7

CEA/SACLAY
DSM

SERVICE TECHNIQUE DE CRYOGÉNIE ET DE MAGNÉTISME

DAPNIA - STCM - 00 - 03

MAY 5 2000
LIBRARY

Fermilab Library
0 1160 0071177 0

DAPNIA/STCM-00-03 Avril 2000

MODELISATION DU TRANSFERT THERMIQUE DANS L'He II

H. Lanchon-Ducauquis, C. Tulita, C. Meuris

DAPNIA

Présenté au « Congrès Français de Thermique », Lyon (France), 15-17 mai 2000

Département d'**A**strophysique, de Physique des **P**articules, de Physique **N**ucléaire et de l'**I**nstrumentation **A**ssociée
CEA/Saclay F-91191 Gif-sur-Yvette Cédex

Couverture : Sylvie Cabrit et Marc Sauvage

COMMISSARIAT A L'ENERGIE ATOMIQUE

DSM/DAPNIA/STCM

Rapport n° 03
le 31 mars 2000

H. LANCHON-DUCAUQUIS, C. TULITA
C. MEURIS

MODELISATION DU TRANSFERT THERMIQUE DANS L'He II

Congrès Français de Thermique
Lyon, 15-17 mai 2000

Congrès français de Thermique, SFT 2000, Lyon, 15-17 mai 2000

Modélisation du transfert thermique dans l'He II

Hélène LANCHON-DUCAUQUIS*, Catalin TULITA*, Chantal MEURIS**

*Laboratoire d'Energétique et de Mécanique Théorique et Appliquée (LEMTA-UMR 7563)
2 avenue de la Forêt de Haye, B.P. 160, 54504 VANDOEUVRE Cedex, France.
**Service des Techniques de Cryogénie et de Magnétisme (STCM);
C.E.A. Saclay, 91191 GIF sur YVETTE Cedex, France.

Résumé - Parmi les fluides cryogéniques utilisés dans les applications industrielles ou en laboratoire, l'hélium II offre des propriétés remarquables; cependant, son comportement, tant mécanique que thermique apparaît comme particulièrement complexe. En ce qui concerne le transfert thermique au cœur de ce fluide et à travers l'interface avec un solide, les deux lois phénoménologiques proposées dans [1] et [2] sont admises comme les plus réalistes; nous proposons ici, à partir d'elles, un modèle mathématique relativement standard devant permettre, tant du point de vue stratégique que numérique, d'assurer de façon optