. Поскольку ядра движутся с нерелятивистской скоростью ($v_N/c \approx 1/20$), а K-электрон при $Z\alpha \gtrsim 1$ – сугубо релятивистский, то вычисление энергии электронных термов можно проводить в адиабатическом приближении. Заряд каждого

[7] См. в этой связи замечание в конце раздела 8.

из сталкивающихся ядер меньше 137, вследствие чего учет конечных размеров ядра можно выполнить по теории возмущений [18,23]. Основную трудность представляет решение уравнения Дирака для двух точечных зарядов, покоящихся на расстоянии R друг от друга:

$$V(\mathbf{r}) = -\left(\frac{Z_1\alpha}{r_1} + \frac{Z_2\alpha}{r_2}\right), \qquad r_{1,2} = \mid \mathbf{r} \pm \mathbf{R}/2 \mid, \tag{18}$$

где $r_{1,2}$ – расстояние между электроном и одним из ядер. Эта задача значительно сложнее, чем описанное выше решение уравнения Дирака для сферического ядра.

Уравнение Шредингера с потенциалом (18) хорошо изучено (см., например, [66]) и имеет многочисленные применения в теории молекул, физике μ-катализа и др. В этом случае переменные в нерелятивистском уравнении Шредингера разделяются в эллиптических[8] координатах ξ, η, φ:

$$\xi = \frac{r_1 + r_2}{R}, \quad \eta = \frac{r_1 - r_2}{R}, \quad \xi \geq 1, \quad -1 \leq \eta \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

и оно сводится к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям. При переходе к релятивистской задаче двух кулоновских центров мы сталкиваемся с дополнительными трудностями:

1) переменные не разделяются ни в одной из известных ортогональных систем коодинат;

2) вблизи каждого из ядер у волновой функции возникает сингулярность $\propto 1/r^2$, связанная с членом $-\frac{1}{2}V^2$ в эффективном потенциале;

3) имеется значительное спин-орбитальное взаимодействие, в силу чего верхняя и нижняя компоненты волновой функции при $Z\alpha \sim 1$ – одного порядка.

Квадрирование уравнения Дирака с $\varepsilon = -1$ приводит к системе уравнений:

$$\Delta\psi_1 + U_{11}\psi_1 + U_{12}\psi_2 = 0, \qquad \Delta\psi_2 + U_{21}\psi_1 + U_{22}\psi_2 = 0, \tag{19}$$

где $U_{ij}(\mathbf{r})$ зависят от r_1 и r_2, а также от параметров R и ζ, см.[22]. После отделения азимутального угла φ получается система уравнений в частных производных второго порядка на плоскости. Непосредственное применение к ней стандартных разностных методов решения краевых

[8]См.[48]. В математической литературе [47,66] они чаще называются вытянутыми сфероидальными координатами.

задач для уравнений эллиптического типа затруднительно из-за наличия сингулярностей. Величина R_{cr} вычислялась двумя способами: методом Ритца [14,26,27] и методом Канторовича[9], см.[22,23]. Оба метода используют вариационный принцип. В методе Ритца ψ-функция представляется в виде конечной суммы: $\psi = \sum_n c_n \varphi_n$, где $\{\varphi_n\}$ – фиксированная система базисных функций, а c_n – варьируемые константы. В методе Канторовича $\psi = \sum_n d_n(y)\varphi_n(x)$, где d_n –фиксированные функции переменной y, а φ_n – варьируемые функции от x. Подстановка ψ – функции в квадратичный функционал, определяющий энергию, приводит к билинейной форме по коэффициентам c_n (в методе Ритца) или к функционалу, билинейному по φ_n – в методе Канторовича.

Условие минимума энергии дает систему линейных алгебраических уравнений (в первом методе) или систему обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $\varphi_n(x)$ во втором случае. Для получения хорошей точности вариационных расчетов важен правильный выбор переменных x и y и функций $d_n(y)$, а в методе Ритца-удачный выбор системы базисных функций φ_n.

В работах [22,23] применяется следующий подход. Пусть $\rho = \sqrt{x^2+y^2}, z, \varphi$ – цилиндрические координаты. Если заряды ядер одинаковы, $Z_1 = Z_2 = Z_u/2$, то волновая функция основного терма симметрична относительно инверсии в плоскости $z = 0$. Кроме того, для основного терма проекция полного момента квазимолекулы $J_z = \Lambda + s_z = 1/2$, а проекция орбитального момента Λ равна 0 для ψ_1 и 1 для ψ_2. Выделяя кинематические множители, компоненты спинора ψ можно представить в виде

$$\psi_1(\mathbf{r}) = \chi_1(\rho, z); \quad \psi_2(\mathbf{r}) = \frac{\rho z}{R^2} e^{i\varphi} \chi_2(\rho, z), \tag{20}$$

где χ_1 и χ_2 –вещественные функции, четные по z. Вместо ρ и z введем теперь новые переменные $x = x(\rho, z)$, $y = y(\rho, z)$ таким образом, чтобы сингулярности уравнений (19) были расположены в точках $x = 0$ и ∞ и не зависели от y. Для этого достаточно, чтобы $x \to 0$, когда $r_1 \to 0$ или $r_2 \to 0$, и $x \to \infty$ при $r_{1,2} \to \infty$. Выбор переменной y не очень существенен: необходимо лишь, чтобы функции x и y были независимы. Использовались следующие переменные:

[9]Идея сведéния уравнения в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений принадлежит Л.В.Канторовичу. В монографии [67] рассмотрены решения уравнения Пуассона и бигармонического уравнения в различных областях на плоскости и показано, что этот метод, как правило, быстрее сходится и точнее вариационного метода Ритца.

$$x = \xi^2 - \eta^2 = \frac{r_1 r_2}{4R^2}, \quad y = \frac{\eta^2}{\xi^2 - \eta^2} = \frac{(r_1 - r_2)^2}{4r_1 r_2}, \tag{21}$$

область изменения которых на плоскости (x, y) – это криволинейный треугольник $(x^{-1} - 1)\theta(1 - x) < y < x^{-1}$, причем $V(\mathbf{r}) = -2\zeta R^{-1}\sqrt{(1+y)/x}$, $\zeta = Z_u\alpha$. Пробные функции представлялись в виде

$$\chi_1 = \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(x)\ y^{k-1}, \qquad \chi_2 = \sum_{k=1}^{n} \varphi_{m+k}(x)\ y^{k-1}\ . \tag{22}$$

Минимизация функционала энергии приводит к системе $N = m+n$ уравнений

$$\frac{d}{dx}\left(P\frac{d\varphi}{dx} + R\varphi\right) - Q\varphi - R^T\frac{d\varphi}{dx} = 0, \qquad \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_N \end{pmatrix}, \tag{23}$$

где P, Q, R – матрицы $(N \times N)$, зависящие от x. Все коэффициенты P_{ij}, $Q_{ij}(x)$ и $R_{ij}(x)$ выражаются через элементарные функции; например, при $i = j = 1$

$$P_{11}(x) = x \cdot \begin{cases} \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} - ln\frac{1+\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{1-x}}, & 0 < x \le 1 \\ \sqrt{1+x} - ln[\ (1+\sqrt{1+x})/\sqrt{x}\ ], & x \ge 1 \end{cases}$$

Функции P_{ij}, Q_{ij} и R_{ij} непрерывны в точке $x = 1$ вместе с первыми производными[10]; их вычисление удобно проводить с помощью рекуррентных соотношений [22]. Граничные условия для функций $\varphi_i(x)$ при $x \to 0, \infty$ вытекают из требования сходимости нормы ψ-функции.

Краевая задача (23) имеет решение лишь при определенных $R = R_{cr}(Z)$. Функции $\varphi_k(x)$ имеют степенную особенность при $x \to 0$ и существенную особенность при $x \to \infty$, характер которых и разложения вблизи особых точек непосредственно следуют из (23). Вводя матрицу "логарифмических производных"

$$Y = \| Y_{ij}(x) \|, \qquad \varphi_i' = \sum_{j=1}^{N} Y_{ij}\ \varphi_j, \tag{24}$$

[10]Причина появления различных выражений для коэффициентов $P_{ij}(x)$ и т.д. при $x < 1$ и $x > 1$ состоит в том, что в точке $c = 1$ меняется топология поверхностей $x(\xi, \eta) = c$: при $c > 1$ они односвязны, а при $0 < c < 1$ – двухсвязны.

преобразуем систему (23) к матричному уравнению Риккати

$$Y' = A - BY - Y^2, \tag{25}$$

где

$$A = P^{-1}(Q - R'), \quad B = P^{-1}(R - R^T + P'), \tag{25a}$$

которое и решалось численно методом Рунге-Кутта на интервалах (x_0, x_1) и (x_∞, x_1), что определяет матрицы $Y_0(x_1)$ и $Y_\infty(x_1)$. Условие непрерывности $\varphi_i(x)$ и $\varphi_i'(x)$ при $x = x_1$ приводит к системе однородных уравнений: $\{Y_0(x_1) - Y_\infty(x_1)\}\varphi(x_1) = 0$, которая имеет ненулевое решение при условии

$$Det \parallel Y_0(x_1) - Y_\infty(x_1) \parallel = 0. \tag{26}$$

Отсюда и определяется R_{cr} при заданном заряде ζ. Естественно выбрать точку сшивания $x_1 = 1$; при численном счете уравнения (25) удобна подстановка $t = x^{-1/4}$, $0 < t \leq 1$. Выбор начальных точек интегрирования ($x_0 = t_0 = 0.07$, $x_\infty = t_0^{-4} \approx 4 \cdot 10^4$) обеспечивает вычисление $R_{cr}(\zeta)$ с ошибкой не более 0.15%.

Выбор пробных функций в виде (22) назовем (m, n)-приближением. С ростом m или n класс пробных функций расширяется и точность (m, n)-приближения улучшается, что видно из табл.2. Расчеты были проведены для $(m, n) = (1, 0), (2, 0), (2, 1)$ и (4,3). Результаты[11] для ядер с зарядом $Z = 90 \div 100$ приведены в табл.3. Чтобы оценить точность различных вычислительных методов, рассмотрим подробнее случай $Z = 92$ (ядра урана), см.табл. 2. Помимо (m, n) – приближений, здесь приводится еще несколько чисел: значения R_{cr}, полученные [14] методом Ритца и в монопольном приближении (см. также рис.5); значение R_{cr}, полученное [9] методом сшивания асимптотик – см. ниже формулу (32). Из таблицы 2 видно, что с ростом порядка приближения (m, n) соответствующие значения R_{cr} монотонно возрастают (из вариационного принципа следует [8,18], что точное R_{cr} может лишь превышать результат любого (m, n) приближения).

[11]К сожалению, в [22] была допущена алгебраическая ошибка при вычислении коэффициентов Q_{13} и Q_{23} в уравнениях (2,1)-приближения (эти члены вымирают на малых и больших расстояниях от ядер и не сказываются на главных членах соответствующих асимптотик $\psi(r)$, поэтому с трудом поддаются контролю). Эта ошибка привела к завышению значений R_{cr} в (2,1)-приближении на $\approx 20\%$ (см. в этой в связи [23,24]). Однако, она не затрагивает (1,0)и (2,0) приближений, для которых результаты работы [22] не меняются.

Рассмотрим теперь метод Ритца. В этих расчетах использовалась система базисных функций Хиллерааса

$$\psi^m_{nls}(\xi,\eta) = exp\Big(-\frac{\xi-1}{2a}\Big)L^m_n\Big(\frac{\xi-1}{a}\Big)P^m_l(\eta)\chi_s, \tag{27}$$

приводящая к быстрой сходимости в нерелятивистской задаче двух центров. Однако, эти функции конечны вблизи ядер ($\xi \to 1$, $\eta \to \pm 1$), в то время как точное решение релятивистской задачи двух центров имеет здесь кулоновскую сингулярность:

$$\psi(\mathbf{r}) \propto (\xi^2-\eta^2)^{-\sigma}, \quad \sigma = 1-\sqrt{1-(Z_u\alpha)^2/4}, \tag{28}$$

(в нерелятивистском пределе эта сингулярность исчезает). Наличие сингулярности ухудшает сходимость разложения по базису $\{\psi^m_{nls}\}$. В методе Канторовича эта трудность отсутствует, т.к. функции $\varphi_k(x)$ автоматически имеют нужную особенность при $x = \xi^2-\eta^2 \to 0$, что обеспечивается самими уравнениями (23) или (25). Этим, повидимому, объясняется тот факт, что значение R_{cr} для $Z = 92$, полученное в методе Ритца со 100 пробными функциями, близко к результату приближения (1,0) всего с одной функцией $\varphi_1(x)$.

Можно рассчитать также волновую функцию электрона в "критической точке" $\zeta = \zeta_{cr}$ и связанные с ней величины [23]. На рис.6 показана плотность $\rho_{cr}(\mathbf{r}) = \psi^+\psi$ для $1s\sigma$–состояния квазимолекулы $U+U$ при $R = R_{cr}$. Вблизи каждого ядра, а также на больших расстояниях от ядер она сферически симметрична:

$$\rho_{cr}(\mathbf{r}) \approx \begin{cases} A_0^2\, r_i^{2(\sigma-1)}, & r_i \to 0 \quad (i=1,2) \\ A_\infty^2\, r^{-3/2} exp(-\sqrt{32\,\zeta r}), & r \to \infty \end{cases} \tag{29}$$

где $\sigma = \sqrt{1-\zeta^2/4}$. Асимптотические коэффициенты A_0 и A_∞ были рассчитаны в [23]. В табл.3 мы приводим значение коэффициента A_∞, определяющего вероятность периферических процессов (например, вероятность ионизации атома в сильном электрическом поле).

Вблизи границы $\varepsilon = -1$ энергия уровня

$$\varepsilon(R) = -1 + \beta\frac{R-R_{cr}}{R_{cr}} + O((R-R_{cr})^2). \tag{30}$$

Параметр наклона β, определяющий пороговое поведение сечения спонтанного рождения позитронов [4], может быть вычислен по формуле

$$\beta = \frac{1}{2}\left(\frac{d\ ln\ R_{cr}}{d\zeta}\right)^{-1} \int \psi^{+}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)\psi d^3r, \quad \psi = \begin{pmatrix}\varphi \\ \chi\end{pmatrix} \tag{30a}$$

и приводится в табл.3. Для ядер в урановой области значения β практически линейно зависят от Z (рис.7). Параметр

$$\rho = \int \chi^{+}\chi d^3r / \int \varphi^{+}\varphi d^3r, \tag{31}$$

характеризующий величину релятивистских эффектов для связанного электрона, также приведен в табл. 3. Ход нижних электронных термов в релятивистской задаче центров показан на рис.8.

Наконец отметим, что в [9] дана приближенная аналитическая формула[12]

$$R_{cr}(\zeta) = \zeta^{-1} \cdot exp\left\{ \frac{1}{g}\left[arg\ \Gamma(1+2ig) - arc\ ctg\frac{g - g'/g}{1+g'} \right] \right\}, \tag{32}$$

полученная для задачи двух центров в уравнении Дирака методом сшивания асимптотик. Этот метод обычно хорошо работает для мелких уровней, в чем нетрудно убедиться, в частности, на примере задачи о двух δ-ямах на фиксированном расстоянии R друг от друга (простейшая модель двухцентровой задачи для уравнения Шредингера). Поэтому естественно применить его и к рассматриваемой проблеме, поскольку здесь эффективная энергия $E = (\varepsilon^2 - 1)2 = 0$.

В (32) мы обозначили

$$g = \sqrt{\zeta^2 - 1},\ g' = \sqrt{4 - \zeta^2},\ \zeta = (Z_1 + Z_2)/137$$

и $arg\ \Gamma(z)$ – та ветвь этой (многозначной) функции, для которой $g^{-1}arg\ \Gamma(1+2ig) = -2C + O(g^2)$ при $g \to 0$, $C = 0.5772$ – константа Эйлера. Эта простая формула качественно передает зависимость критического расстояния от ζ. При $g \to 0$ она согласуется с асимптотикой (11) и, как видно из табл.2 и 3, при $Z_u \lesssim 200$ имеет погрешность $\sim 10\%$ (однако с дальнейшим ростом Z_u ее точность ухудшается [13]). Удивительно, что (32) с процентной точностью совпадает со значениями R_{cr},

[12]При ее получении используется условие малой надкритичности: $\delta = (Z_1 + Z_2 - Z_{cr})/Z_{cr} \ll 1$ (малый параметр $\delta = 0.07$ при столкновении $U + U$, а для системы $U + Cf$ $\delta \approx 0.1$).

[13]При $\zeta \to 2$ кривая $R_{cr}(\zeta)$, определяемая уравнением (32), имеет особенность и обрывается в точке $R_{cr} = 0.931... \approx 270$ Фм (ср. с рис. 1 в [9]), что связано с приближением точечных ядер. При этом условие малой надкритичности уже нарушается: $\delta = 2\zeta_{cr}^{-1} - 1 \sim 1$.

вычисленными с учетом конечных размеров ядер (см.табл. 3), и потому она вполне может быть использована для быстрой оценки R_{cr}.

Для случая скалярных частиц аналогичное приближение получено в работе [8], где был также сформулирован вариационный принцип для вычисления R_{cr}. Там же дана аналогичная формула для Z_{cr} в случае одного сферического ядра:

$$r_N = \frac{1}{2\zeta_{cr}} exp\left\{\frac{1}{g}\left[\, arg\ \Gamma(1+2ig) - arc\ ctg\left(-\frac{\xi}{g}\right)\right]\right\}, \qquad (33)$$

где $g = \sqrt{\zeta_{cr}^2 - 1}$, а ξ – та же величина, что и в (6). Сравнение ее с численным расчетом показывает, что в области $r_N \sim 10$ Фм эта формула дает значения ζ_{cr} для сверхтяжелого ядра с процентной точностью.

Последняя строка табл.2 соответствует монопольному приближению, т.е. замене потенциала (18) его нулевой сферической гармоникой:

$$V(\mathbf{r}) \to V_0(r) = \frac{1}{4\pi}\int\ V(r\mathbf{n})\ d\Omega_{\mathbf{n}}$$

Для задачи двух центров ($r_N = 0$, $Z_1 = Z_2$) имеем: $V_0(r) = -2\zeta/R$ при $0 < r < R/2$, $V_0(r) = -\zeta/r$ при $r > R/2$. С учетом конечного радиуса ядер и $Z_1 \neq Z_2$ выражение для $V_0(r)$ становится довольно громоздким (см.(29) в работе [25]), однако ввиду сферической симметрии этого потенциала численное решение уравнения Дирака не представляет затруднений. Как видно из табл.2, для ядер из урановой области точность монопольного приближения $\sim 15\%$, что совсем не плохо (однако она все же несколько хуже, чем точность асимптотики (32)). Этим оправдывается использование монопольного приближения для различных расчетов [25], связанных с процессом столкновения двух тяжелых ядер. Полученные таким путем [25] значения критического расстояния приведены на рис.5 как для голых ядер, так и при наличии электронной оболочки, содержащей 30 и 100 электронов.

До сих пор мы рассматривали основной терм квазимолекулы $1s\sigma$. Для следующего терма $2p_{1/2}\sigma$ значение $R_{cr} \approx 18$ Фм (в монопольном приближении [25] при $Z_1 = Z_2 = 92$), что близко к сумме радиусов ядер урана. При этом уже заметна деформация одного ядра кулоновским полем другого, и вообще задача становится достаточно "грязной".

4. Метод эффективного потенциала

Для качественного анализа ситуации, возникающей при приближении дискретного уровня к нижнему континууму, полезен метод эффективного

потенциала [7,18]. Он состоит в замене уравнения Дирака более привычным уравнением Шредингера с эффективными энергией E и потенциалом U. В общем случае связь между U и исходным потенциалом V, входящим непосредственно в уравнение Дирака, достаточно сложна. Выражения упрощаются на краю нижнего континуума, поскольку здесь $E = 0$, т.е. мы имеем дело с состояниями с нулевой (эффективной) энергией. При этом (3) принимает вид

$$U(r) = -\frac{1}{2}V^2 - V + \frac{\kappa^2 + \kappa}{2r^2} + \frac{1}{4}v' - \frac{\kappa v}{2r} + \frac{1}{8}v^2, \tag{34}$$

где функция $v(r) = -V'/V$ зависит лишь от формы исходного потенциала $V(r)$. Рассмотрим несколько примеров.

Для степенных потенциалов притяжения,

$$V(r) = -g\, r^{-\nu} \quad \text{при} \quad 0 < r < \infty \quad (\nu > 0), \tag{35}$$

имеем: $v(r) = \nu/r$ и, с учетом поправки Лангера $1/8r^2$ (улучшающей точность квазиклассического приближения на малых расстояниях [41,68]),

$$U(r) = -\frac{g^2}{2r^{2\nu}} + \frac{g}{r^\nu} + \left(\kappa + \frac{1-\nu}{2}\right)^2 \frac{1}{2r^2} \tag{35a}$$

Так, в случае кулоновского поля

$$U(r) = \frac{\zeta}{r} - \frac{\zeta^2 - \kappa^2}{2r^2} \quad (\text{здесь } g = \zeta,\ \nu = 1). \tag{36}$$

Таким образом, при ε, близких к -1 , эффективный потенциал содержит широкий кулоновский барьер (см.рис.9), благодаря которому электронное состояние не делокализуется при $\varepsilon \to -1$, т.е. волновая функция быстро убывает на бесконечности. Например, в критической точке $Z = Z_{cr}$ выполняется (17). Это существенно отличает данную задачу от типичной нерелятивистской ситуации, когда $\psi(r) \sim e^{-\lambda r}$ и $\lambda = \sqrt{2m\varepsilon_b} \to 0$ при $\varepsilon_b \to 0$ (здесь ε_b – энергия связи, т.е. расстояние уровня от границы сплошного спектра).

Наличие кулоновского барьера в $U(r)$ сказывается на всех чертах эффекта спонтанного рождения позитронов. При $Z > Z_{cr}$ уровень $1s$ исчезает из дискретного спектра и уходит в нижний континуум [14]. Поскольку $\varepsilon < -1$, то эффективная энергия $E > 0$ и появляется возмож-

[14]Говоря точнее, полюс S-матрицы с ростом Z через левый разрез $-\infty < \varepsilon < -1$ уходит на второй лист, где он превращается в брейт-вигнеровский полюс, соответствующий квазистационарному состоянию [69].

ность распада уровня путем просачивания через потенциальный барьер (рис.9). Проницаемость барьера в эффективном потенциале определяет вероятность $\gamma(k)$ спонтанного рождения позитрона. На пороге $k \ll 1$, где $k = \sqrt{\varepsilon_0^2 - 1}$ – импульс вылетающего позитрона, имеем [3,7]

$$\gamma \propto exp\{-2\pi\zeta\ [\ \sqrt{1+k^2}/k - \sqrt{1-\zeta^{-2}}\ ]\} \approx exp\Big(-b\ \sqrt{\frac{Z_{cr}}{Z - Z_{cr}}}\Big) \qquad (37)$$

(с точностью до предэкспоненты), где $b = 2\pi\sqrt{\zeta_{cr}/2\beta}$ – численный множитель порядка единицы; так, $b = 1,73$ для модели I при $\zeta_{cr} = 1,25$.

Для произвольного $\nu < 2$ эффективный потенциал (35а) содержит барьер, проницаемость которого экпоненциально мала. Используя метод ВКБ[15], для потенциалов со степенным "хвостом" (35) получаем [70]

$$\psi_0(r) \propto [\ U(r)\ ]^{-1/4} exp\ \{-\int^r \sqrt{2U(r')}dr'\} \propto r^{\nu/4} exp\Big(-\frac{\sqrt{8g}}{2-\nu}\ r^{\frac{2-\nu}{2}}\Big), \quad r \to \infty, \qquad (38)$$

$$\gamma(k) \propto exp\ \{-\sqrt{\pi}\ \Gamma((2-\nu)/2\nu)(2g)^{1/\nu}/\Gamma(\nu^{-1})k^{\nu}\}, \qquad \kappa \to 0 \qquad (39)$$

В частности, в случае кулоновского потенциала $\nu = 1$, $g = \zeta$ и $\gamma(k) \propto\ exp(-2\pi\zeta/k)$.

Если же $\nu > 2$, то проницаемость определяется уже центробежным барьером, поэтому на пороге $\gamma(k) \propto k^L$, где L – один из орбитальных моментов l или l'. Для короткодействующих потенциалов с экспоненциальным "хвостом"

$$V(r) = -g\ r^{-\nu} exp(-\mu r) \quad \text{при} \quad r \to \infty, \qquad (40)$$

из (34) имеем ($\varepsilon = -1$)

$$U(r) = \frac{1}{8}\mu^2 + \frac{(\nu - 2\kappa)\mu}{4r} + O\Big(\frac{1}{r^2}\Big), \qquad r \to \infty, \qquad (41)$$

поэтому $\psi_0(r) \propto exp(-\mu r/2)$. Таким образом, и в этом случае состояние, опустившееся до границы нижнего континуума, остается локализованным.

[15]Условие применимости квазиклассики [41,48] здесь выполнено: $\frac{d}{dr}(1/p(r)) \propto \nu g^{-1/2} r^{-(2-\nu)/2} \ll 1$ при $r \to \infty$, если $\nu < 2$.

Использование эффективного потенциала оказалось весьма полезным также для физической интерпретации электронных состояний, опустившихся при $Z > Z_{cr}$ в нижний континуум [7].

Наконец, сделаем замечание о частицах с высшими спинами, $s > 1/2$. В работах [71,72] рассматривались решения уравнения Прока ($s = 1$) в кулоновском поле точечного заряда и было показано, что при любом $\zeta > 0$ возникает "падение на центр". Для потенциалов притяжения $V(r) = -gr^{-n}(n > 0)$ эффективный потенциал (34) для состояний с полным моментом j имеет вид

$$U(r) = -gn\sqrt{j(j+1)}/r^{n+2} + ..., \quad r \to 0, \tag{42}$$

поэтому "падение на центр" имеет место при сколь угодно слабой степенной особенности $V(r)$ в нуле [3]. Пограничным между регулярными и сингулярными потенциалами для уравнения Прока является

$$V(r) = -g\ ln\frac{1}{r} + ..., \quad r \to 0, \tag{43}$$

когда

$$U(r) = -g\sqrt{j(j+1)}/r^2 + ... \tag{44}$$

При значениях $g < g_{cr} = (j+1/2)^2/\sqrt{j(j+1)}$ этот потенциал регулярен и не требует обрезания при $r < r_0$, а затем с ростом константы связи $g > g_{cr}$ становится сингулярным (аналогично кулоновскому потенциалу для уравнений Дирака и Клейна-Гордона-Фока).

5. Метод ВКБ при $Z > 137$

Представляет интерес применение квазиклассики к сильному кулоновскому полю. Первая попытка в этом направлении принадлежит Крайнову [73], однако в этой работе метод ВКБ использовался не только в области кулоновского поля $r > r_N$, но и внутри ядра, где точность его невысока. Последовательное применение метода ВКБ к релятивистской кулоновской задаче дано в [74], где используется сшивание квазиклассической волновой функции с внутренним ($0 < r < r_N$) решением уравнения Дирака. Практически удобнее находить не ζ_{cr} при заданном радиусе ядра r_N, а обратную функцию:

$$r_N = \frac{\zeta_{cr}^2 - \kappa^2}{\zeta_{cr}(1 + ch2y)},$$

$$y - th\ y = \frac{1}{2\sqrt{\zeta_{cr}^2 - \kappa^2}} \left\{ \left(n_r + \frac{2l+3}{4} \right) \pi - arc\ ctg \left(\frac{\xi}{\sqrt{\zeta_{cr}^2 - \kappa^2}} \right) \right\}, \qquad (45)$$

где ξ – логарифмическая производная внутренней волновой функции на краю ядра, см.рис.14. Эта формула удобна для расчетов, обладает точностью $\sim 1\%$ в области радиусов $r_N \sim 10$ Фм и правильно передает зависимость Z_{cr} от модели обрезания кулоновского потенциала внутри ядра, как видно из рис. 1. При этом с ростом r_N (или ζ_{cr}) точность ее только улучшается, см.(А.4). Для следующего уровня $2s_{1/2}$ точная и квазиклассическая кривые уже неотличимы в пределах точности этого рисунка.

Электронное состояние на краю нижнего континуума остается локализованным – см. выше (17),(29). Поэтому дискретный уровень при $Z \to Z_{cr}$ не "стелется" к границе $\varepsilon = -1$, а входит в нижний континуум с конечным наклоном β:

$$\varepsilon(\zeta) = -1 + \beta(\zeta_{cr} - \zeta) + ... \qquad (46)$$

Значение β представляет определенный интерес для теории [4,7]. Как видно из рис.4 и 7, метод ВКБ определяет наклон β с удовлетворительной точностью.

Квазиклассику можно применить и к релятивистской задаче двух центров. Отсылая за подробностями к работам [75-77], в которых детально развит метод ВКБ для состояний с $\varepsilon \approx -1$ в уравнении Дирака, приведем здесь уравнение, определяющее энергию электронных термов квазимолекулярной системы (Z_1, Z_2, e^-) вблизи границы континуума $\varepsilon = -1$:

$$\frac{R_{cr}}{R} = \left[1 - (1 + \frac{1-2\kappa}{4\zeta^2})(1+\varepsilon) \right] \phi(x), \qquad (47)$$

где

$$x = (1-\rho^2) \left[\varepsilon^2 - 1 + (\kappa - \frac{5}{4}) \frac{(1+\varepsilon)^2}{\zeta^2} \right] \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{1-2\kappa}{4\zeta^2} \right) (1+\varepsilon) \right]^{-2}, \qquad (47a)$$

$$\phi(x) = exp \left\{ \frac{1}{2\sqrt{x}} \left[(1+\sqrt{x})\ ln(1+\sqrt{x}) - (1-\sqrt{x})\ ln(1-\sqrt{x}) \right] - 1 \right\}, \quad x > 0,$$

$$\phi(x) = (1-x)^{1/2} exp\{\ (arc\ tg\sqrt{-x}/\sqrt{-x}) - 1\}, \quad x < 0$$

и $\zeta = (Z_1 + Z_2)/137$, $\rho = |\kappa|/\zeta$, $0 < \rho < 1$, причем $x = (1-\rho^2)(\varepsilon^2 - 1) + ...$ при $\varepsilon \approx -1$. Согласно(47), энергия терма ε зависит от отношения R/R_{cr} (что является следствием условия $r_N \ll \langle r \rangle \ll r_K$, которое выполняется при "малой надкритичности", т.е. при $Z_u - Z_{cr} \ll Z_{cr}$ (здесь r_K – радиус K-оболочки). При этом само значение R_{cr} расчитывается отдельно, например, с помощью вариационного метода (раздел 3). В итоге получаем кривые рис.10 (сравните с рис.8).

В литературе рассматривалась [29,78] возможность существования сверхзаряженных ядер с $Z \gg Z_{cr}$ (естественно, стабильность таких ядер может обеспечить только какой-то новый механизм, например, возникновение π^--конденсата [28]). Обозначим через n_κ и N число дискретных уровней с данным квантовым числом κ, опустившихся в нижний континуум, и полное число таких уровней, а N_e – число электронов в вакуумной оболочке сверхкритического атома (которая образуется вблизи ядра после вылета позитронов). Тогда $N = \sum\limits_\kappa n_\kappa$, $N_e = \sum\limits_\kappa (2j+1) n_\kappa$, и в квазиклассическом приближении

$$N = \frac{1}{2} \int\limits_0^\infty (V^2 + 2V)_+ \, r \, dr, \quad N_e = \frac{4}{3\pi} \int\limits_0^\infty \{(V^2 + 2V)_+\}^{3/2} r^2 dr, \qquad (48)$$

где $f_+(r) = f(r)$, если $f(r) \geq 0$, и $f_+(r) = 0$, если $f(r) < 0$. Отсюда в случае потенциала (5) при $\zeta \gg 1$ получаем

$$N = \frac{1}{2} \zeta^2 \, (ln \frac{\zeta}{r_N} + c_4), \quad N_e = \frac{4}{3\pi} \zeta^3 \, (ln \frac{\zeta}{r_N} + c_5), \qquad (49)$$

где c_4 и c_5 – константы порядка единицы, зависящие от формы обрезания (так, $c_4 = -0.90$, $c_5 = -1.38$ в случае модели II [79]). Рис.11, взятый из работы [79], показывает, что квазиклассическое приближение является достаточно точным уже при сравнительно небольших значениях $\zeta \gtrsim 2$.

Из (48) напрашивается естественное предположение, что $\rho(r) = (V^2 + 2V)^{3/2}/3\pi^2$ – это локальная плотность электронного облака в вакуумной оболочке сверхкритического атома, что может быть строго обосновано [39,54]. Это позволяет написать релятивистское уравнение Томаса-Ферми [26,54], решение которого определяет свойства электронной оболочки атома при $Z \gg 137$:

$$\Delta V = -4\pi e^2 \left[\frac{1}{3\pi^2} (V^2 + 2V)^{3/2} - n_p(r) \right], \qquad (50)$$

где n_p - плотность протонов в таком сверхядре.

Мы не будем вдаваться в дальнейшее обсуждение этих вопросов, отсылая к перечисленным выше работам и к монографиям [38,39,78]. Нашей целью здесь было лишь продемонстрировать эффективность метода ВКБ для сверхсильных кулоновских полей.

Отметим еще, что метод ВКБ можно применить и к двухчастичным релятивистским волновым уравнениям, в том числе к уравнению Салпитера для системы кварк-антикварк:

$$\{ \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_1^2} + \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_2^2} + V(r) \}\psi_n = M_n\psi_n, \tag{51}$$

где $\mathbf{p} = -i\nabla$, $m_{1,2}$ - массы кварков (спинами которых здесь пренебрегается), а M_n – массы мезонов. В случае потенциала конфайнмента $V(r) = \sigma r$ (σ – натяжение струны между q и $\overline{q}$) квазиклассический спектр масс мезонов совпадает, с процентной точностью, со спектром, полученным при численном решении уравнения Салпитера – в особенности для состояний с $l \sim 1$, включая и наинизшее состояние, $n_r = l = 0$. Подробнее см. табл. 4 (для случая $m_1 = m_2 = 0$) и Приложение D.

6. Z_{cr} для других частиц

Уравнение Клейна-Гордона-Фока (КГФ, см.ниже (58)) в случае кулоновского поля имеет решение, убывающее на бесконечности:

$$\chi_l(r) = const \cdot W_{\mu,i\nu/2}(x), \qquad -1 \leq \varepsilon < 1, \tag{52}$$

где $x = 2\lambda r$,

$$\lambda = \sqrt{1-\varepsilon^2}, \quad \mu = \zeta\varepsilon/\lambda, \quad i\nu/2 = \sqrt{(l+1/2)^2 - \zeta^2} \tag{53}$$

и $W_{\mu,\kappa}$ – функция Уиттекера. Энергия основного уровня в поле точечного заряда равна

$$\varepsilon_0(\zeta) = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \zeta^2}\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + \sqrt{\frac{1}{2} - \zeta} + ...\right), \quad \zeta \to \frac{1}{2}, \tag{54}$$

ср. с (1). Состояния с орбитальным моментом l испытывают теперь "падение на центр" при $\zeta > l + 1/2$. В пределе $\varepsilon \to -1$, когда $\lambda \to 0$, $\mu \to -\infty$ и $\mu x \to -2\zeta r$, функция Уиттекера упрощается:

$$\chi_l(r) = const \cdot r^{1/2} K_{i\nu}(\sqrt{8\zeta r}), \quad \nu = 2\sqrt{\zeta^2 - (l+1/2)^2} \tag{55}$$

Уравнение для определения ζ_{cr} можно записать в единой форме для обоих спинов $s = 0$ и $1/2$:

$$zK'_{i\nu}(z)/K_{i\nu}(z) = 2(s+\xi) - 1, \tag{56}$$

где, как и в (6), $z = \sqrt{8\zeta_{cr} r_N}$. При этом для основного состояния в обоих случаях $\nu = 2\sqrt{\zeta_{cr}^2 - (s+1/2)^2}$.

При условии $r_N \ll 1/m$ для модели обрезания I имеем, как и раньше, $\xi = \zeta\ ctg\zeta$. Учитывая, однако, что для пионов $mr_N > 1$, уравнение КГФ во внутренней области $r < r_N$ нужно решать точно. В простейшем случае ($l = 0$, модель обрезания I)

$$\xi = \beta\ ctg\beta, \quad \beta = \sqrt{\zeta(\zeta - 2r_N)}. \tag{57}$$

Уравнение (56) решалось на ЭВМ [3]. Хотя в данном случае для точечного заряда $Z_{cr} = 1/2\alpha = 68.5$, но уже при $r_N \sim 0.1\hbar/mc$ значение Z_{cr} превышает 137, см.рис.4 в [3]. Численный расчет для пионов ($\hbar/m_\pi c = 1.41$ Фм) дает [80] $Z_{cr}^{(\pi)} \approx 3300$, что выходит далеко за пределы известных сегодня ядер.

В случае мюона ($\hbar/m_\mu c = 1.87$ф) ситуация аналогична. Решение уравнения (6) дало [69] $\zeta_{cr} = 16.7$, или $Z_{cr}^{(\mu)} \approx 2300$ для модели II и $Z_{cr}^{(\mu)} \approx 3700$ в случае модели I. Таким образом, при $r_N \gg 1/m$ численное значение Z_{cr} сильно зависит от модели. На возможность существования сверхзаряженных ядер с $Z \sim 137^{3/2}$ неоднократно указывал Мигдал [29]; теория, однако, не дает вполне определенных указаний об их плотности и соотношении между A и Z. Примем, что $r_N = r_0 A^{1/3}$, где $r_0 = 1.2\delta$ Фм, $A/Z = 2.6\ \xi$, причем δ, ξ – свободные параметры (для обычных ядер $\delta = \xi = 1$). Значение $Z_{cr}^{(\mu)}$ существенно зависит от параметра $\Delta = \delta\xi^{1/3}$, см. рис.12. Следует еще отметить, что приведенные на этом рисунке значения Z_{cr} нужно рассматривать только как первое приближение, поскольку в расчете не учитывалась экранировка потенциала (5) электронной оболочкой, которую "натягивает" на себя голое ядро из вакуума после спонтанного рождения позитронов и вылета их на бесконечность. С учетом эффекта экранировки значения Z_{cr} еще более возрастают.

Таким образом, трудно рассчитывать на осуществление такой ситуации, когда мюонные или пионные уровни могли бы достичь границы $\varepsilon = -mc^2$, за исключением гипотетических сверхзаряженных ядер.

Относительно случая векторных мезонов ($s = 1$) см.выше замечание в конце раздела 4.

7. Разное

Здесь мы рассмотрим несколько дополнительных вопросов, примыкающих к содержанию разделов 2-6.

1. Как видно из (4), для состояний электрона с $\varepsilon \approx -1$ и $\zeta > j + 1/2$ возникает эффективное притяжение $\propto 1/r^2$ на малых расстояниях (для точечного заряда оно приводит к "падению на центр" [46-49]). Это притяжение является чисто релятивистским эффектом и связано с тем, что кулоновское взаимодействие электрона с ядром вводится минимальным образом, как временная компонента 4-потенциала $A_\mu(x)$. Это видно уже на примере уравнения КГФ для бесспиновой частицы, которое получается из соотношения $\mathbf{p}^2 = \varepsilon^2 - m^2$ путем замены $p_\mu \to p_\mu - eA_\mu$. Возникающее при этом уравнение

$$\Delta\varphi + [(\varepsilon - V)^2 - m^2]\varphi = 0 \tag{58}$$

по форме тождественно уравнению Шредингера, если положить

$$E = (\varepsilon^2 - m^2)/2m, \qquad U = \frac{\varepsilon}{m}\, V - \frac{1}{2m} V^2. \tag{59}$$

Слагаемое $-\frac{1}{2m}\, V^2$ доминирует на малых расстояниях, где $|V(r)| \to \infty$, и приводит к притяжению независимо от знака $V(r)$. Для спина $s = 1/2$ вид эффективного потенциала усложняется, но качественно не меняется: в выражении для $U(r)$ появляются дополнительные члены, обязанные спину частицы и спин-орбитальному взаимодействию.

2. Если бы в природе существовали легкие (с массой порядка m_e) заряженные скалярные бозоны, то (поскольку для них $Z_{cr} = 68.5$ при $r_N = 0$) были бы легко наблюдаемы эффекты, связанные с приближением дискретного уровня к границе $\varepsilon = -mc^2$. Однако для пиона $\hbar/m_\pi c =$ $= 1.41$ Фм и $m_\pi r_N \gg 1$, а в этой области, как показано в предыдущем разделе, Z_{cr} намного превосходит 137.

Сравнительно небольшое (по сравнению со случаем точечного заряда) возрастание Z_{cr} от $Z_{cr}^{(0)} = 137$ для электронов связано с тем, что для них $m_e r_N \sim 0.03 \ll 1$.

3. Существует характерное различие в поведении уровней энергии ε с ростом глубины потенциальной ямы для бозонов и фермионов, впервые обнаруженное в работе Шиффа, Снайдера и Вайнберга [81] на примере s-состояний в прямоугольной яме $V(r) = -g\ \theta(r_0 - r)$ для уравнения КГФ. А именно, в этом случае зависимость ε от константы связи g не является монотонной, а имеет загиб, который в случае широкой ямы расположен

вблизи $\varepsilon = -1$. При некотором $g = g_{cr}$ сливаются два уровня (идущие, соответственно, от границ непрерывного спектра $\varepsilon = 1$ и $\varepsilon = -1$), после чего возникают состояния с квадратично интегрируемой волновой функцией, но с комплексной энергией, что противоречит унитарности. Это означает, что при $g > g_{cr}$ одночастичный гамильтониан КГФ уже не является самосопряженным оператором и теряет физический смысл.

Физическая интерпретация этого феномена была дана Мигдалом [28]: при $g \sim g_{cr}$ происходит виртуальное рождение пар заряженных частиц-античастиц и возникает сильная поляризация вакуума, которая экранирует затравочный заряд g и не позволяет ему достичь значения g_{cr}. Таким образом, в бозонном случае при $g \sim g_{cr}$ теория принципиально должна быть многочастичной (в то время как в случае электронов, вследствие принципа Паули, после испускания позитронов при $Z > Z_{cr} \approx 170$ имеются лишь две вакансии на K- оболочке, поэтому поляризация вакуума дает малый эффект $\sim \alpha$ и не может препятствовать опусканию следующих уровней электронного спектра в нижний континуум [7]).

Дальнейшее развитие этих соображений привело А.Б.Мигдала с сотрудниками к созданию теории пионной конденсации в ядерной материи [78] и предсказанию ряда красивых эффектов. К сожалению, вплоть до настоящего времени не получено экспериментальных указаний на существование π-конденсата в тяжелых ядрах.

4. Вопрос о характере движения уровней вблизи границы $\varepsilon = -1$ представляет определенную трудность, что связано с анализом решений достаточно сложных уравнений. Помимо [5,7,81], этот вопрос рассматривался в ряде работ [82-88], причем при этом допускались и ошибки [84,85]. Наиболее удобным способом исследования данного вопроса является релятивистское обобщение разложения эффективного радиуса для состояний с энергией, близкой к границе нижнего континуума [88]. Такой анализ показывает [69,88], что для уравнения Дирака нет "позитронных уровней", которые возникали бы из нижнего континуума и имели производную $d\varepsilon/d\zeta > 0$. В то же время для уравнения КГФ такие уровни имеются [81]. В случае короткодействующего потенциала притяжения $V(r) = -gv(r)$ при некотором $g = g_{cr}$ и энергии $\varepsilon > -1$ происходит слияние ("столкновение") двух решений, отвечающих связанным состояниям скалярной частицы и античастицы, а при $g > g_{cr}$ появляются комплексные полюса S-матрицы на физическом листе (что невозможно, ибо противоречит условию унитарности). Замечательным свойством уравнения Дирака является то, что в нем такой трудности не возникает, по-

этому одночастичное уравнение Дирака сохраняет, в известной мере, свой смысл и в закритической области $g > g_{cr}$ [7] (одночастичный гамильтониан остается самосопряженным оператором).

Если потенциал $V(r)$ обладает кулоновским "хвостом" при $r \to \infty$, то из-за наличия барьера в $U(r)$ связанное состояние остается локализованным даже при $\varepsilon = -1$, $\zeta = \zeta_{cr}$ (см.выше, например (17)). Поэтому все уровни дискретного спектра входят в нижний континуум с конечным наклонном $d\varepsilon/d\zeta = -\beta < 0$ (как для спина $s = 1/2$, так и при $s = 0$ [4]). Тем не менее, принципиальное различие между бозонным и фермионным случаями остается: полюс S-матрицы, соответствующий при $Z < Z_{cr}$ связанному состоянию, уходит при $Z > Z_{cr}$ в комплексную плоскость на физический лист, если спин $s = 0$, и на нефизический – если $s = 1/2$.

Таким образом, статистика частиц существенно сказывается на аналитических свостваx одночастичной S-матрицы вблизи границы нижнего континуума.

5. О влиянии магнитного поля на Z_{cr}. В сильном магнитном поле, для которого ларморовский радиус электрона $l = \sqrt{\hbar c/eB} = \sqrt{B_0/B}$ (в единицах $\hbar/mc$) меньше среднего радиуса основного состояния $\langle r \rangle$, электронное облако прижимается к ядру (в направлении, поперечном к полю $\mathbf{B}$) и становится "сигарообразным" [89-91]. Поэтому электрон эффективно испытывает более сильное притяжение к ядру, чем в отсутствие внешнего магнитного поля, в силу чего величина Z_{cr} уменьшается. Условие $l \ll \langle r \rangle$ означает, что $B \gg B_0 = m^2c^3/e\hbar = 4.41 \cdot 10^{13}$Гс (критическое, или швингеровское [92] поле[16], характерное для КЭД).

Эта задача подробно рассмотрена в работе [94]. Для "слабого" магнитного поля уменьшение Z_{cr} можно найти по теории возмущений:

$$\zeta_{cr}(B) = \zeta_{cr}(0) - \frac{5\pi^2\mu}{6[ln(1/r_N)]^3} \cdot \frac{B}{B_0} + O((B/B_0)^2), \qquad (60)$$

где μ – магнитный момент (15). Отсюда следует, что даже при $B \sim 0.1\ B_0 \sim 5 \cdot 10^{12}$ Гс изменение $\Delta Z_{cr} < 1$.

Для более сильных полей значение $Z_{cr}(B)$ находится из полученных в [94] уравнений. Приведем некоторые числа, относящиеся к основному состоянию: $Z_{cr} \approx 165$ при $B = B_0$; $Z_{cr} = 96 (B = 100B_0)$; $Z_{cr} = 92$, ядро урана – при этом требуется $B = 133B_0 \approx 5,5 \cdot 10^{15}$ Гс; $Z_{cr} = 41$ при $B = 2,4 \cdot 10^4 B_0 \approx 10^{18}$ Гс. Следующий уровень электронного спектра

[16]Очевидно, что такие поля могут встречаться лишь в весьма экстремальных условиях (например, внутри пульсаров [93]).

достигает границы $\varepsilon = -1$ при $B \sim 1.5 \cdot 10^{16}$ Гс, если $Z_{cr} = 92$, и т.д.

Таким образом, при наличии сильного магнитного поля достижение границы нижнего континуума происходит уже при $Z < 170$ – например, в случае голого ядра урана или даже для еще более легких ядер. Приведенные выше оценки показывают, однако, что для этого требуются магнитные поля $B \gg B_0$. Заметим, что максимальные магнитные поля, достигнутые к настоящему времени в лаборатории, на шесть порядков меньше, чем B_0 [95,96].

6. Рядом авторов рассматривались модификации КЭД и их влияние на эффект спонтанного рождения позитронов[17]. В частности, рассматривался [100] нелинейный лагранжиан типа Борна-Инфельда [101]. Для случая электростатики он приводит к плотности энергии

$$w = \frac{E_0^2}{2n} \cdot \left[\left(1 + \frac{D^2}{E_0^2}\right)^n - 1\right], \tag{61}$$

где n и E_0 – параметры теории: так, максвелловской электродинамике отвечает $n = 1$ (или $E_0 \to \infty$), теории Борна-Инфельда – $n = 1/2$, теории Инфельда-Гофмана [102] – предельный случай $n = 0$.

Обозначим через E_B то значение параметра E_0, которое получается из условия [101], что вся масса электрона имеет электромагнитное происхождение. Тогда $E_B = 1,2.10^{18}$ В/см для $n = 1/2$; при этом $Z_{cr} = 214$ для $1s$-уровня [103], что, естественно, закрыло бы возможность наблюдения эффекта спонтанного рождения e^+ в опытах с известными тяжелыми ядрами. Однако такая величина E_0 противоречит экспериментальным данным по атомным уровням. Для того, чтобы не вступить в противоречие с хорошо измеренными разностями энергий в спектрах атомов Pb^{82} и Fm^{100}, нужно принять [104], что $E_0 > 140E_B \sim 10^4 E_0 \sim 2 \cdot 10^{20}$ В/см. При этом значение Z_{cr} может возрасти не более, чем на 2 единицы.

Мы не будем рассматривать другие модификации КЭД, также обсуждавшиеся в литературе в связи с эффектом спонтанного рождения позитронов.

7. В работе [1] впервые, повидимому, было отмечено, что ситуация с $Z > Z_{cr}$ может быть реализована при столкновении двух обычных (докритических) ядер, суммарный заряд которых превышает Z_{cr}. Это простое, но важное замечание стимулировало дальнейшие исследования

[17]В настоящее время предсказания КЭД находятся в замечательном согласии с экспериментом: в рекордном случае аномального магнитного момента электрона точность достигает 10^{-12} [97-99]. В этой связи обсуждаемые ниже модификации КЭД представляются менее интересными, чем ранее.

в этой области, которые привели в конце концов к постановке соответствующих экспериментов (см. следующий раздел). Вместе с тем, в [1] была допущена ошибка, на которой следует остановиться.

Согласно [1], "плотность заряда одного только электрона делокализуется при $Z \to Z_{cr}$". Однако в [1] не был учтен предэкспоненциальный множитель в асимптотике кулоновской волновой функции $\psi(r) \propto r^{\mu} exp(-\lambda r)$, обязанный кулоновскому барьеру в эффективном потенциале (36). Поскольку $\mu = \zeta\varepsilon/\lambda \to -\infty$ и $\lambda = \sqrt{1-\varepsilon^2} \to 0$ при $\varepsilon \to -1$, то предэкспонента r^{μ} компенсирует все более медленное убывание экспоненты $exp(-\lambda r)$ при $r \to \infty$, когда уровень приближается к границе нижнего континуума (в отличие от нерелятивистского случая $\varepsilon \to 1$, когда кулоновское взаимодействие электрона с ядром, наоборот, увеличивает $\langle r \rangle$ по сравнению со случаем короткодействующего потенциала). Таким образом, связанное состояние на краю нижнего континуума остается локализованным – не только для электронов [3], но и в случае скалярных мезонов [4]. Поэтому нет оснований ожидать, что поляризационный заряд вакуума сильно возрастает и делокализуется при $Z \to Z_{cr}$ (в случае фермионов, когда действует принцип Паули [7]), что полностью подтверждается и выполненными в дальнейшем численными расчетами [105,106] поляризации вакуума и вызванных ею сдвигов уровней e^- и μ^-в тяжелых атомах, вплоть до $Z = 137$ (и даже до $Z = 170 \sim Z_{cr}$).

С другой стороны, в бозонном случае, когда принцип Паули не действует, при $Z \sim Z_{cr}$, действительно, происходит резкое возрастание поляризации вакуума, приводящее к образованию конденсата [28].

8. Оптимистическое заключение

"А что такое оптимизм ? – спросил Какамбо.
Увы, – сказал Кандид, – это страсть утверждать,
что все хорошо, когда в действительности
все очень плохо".

/Вольтер, *Кандид, или Оптимизм*/

В заключение коснемся (совсем кратко) сложившейся на сегодня экспериментальной ситуации.

Эксперименты по наблюдению спонтанного и вынужденного рождения позитронов в столкновениях тяжелых ядер (с энергией, близкой к

высоте кулоновского барьера[18]) проводились на ускорителе тяжелых ионов UNILAC в GSI (Дармштадт, Германия), на котором были получены пучки ионов Pb и U с энергией от 3 до 6 МэВ/нуклон. В первых же экспериментах [107,108], проводившихся еще в докритической области ($Z_1+Z_2 < Z_{cr}$), было обнаружено вынужденное образование e^+, обязанное быстро меняющемуся во времени кулоновскому полю сталкивающихся ядер (в литературе используются также термины: квазиатомные, или индуцированные позитроны). Образуются и так называемые "ядерные" позитроны, происходящие от внутренней парной конверсии при кулоновском возбуждении ядер (при переходах с энергией, большей $2m_ec^2$). Вычисление вероятностей этих процессов требует довольно громоздких численных расчетов [25]. Наблюдавшиеся энергетические спектры e^+ согласуются с теоретическими расчетами этих двух процессов.

Особый интерес вызвали сообщения [109-111] двух экспериментальных групп ("EPOS" и "ORANGE", по названиям используемых ими магнитных спектрометров) о наблюдении, помимо предсказываемого теорией непрерывного спектра позитронов, нескольких сравнительно узких (с шириной $\lesssim$ 40 кэВ) позитронных пиков, что явилось полной неожиданностью для экспериментаторов и получило название "Дармштадтского эффекта". В дальнейшем эти результаты неоднократно проверялись и детализировались, причем под площадью наиболее заметных пиков ($E_{e^+} \approx$ 255 и 340 кэВ) были зарегистрированы десятки событий – см., например, рис.13. Впоследствии узкие пики наблюдались также и в спектре электронов, регистрировавшихся в совпадении с позитронами, и по суммарной энергии $E_{e^+}+E_{e^-}$, что представлялось совсем уже загадочным (см. работы [112-114] и дальнейшие ссылки в обзоре [115]).

Естественно, что эти необычные явления вызвали живой интерес у теоретиков. В период 1985-92 гг. появились десятки теоретических работ, в которых для объяснения "Дармштадтского эффекта" предлагались самые разнообразные, порой довольно экзотические гипотезы: распад новой частицы (аксион [116,117]); составные протяженные частицы; магнитные квазисвязанные состояния системы e^+e^- [118]; новая фаза в вакууме КЭД [119]; образование при столкновении тяжелых ионов квазимолекулы, в которой ядра находятся на расстоянии $R < R_{cr}$ в течение времени $T \gg R_{cr}/v \sim 10^{-21}c$ [120,121]; захват и охлаждение позитронов в расширяющемся открытом резонаторе между двумя кулоновскими центрами [122]; необычные решения двухчастичных релятивистских волно-

[18]Высота барьера $E_B = (Ze)^2/r_N$, или $E_B/A = \zeta \cdot Z/A \cdot (\hbar/mcr_N)mc^2 \sim 6$ МэВ/нуклон.

вых уравнений [123,124] (см., однако, [125]) и т.д., перечислять которые далее нецелесообразно. Ни одна из этих попыток не дала, однако, достаточно полного и убедительного описания всей совокупности наблюдавшихся в GSI явлений.

В дальнейшем критический анализ этих (чрезвычайно трудных) экспериментов и новые эксперименты со значительно большей статистикой показали, что "узкие линии" в спектре e^+ и e^- являются ошибкой эксперимента, что признали и сами авторы из GSI [126,127]. Таким образом, необходимость "новой физики" для объяснения этих явлений не потребовалась, как это не раз уже случалось в истории науки.

Трудно сказать, когда будет (и будет ли) продолжен Дармштадтский эксперимент и проведено детальное сравнение теории спонтанного рождения позитронов с опытом, что означало бы проверку КЭД и уравнения Дирака не в традиционном направлении сверхвысоких энергий и малых расстояний, но в новой области сверхсильных внешних полей. Эксперименты эти сложны[19] и дорогостоящи, а сенсационных открытий здесь, пожалуй, ожидать уже не приходится. Вместе с тем, их проведение не требует разорительной для целой страны постройки новых гигантских ускорителей – энергия, необходимая для сближения двух ядер урана на критическое расстояние $R_{cr} \approx 35$ Фм, составляет 5–6 МэВ/нуклон, что давно достигнуто на существующих в мире ускорителях тяжелых ионов. Кроме того, имеется большой прогресс в получении пучков частично и даже полностью ободранных тяжелых ионов (напомним [7,38,39], что для спонтанного рождения позитронов необходимо, чтобы в нижний континуум опустился "голый", т.е незаполненный K-уровень[20]). Все это позволяет смотреть на будущее экспериментальных исследований в данной области физики с осторожным оптимизмом (но, впрочем, заслуживает внимания также и приведенное выше мнение Вольтера).

Ситуация может существенно измениться, если когда-либо будут открыты ядра с $Z \gtrsim 137^{3/2}$, которые, как указывает теория [26,54], должны

[19]Основная трудность состоит в выделении интересующего нас процесса среди других, неизбежно происходящих вместе с ним, как то: вынужденное рождение e^+, образование их в ядерных процессах, и т.д. Кроме того, само сечение спонтанного рождения позитронов экспоненциально мало на пороге $E \to E_{th} = 2(Ze)^2/R_{cr}$ [4,7,21] (вследствие кулоновского барьера в (36), который обеспечивает и локализацию электронного состояния с энергией $\varepsilon \lesssim -1$ в нижнем континууме). Впрочем, при энергиях $E \gtrsim 2E_{th}$ экспоненциальная малость сечения уже не имеет места [21].

[20]Спонтанное рождение позитронов возможно не только при столкновении двух голых (с незаполненными K-оболочками) ядер с $Z_u > Z_{cr}$, но и в том случае, когда лишь одно из ядер (Z_1) является голым, а у второго (Z_2) K – электроны присутствуют (например, нейтральный атом ядра-мишени). При этом необходимым условием является $Z_1 \geq Z_2$, что следует из сравнения молекулярных термов системы (Z_1, Z_2, e) на малых и больших расстояниях между ядрами [20,21].

быть окружены мощной вакуумной оболочкой (состоящей из электронов, опустившихся с ростом Z в нижний континуум). На возможность существования таких сверх-ядер (с $A > 10^3$ и $N = Z$) неоднократно указывал Мигдал [29,78,128-131]. Их стабильность обеспечивалась бы тем, что заряд протонов экранируется π^--конденсатом и распределенными внутри ядра электронами:

"For $Z > Z_c \approx (137)^{3/2}$ stable nuclei should exist. At a sufficient value of $Z - Z_c$ such nuclei should be stable with respect to fission" [29].

"For highly charged nuclei, fission instability is most important. Fission stability is possible only if the Coulomb energy is considerably suppressed. This means that the π^- charge should be of the order of Z. As we have shown, $Z_\pi \approx Z$ at $Ze^3 \sim 1$. Thus the considerable suppression of the Coulomb energy at $Ze^3 \sim 1$ can lead to the stability of supercharged nuclei" [130].

"Анализ показал, что существуют две возможные области устойчивости аномальных ядер: сверхплотных ($Z \approx N,\ Z \lesssim 10^2$) и сверхтяжелых ($Z \approx N,\ Z \gtrsim 10^3$), при этом электрический заряд барионов почти полностью скомпенсирован π-конденсатом и электронами ... В предельном случае $Z \gg 1/e^3 \approx 1600$ внутренность сверхтяжелого ядра представляет собой электронейтральную плазму из барионов, π-конденсатных мезонов, электронов и отрицательных мюонов. Для таких ядер нет ограничений сверху на A, и в принципе могут существовать ядра–звезды" ([78], стр.278).

Таковы основные выводы из этих работ относительно возможности существования в природе сверхзаряженных ядер. Конечно, надо иметь ввиду, что современная теория ядра – это не небесная механика: даже закон взаимодействия между двумя нуклонами в пустоте окончательно еще не установлен, тем более невозможно точное (ab initio) решение уравнения Шредингера для тяжелого ядра. Поэтому надежность теоретической экстраполяции от известных ядер в далекую область $Z \sim 137^{3/2}$ не стоит переоценивать[21]. И мы закончим наше обсуждение словами: "Это вы хорошо сказали, но надо возделывать наш сад" [133].

В заключение нельзя не упомянуть о последнем рекордном достижении в данной области – открытии элементов с Z=114 и 116. Недавно в

[21]В этой связи заметим следующее. Согласно проведенным в [28,29] оценкам, ядра близки к точке π-конденсатной неустойчивости и возможно существование пионного конденсата в обычных тяжелых ядрах. Однако, детальный анализ экспериментальных данных (отсутствие удвоения уровней 0^+ и 0^- в хорошо изученном спектре ядра ^{208}Pb, вероятности однонуклонного захвата медленных пионов ядрами, и др.) показал, что конденсата в известных ядрах нет [78,131]. В настоящее время вариационные расчеты [132] указывают на то, что π-конденсат, возможно, имеется внутри нейтронных звезд (при плотностях $\rho \sim (1.5 \div 2)\rho_0$, где $\rho_0 \approx 0.15$ нуклон/Фм^3 – нормальная ядерная плотность).

ОИЯИ (Дубна) на ускорителе тяжелых ионов У-400 в результате бомбардировки пучком ионов $^{48}_{20}Ca^{5+}$ плутониевой мишени были синтезированы три изотопа 114-го элемента (типичная реакция: $^{48}Ca + {}^{244}Pu \to {}^{292}114^* \to {}^{289}114 + 3n, \sigma \sim 1$ пб), а в самое последнее время получен и 116-й элемент (реакция $^{48}Ca + {}^{248}Cm \to {}^{296}116^* \to {}^{292}116 + 4n$), см. работы [134,136]. Трансурановые ядра с большим избытком нейтронов, синтезированные в этих экспериментах (всего пока что наблюдалось 7 таких ядер), живут сравнительно долго и после цепочки 3–4 последовательных α-распадов, с энергией α-частиц порядка 10 МэВ и временами жизни от нескольких секунд до десятков минут, испытывают спонтанное деление. В том же 1999 г. появилось сообщение [137] о том, что на 88-дюймовом циклотроне лаборатории им.Лоуренса (Беркли, США) получен 118-ый элемент (реакция $^{86}Kr + {}^{208}Pb \to {}^{294}118 \to {}^{293}118 + n$; эти результаты в настоящее время проверяются).

Эти замечательные (и фантастически трудные, с регистрацией ядерных событий с сечениями порядка 1 пб=10^{-36} см^2) эксперименты открывают путь к исследованию давно уже предсказываемого теоретиками "острова стабильности" сверхтяжелых элементов вблизи дважды магического ядра с $Z = 114$ и $N = 184$ (недавно открытые ядра лежат, повидимому, на отрогах этого острова). Тем самым, естественно, повышается интерес также и к эффектам КЭД при $Z > 137$.

9. Благодарности

Считаю своим приятным долгом поблагодарить С.С.Герштейна, Б.М.Карнакова, В.Д.Мура и Л.Б.Окуня, просмотревших статью в рукописи, за ряд ценных советов и замечаний, Ю.Ц.Оганесяна за обсуждение проблемы сверхтяжелых элементов, Д.Н.Воскресенского и Э.Е. Саперштейна за указание на работы [129-132], В.И.Лисина и С.Г.Позднякова за проведение численных расчетов, связанных с данной работой, а также М.Н.Маркину за неизменную помощь при оформлении рукописи.

Подписи к рисункам

Рис.1. Критический заряд ядра ($\zeta_{cr} = Z_{cr}/137$) для $1s_{1/2}$ и $2s_{1/2}$ уровней (радиус ядра r_N – в единицах $\hbar/mc$=386 Фм). Модели обрезания I и II соответствуют равномерному распределению электрического заряда по поверхности и по объему ядра. При этом для каждой пары близких кривых верхняя кривая соответствует численному расчету [3], а нижняя – квазиклассической формуле (45).

Рис.2. Влияние экранирования на критический заряд ядра [19]. Кривая 1 отвечает нейтральному атому (с учетом экранировки кулоновского поля ядра электронной оболочкой), кривая 2 – голому ядру. Штриховая линия – зависимость $r_N = r_0\ A^{1/3}$ с $r_0 = 1.2$ Фм и $A = 2.5Z$, точкам пересечения которой с кривыми 1 и 2 соответствуют значения $\zeta_{cr} = 1.247$ и 1.238.

Рис.3. График функции $F(q)$ в (9), $q = (Z - N)/Z$ – степень ионизации электронной оболочки сверхтяжелого атома.

Рис.4. Наклон основного уровня β при вхождении его в нижний континуум: сплошные кривые – численный расчет [3,4], пунктирная кривая – квазиклассическое приближение [74] для модели обрезания I.

Рис.5. Критическое расстояние R_{cr} (Фм) для основного терма $1s\sigma$ согласно [25]. Обозначения: – – – для голых ядер с $r_N = 0$, —— то же с учетом конечных размеров ядер, —·—·— 30 электронов и ..... 100 электронов в атомной оболочке.

Рис.6. Плотность электронного облака ρ_{cr} для основного терма $1s\sigma$ при $Z_1 = Z_2 = 92$, см.[23]. Значения ρ_{cr} на соседних линиях отличаются на множитель $10^{1/5} \approx 1.58$. Положение ядер обозначено буквой Z.

Рис.7. Наклон уровня β для задачи двух центров в зависимости от заряда иона Z: кривая 1 – численный расчет по формуле (30а), кривая 2 – приближение ВКБ, формула (А.7).

Рис.8. Энергии нижних электронных термов квазимолекулы (Z_1, Z_2, e) для Pb+Pb, Pb+U, U+U и U+Cf,$Z_u = Z_1+Z_2$.

Рис.9. Исходный потенциал $V(r)$ и эффективный потенциал $U(r)$ для релятивистской кулоновской задачи при $Z \approx Z_{cr}$ и $\varepsilon \approx -1$. Здесь $r_\pm$ – точки поворота, $r_0 = (\zeta^2 - \kappa^2)/\zeta$ – точка максимума эффективного потенциала.

Рис.10. Энергия основного терма в задаче двух центров. У кривых указаны значения суммарного заряда ядер $Z_u = Z_1 + Z_2$.

Рис.11. Число уровней N, опустившихся в нижний континуум, в зависмости от $\zeta = Z/137$ (для потенциала (5)). Ступенчатая ломаная – численное решение уравнения Дирака [79], кривая Q - по квазиклассической формуле (49).

Рис.12. Критический заряд ядра для мюона [69](модели обрезания I и II). Заметим, что для обычных тяжелых ядер параметр $\Delta = 1$.

Рис.13. Энергетический спектр позитронов, образующихся в столкновениях $U + Cf(Z_u = 190)$. На фоне сплошного спектра e^+ виден узкий пик при энергии ≈ 340 кэВ [109].

Рис.14. Логарифмическая производная ξ в зависимости от $\zeta = Z/137$ (в случае сферического ядра). Кривые 1 и 3 относятся к уровням $s_{1/2}$ и $p_{1/2,3/2}$ в модели I, кривые 2,4 и 5 – к уровням $s_{1/2}, p_{3/2}$ и $p_{1/2}$ в модели II.

Рис.15. Параметр ρ из (С.3) для основного уровня при $\varepsilon = -1$. Кривая 1 относится к задаче двух центров с зарядами $Z/2$, кривая 2 – к сферическому ядру с зарядом Z.

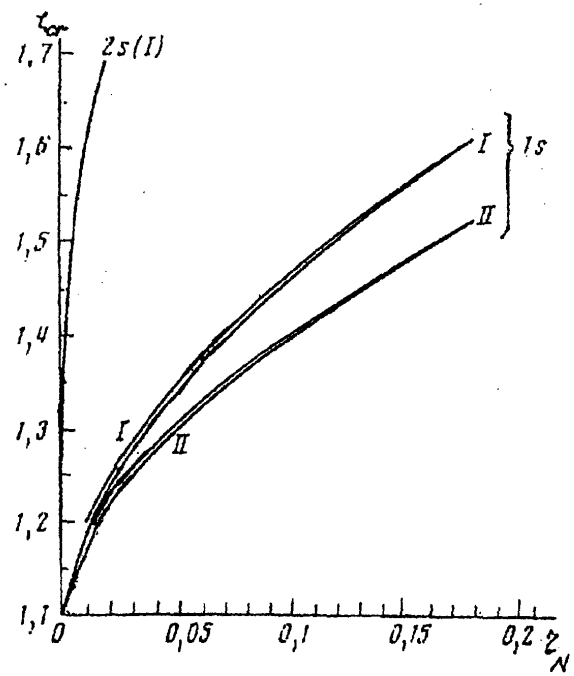
ζ_{cr}
1,7
1,6
1,5
1,4
1,3
1,2
1,1
0
0,05
0,1
0,15
0,2
τ_N
2s(I)
I
II
1s

Рис.1.

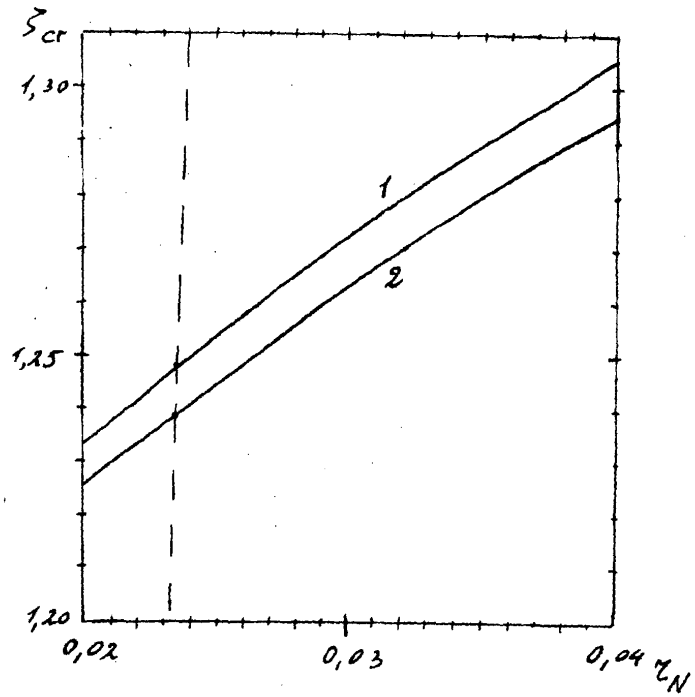
ζ_{cr}
1,30
1,25
1,20
0,02
0,03
0,04
τ_N
1
2

Рис.2.

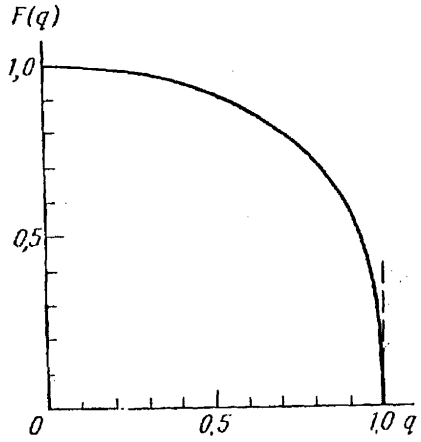

Рис.3.

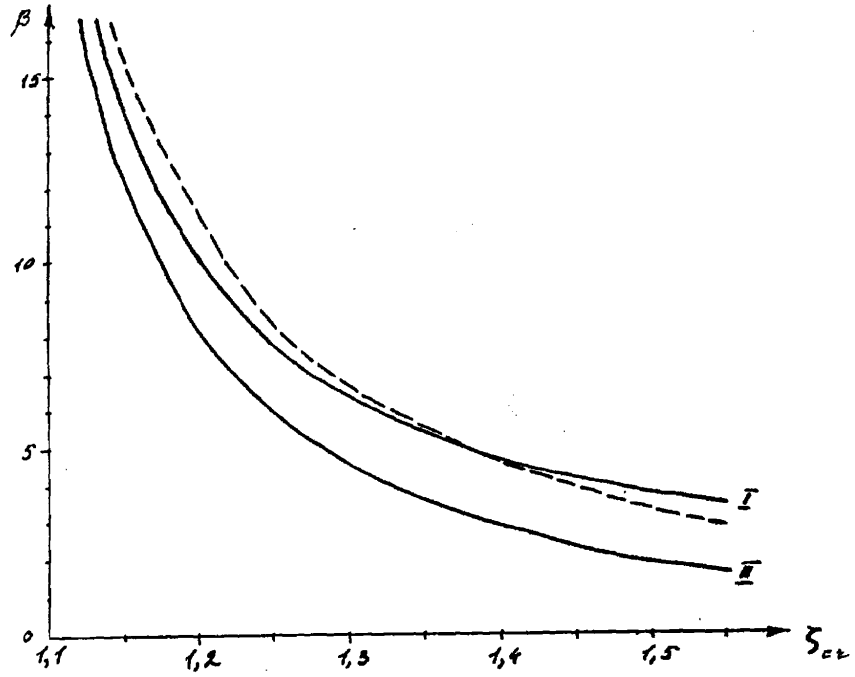

Рис.4.

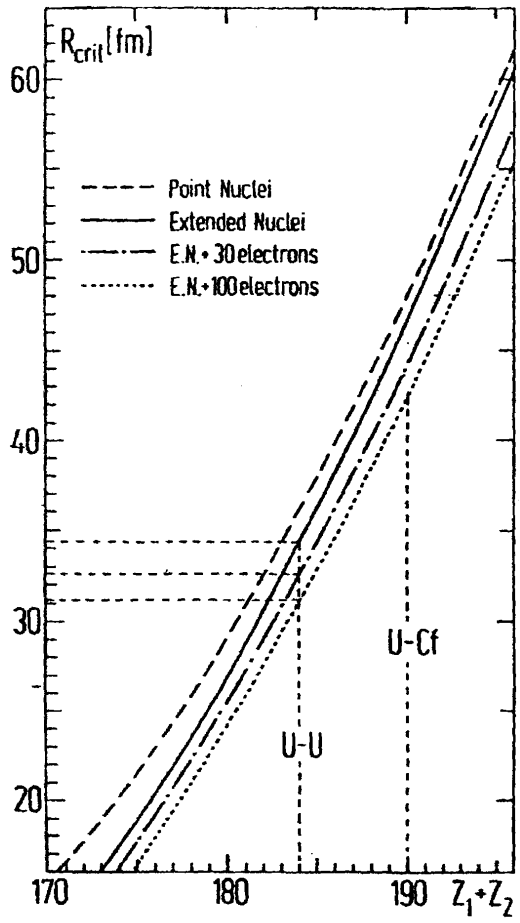
R_{crit} [fm]
60
50
40
30
20
Point Nuclei
Extended Nuclei
E.N.+30 electrons
E.N.+100 electrons
U-Cf
U-U
170
180
190
Z_1+Z_2

Рис.5.

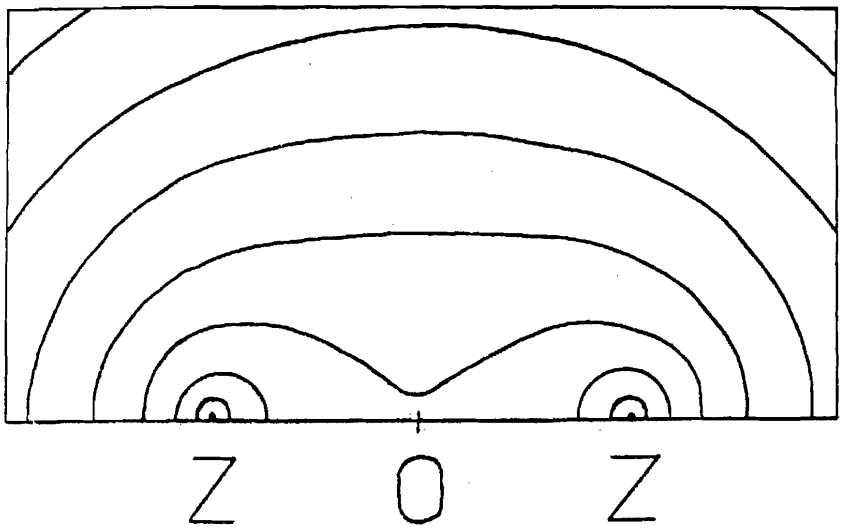

Рис.6.

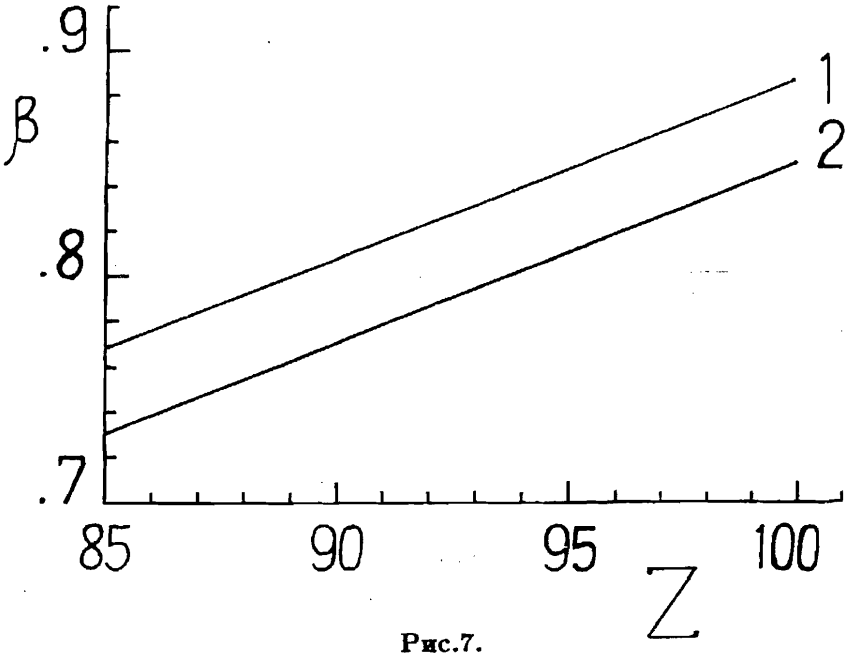

Рис.7.

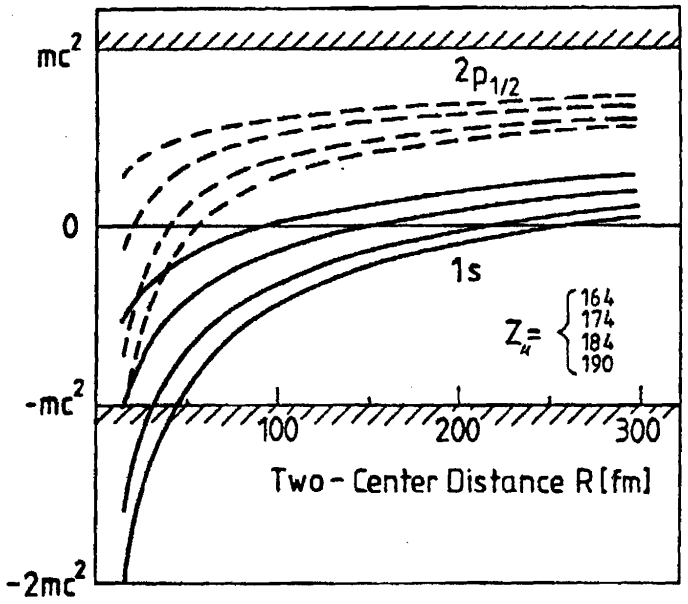
mc²
0
-mc²
-2mc²
2p1/2
1s
Z4 = 164 174 184 190
100
200
300
Two - Center Distance R [fm]

Рис.8.

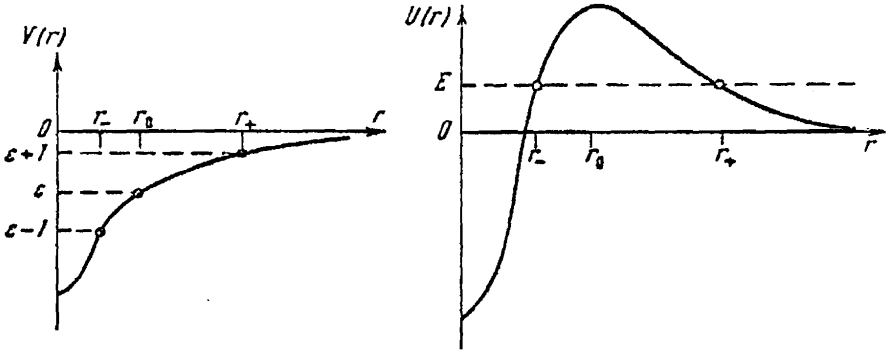
V(r)
0
ε+1
ε
ε−1
r₋
r₀
r₊
r
U(r)
E
0
r₋
r₀
r₊
r

Рис.9.

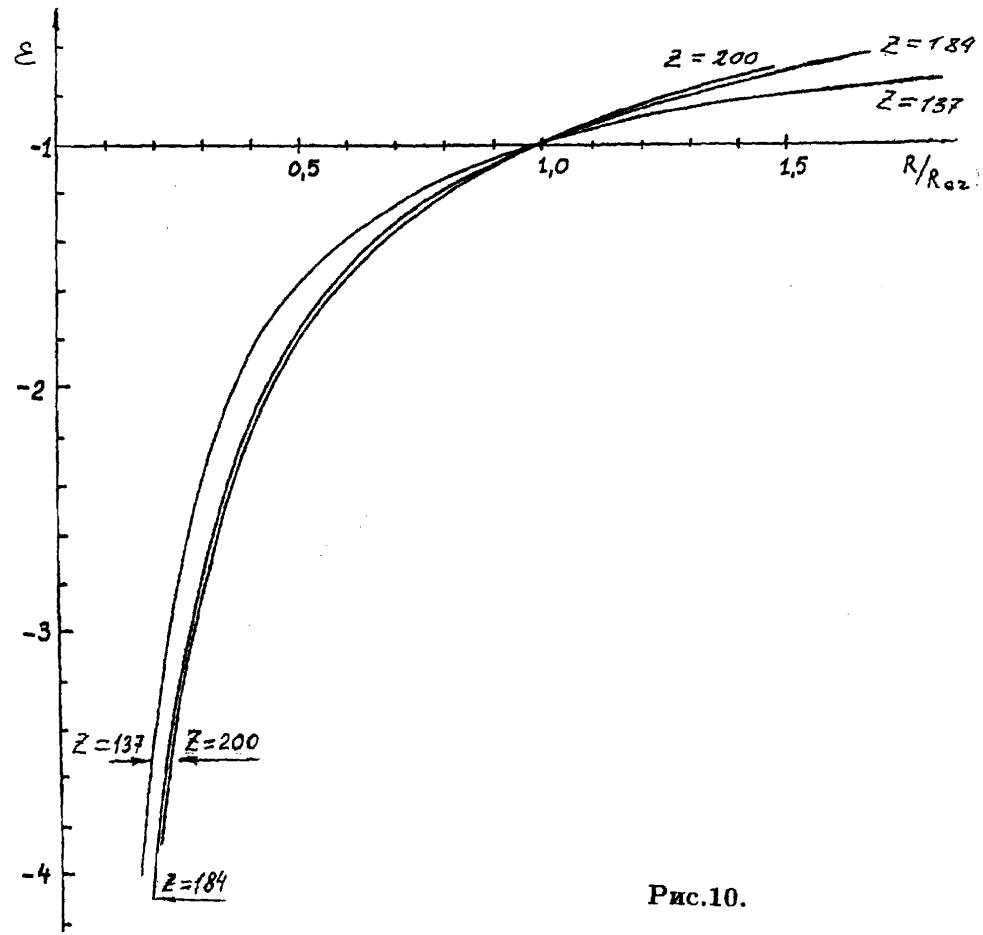

Рис.10.

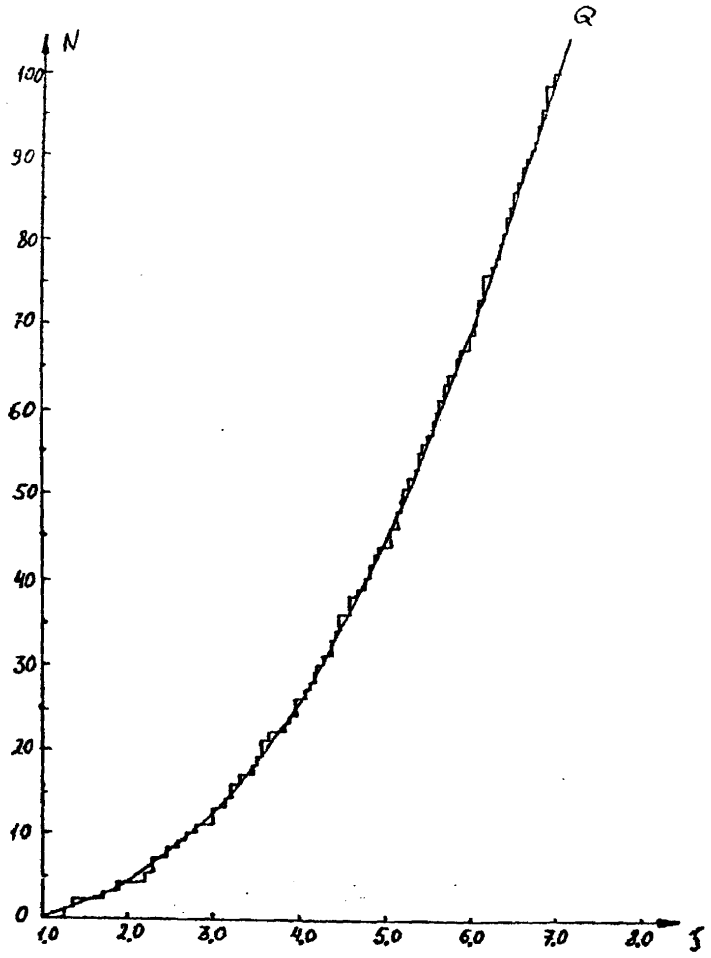

Рис.11.

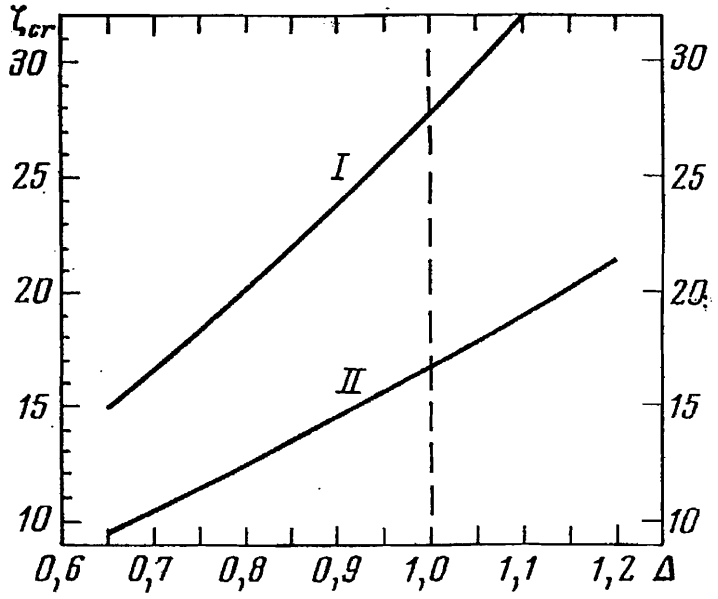
ζcr
30
25
20
15
10
I
II
0,6
0,7
0,8
0,9
1,0
1,1
1,2
Δ

Рис.12.

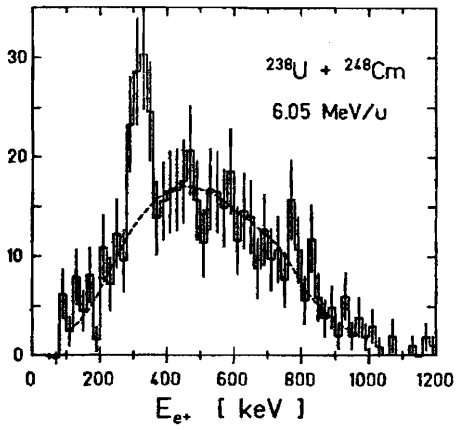
238U + 248Cm
6.05 MeV/u
30
20
10
0
0
200
400
600
800
1000
1200
Ee+ [keV]

Рис.13.

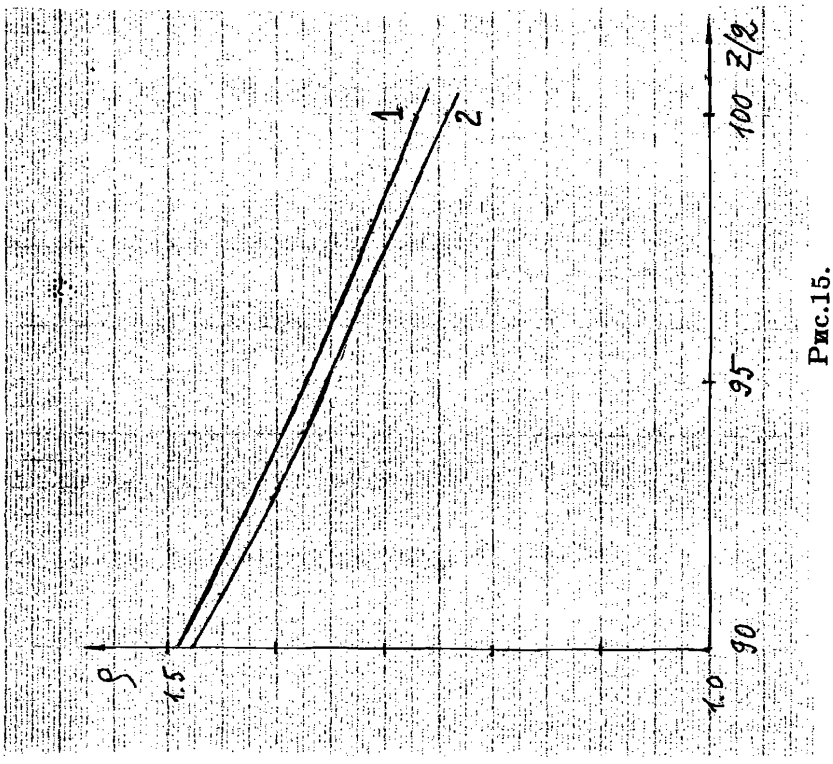

Рис.15.

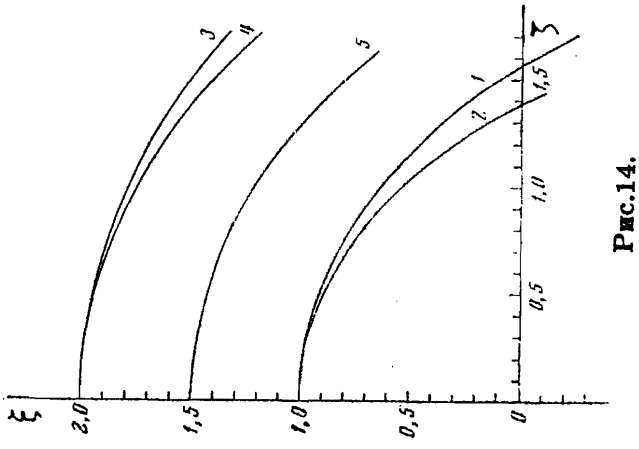

Рис.14.

Литература

1. С.С.Герштейн, Я.Б.Зельдович, ЖЭТФ **57**, 654 (1969); Lett.Nuovo Cim. **1**, 835 (1969).
2. W.Pieper and W.Greiner, Zeits.Phys. **218**, 327 (1969).
3. В.С.Попов, Письма в ЖЭТФ **11**, 254 (1970); ЯФ **12**, 429 (1970).
4. В.С.Попов, ЖЭТФ **59**, 965 (1970).
5. В.С.Попов, ЖЭТФ **60**, 1228 (1971).
6. А.М.Переломов, В.С.Попов, ЯФ **14**, 661 (1771).
7. Я.Б.Зельдович, В.С.Попов УФН **105**, 403 (1971).
8. В.С.Попов, Т.И.Рождественская, Письма в ЖЭТФ **14**, 267 (1971).
9. В.С.Попов, Письма в ЖЭТФ **16**, 355 (1972).
10. B.Müller, J.Rafelski, and W.Greiner, Zeits.Physik **257**, 62, 183 (1972).
11. G.Soff, B.Müller, and J.Rafelski, Zeits.Naturforsch. **29a**, 1267 (1974).
12. B.Fricke, W.Greiner, and J.T.Waber, Theor.Chim.Acta, **21**, 235 (1971).
13. B.Müller, H.Peitz, J.Rafelski, and W.Greiner, Phys.Rev.Lett. **28**, 1235 (1972).
14. B.Müller, J.Rafelski, and W.Greiner, Phys.Lett. **47B**, 5 (1973).
15. L.Fulcher and A.Klein, Phys.Rev. **D8**, 2455 (1973).
16. J.Rafelski, B.Müller, and W.Greiner, Nucl.Phys. **B68**, 585 (1974).
17. M.Gyulassy, Phys.Rev.Lett. **33**, 921 (1974); Nucl.Phys. **A244**, 497 (1975).
18. В.С.Попов, ЯФ **14**, 458 (1971); **15**, 1069 (1972).
19. М.С.Маринов, В.С.Попов, Письма в ЖЭТФ **17**, 511 (1973).
20. S.S.Gershtein and V.S.Popov, Lett.Nuovo Cim. **6**, 593 (1973).
21. В.С.Попов, Письма в ЖЭТФ **18**, 53 (1973); ЖЭТФ **65**, 35 (1973); ЯФ **19**, 155 (1974).
22. М.С.Маринов, В.С.Попов, В.Л.Столин, Письма в ЖЭТФ **19**, 76 (1974); J.Comput. Phys. **19**, 241 (1975).
23. V.I.Lisin, M.S.Marinov, and V.S.Popov, Phys.Lett. **69B**, 141 (1977); **91B**, 20 (1980).
24. J.Rafelski and B.Müller, Phys.Lett. **65B**, 205 (1976).
25. G.Soff, W.Greiner, W.Betz, and B.Müller, Phys.Rev. **A20**, 169 (1979).
26. B.Müller and J.Rafelski, Phys.Rev.Lett. **34**, 349 (1975).
27. B.Müller and W.Greiner, Zeits.Naturforsch. **A31**, 1 (1976).
28. А.Б.Мигдал, ЖЭТФ **61**, 2209 (1971); Nucl.Phys. **B52**, 483 (1973).
29. A.B.Migdal, Phys.Lett. **52B**, 182 (1974).
30. А.Б.Мигдал, ЖЭТФ **70**, 411 (1976).

31. S.J.Brodsky, Comm.Atomic Molec.Phys. **4**, 109 (1973).
32. L.B.Okun', Comm.Nucl.Part.Phys. **6**, 25 (1974).
33. В.С.Попов, Материалы 3-й школы физики ИТЭФ, **1**, с.5-21, Москва, Атомиздат (1975).
34. J.P.Reinhardt and W.Greiner, Rep.Progr.Phys. **40**, 219 (1977).
35. J.Rafelski, L.P.Fulcher, and A.Klein, Phys.Rep. **38C**, 227 (1978).
36. В.С.Попов, Изв. АН СССР (сер.физич.) **41**, 2577 (1977).
37. В.С.Попов, *Электродинамика сверхсильных кулоновских полей* ($Z > 137$), препринт ИТЭФ-169 (1980); Природа, No.10, с.14-22 (1981).
38. А.Б.Мигдал, *Фермионы и бозоны в сильных полях*, Москва, Наука, 1978.
39. W.Greiner, B.Müller, and J.Rafelski, *Quantum Electrodynamics of Strong Fields*, Springer, Berlin, 1985.
40. I.Pomeranchuk and Ya.Smorodinsky, J. of Phys. USSR **9**, 97 (1945); см. И.Я.Померанчук, *Собр.научных трудов* **2**, 21, Москва, Наука, 1972.
41. А.Б.Мигдал, *Качественные методы в квантовой теории*, Москва, Наука, 1975.
42. А.Зоммерфельд, *Строение атома и спектры*, **1**, 229, Москва, Гостехиздат, 1956.
43. F.L.Scarf, Phys.Rev. **109**, 2170 (1958).
44. С.П.Аллилуев, ЖЭТФ **61**, 15 (1971).
45. А.И.Ахиезер, В.Б.Берестецкий, *Квантовая электродинамика*, Москва, Гостехиздат, 1953.
46. K.M.Case, Phys.Rev. **80**, 797 (1950).
47. P.M.Morse and H.Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, **2**, ch.12, Mc Graw-Hill, New York, 1953.
48. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, *Квантовая механика (нерелятивистская теория)*, Москва, Наука, 1974.
49. А.М.Переломов, В.С.Попов, ТМФ **4**, 48 (1970).
50. F.G.Werner and J.A.Wheeler, Phys.Rev. **109**, 126 (1958).
51. В.В.Воронков, Н.Н.Колесников, ЖЭТФ **39**, 189 (1960).
52. П.Гомбаш, *Статистическая теория атома и ее применения*, Москва, ИИЛ, 1951.
53. В.С.Попов, В.Л.Елецкий, М.С.Маринов, ЖЭТФ **73**, 1241 (1977).
54. А.Б.Мигдал, Д.Н.Воскресенский, В.С.Попов, Письма в ЖЭТФ **24**, 186 (1976); ЖЭТФ **72**, 834 (1977).

55. V.A.Fock, Zeits. Phys. **98**, 145 (1935).
56. V.Bargmann, Zeits.Phys. **99**, 576 (1935).
57. С.П.Аллилуев, ЖЭТФ **33**, 200 (1957).
58. J.Schwinger, J.Math.Phys. **5**, 1606 (1964).
59. Г.Дьерди, Я.Реваи, ЖЭТФ **48**, 1445 (1965).
60. А.М.Переломов, В.С.Попов, ЖЭТФ **50**, 179 (1966).
61. M.Bander and C.Itzykson, Rev.Mod.Phys. **38**, 330, 346 (1966).
62. В.С.Попов, в сб. "*Физика высоких энергий и теория элементарных частиц*", с.702, Киев, Наукова думка, 1967.
63. M.H.Johnson and B.A.Lippman, Phys.Rev. **78**, 329 (1950).
64. P.C.Martin and R.J.Glauber, Phys.Rev. **109**, 1307 (1958).
65. А.М.Переломов, В.С.Попов, ДАН СССР, **181**, 320 (1968).
66. И.В.Комаров, Л.И.Пономарев, С.Ю.Славянов, *Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции*, Москва, Наука, 1976.
67. Л.В.Канторович, В.И.Крылов, *Приближенные методы высшего анализа*, М.-Л., Гостехиздат, 1950.
68. R.E.Langer, Phys.Rev. **51**, 669 (1937).
69. В.С.Попов, В.Л.Елецкий, В.Д.Мур, ЖЭТФ **71**, 856 (1976).
70. А.Б.Мигдал, А.М.Переломов, В.С.Попов, ЯФ **14**, 874 (1971); **16**, 222 (1972).
71. Ig.Tamm, Phys.Rev. **58**, 952 (1940).
72. H.C.Corben and J.Schwinger, Phys.Rev. **58**, 953 (1940).
73. В.П.Крайнов, Письма в ЖЭТФ **13**, 359 (1971).
74. М.С.Маринов, В.С.Попов, ЖЭТФ **67**, 1250 (1974); J.Phys. **A8**, 1575 (1975).
75. В.Д.Мур, В.С.Попов, Д.Н.Воскресенский, Письма в ЖЭТФ **28**, 140 (1978).
76. В.Л.Елецкий, Д.Н.Воскресенский, В.С.Попов, ЯФ **26**, 994 (1977).
77. V.S.Popov, V.L.Eletsky, V.D.Mur, and D.N.Voskresensky, Phys.Lett. **80B**, 68 (1978); ЖЭТФ **76**, 431 (1979).
78. А.Б.Мигдал, Д.Н.Воскресенский, Э.Е.Саперштейн, М.А.Троицкий, *Пионные степени свободы в ядерном веществе*, Москва, Наука, 1991.
79. В.Л.Елецкий, В.С.Попов, ЯФ **25**, 1107 (1977).
80. W.Fleischer and G.Soff, Z.Naturforsch. **39a**, 703 (1984).
81. L.I.Schiff, H.Snyder, and J.Weinberg, Phys.Rev. **57**, 315 (1940).
82. G.Calucci and G.C.Ghirardi, Nuovo Cim. **10A**, 121 (1972).
83. Б.А.Арбузов, В.Е.Рочев, ТМФ **12**, 204 (1972).
84. В.П.Крайнов, ЖЭТФ **64**, 800 (1973).

85. M.Bawin and J.P.Lavine, Nuovo Cim. **23A**, 311 (1974).
86. M.Bawin and J.P.Lavine, Phys.Rev. **D12**, 1192 (1975).
87. A.Klein and J.Rafelski, Phys.Rev. **D11**, 300; **D12**, 1194 (1975).
88. В.Д.Мур, В.С.Попов, ТМФ **27**, 81, 204 (1976).
89. R.Loudon, Amer.J.Phys. **27**, 649 (1959).
90. H.Hasegawa and R.E.Howard, J.Phys.Chem.Sol. **21**, 179 (1961).
91. Б.Б.Кадомцев, ЖЭТФ **58**, 1765 (1970).
92. J.Schwinger, Phys.Rev. **82**, 664 (1951).
93. H.Ruder, G.Wunner, H.Herold, and F.Geyer, *Atoms in Strong Magnetic Fields*, Springer, Berlin, 1994.
94.В.Н.Ораевский, А.И.Рез, В.Б.Семикоз, ЖЭТФ **72**, 820 (1977).
95. А.Д.Сахаров, Р.З.Людаев, Е.Н.Смирнов и др., ДАН СССР **196**, 65 (1965).
96. F.Bitter, Sci.Amer. **213**, 64 (1965); УФН **88**, 735 (1966).
97. R.Van Dyck, Jr., P.Schwinberg, and H.Dehmelt, Phys.Rev.Lett. **59**, 26 (1987).
98. T.Kinoshita, Phys.Rev.Lett. **75**, 4728 (1995); Rep.Progr.Phys. **59**, 1459 (1996).
99. V.W.Hughes and T.Kinoshita, Rev.Mod.Phys. **71**, S133 (1999).
100. J.Rafelski, L.P.Fulcher, and W.Greiner, Phys.Rev.Lett **27**, 958 (1971); Nuovo Cim. **13B**, 135 (1973).
101. M.Born and L.Infeld, Proc.Roy.Soc. **A144**, 425 (1934).
102. L.Infeld and B.Hoffmann, Phys.Rev. **51**, 765 (1937).
103. G.Soff, J.Rafelski, and W.Greiner, Phys.Rev. **A7**, 903 (1973).
104. G.Soff, B.Müller, J.Rafelski, and W.Greiner, Zeits. Naturforsch. **28a**, 1389 (1973).
105. G.Soff, P.J.Mohr, Phys.Rev. **A38**, 5066 (1988); **A40**, 2174, 2176 (1989).
106. Н.Л.Манаков, А.А.Некипелов, А.Г.Файнштейн, ЖЭТФ **95**, 1167 (1989).
107. H.Backe et al., Phys.Rev.Lett. **40**, 1443 (1978).
108. G.Kozhuharov et al., Phys.Rev.Lett. **42**, 376 (1979).
109. S.Schweppe et al., Phys.Rev.Lett. **51**, 2261 (1983).
110. M.Clemente et al., Phys.Lett. **137B**, 41 (1984).
111. T.Cowan et al., Phys.Rev.Lett. **54**, 1761 (1985); **56**, 444 (1986).
112. H.Tsertos et al., Zeits.Phys. **A326**, 235 (1987).
113. W.Koenig et al., Phys.Lett. **218B**, 12 (1989).
114. P.Salabura et al., Phys.Lett. **245B**, 153 (1990).

115. Ю.Н.Покотиловский, ЭЧАЯ **24**, 5, Дубна (1993).
116. A.B.Balantekin, C.Bottcher, M.R.Strayer, and S.J.Lee, Phys.Rev. Lett. **55**, 461 (1985).
117. A.Chodos and L.C.R.Wijewardhana, Phys.Rev.Lett. **56**, 302 (1986).
118. A.O.Barut, Zeits.Phys. **A336**, 317 (1990).
119. D.G.Caldi and A.Chodos, Phys.Rev. **D36**, 2876 (1987).
120. M.Seiwert, W.Greiner, and W.T.Pinkston, J.Phys. **G11**, L21 (1985).
121. S.Schramm et al., Z.Phys. **A323**, 275 (1986).
122. Ю.Н.Демков, С.Ю.Овчинников, Письма в ЖЭТФ **46**, 14 (1987).
123. B.A.Arbuzov, E.E.Boos, V.I.Savrin, and S.A.Shichanin, Phys.Lett. **240B**, 477 (1990).
124. J.R.Spence and J.P.Vary, Phys.Lett. **254B**, 1 (1991); **B271**, 27 (1991).
125. N.R.Walet, A.Klein, and R.M.Dreizler, Phys.Lett. **273B**, 1 (1991).
126. R.Ganz et al., Phys.Lett. **389B**, 4 (1996).
127. GSI– Nachrichten, **2/99**, 8 (1999).
128. А.Б.Мигдал, О.А.Маркин, И.Н.Мишустин, ЖЭТФ **70**, 1592 (1976).
129. A.B.Migdal, G.A.Sorokin, O.A.Markin, and I.N.Mishustin, Phys. Lett. **65B**, 423 (1977); ЖЭТФ **72**, 1247 (1977).
130. A.B.Migdal, Rev.Mod.Phys. **50**, 107 (1978).
131. A.B.Migdal, E.E.Saperstein, M.A.Troitsky, and D.N.Voskresensky, Phys.Rep. **192**, 179 (1990).
132. A.Akmal, V.R.Pandkarende, and D.J.Ravenhall, Phys.Rev. **C58**, 1804 (1998).
133. Вольтер, *Философские повести*, с.489, Москва, ИХЛ, 1971.
134. Yu.Ts.Oganessian et al., Phys.Rev.Lett. **83**, 3154 (1999).
135. Ю.Ц.Оганесян, препринт ОИЯИ Р7-2000-23, Дубна (2000).
136. Ю.Ц.Оганесян и др., ЯФ **63**, No.10 (2000).
137. V.Ninov et al., Phys.Rev.Lett. **83**, 1104 (1999).
138. А.Кратцер, В.Франц, *Транцендентные функции*, Москва, ИИЛ, 1963.
139. H.Bateman, *Higher Transcendental Functions*, **2**, McGraw-Hill, New York, 1953.
140. E.E.Salpeter, Phys.Rev. **87**, 328 (1952).
141. W.Lucha and F.Schöberl, in: *Quark Confinement and Hadron Spectrum*, p.100-112, World Scientific, Singapore, 1994.

142. P.Cea, P.Colangelo, G.Nardulli, G.Paiano, and G.Preparata, Phys.Rev. **D26**, 1157 (1982); P.Cea, G.Nardulli, and G.Paiano, Phys.Rev. **D28**, 2291 (1983).
143. J.L.Basdevant and S.Boukraa, Zeits.Phys. **C28**, 423 (1985).
144. Б.М.Карнаков, В.Д.Мур, В.С.Попов, ЖЭТФ **116**, 511 (1999).
145. V.L.Morgunov, A.V.Nefediev, and Yu.A.Simonov, Phys.Lett. **B459**, 653 (1999).

Подписано к печати 25.05.00 Формат 60x90 1/16
Усл.печ.л.3,25 Уч.-изд.л.2,4 Тираж 110 экз. Заказ 21
Индекс 3649
Отпечатано в НТЭФ, 117259, Москва, Б.Черёмушкинская, 25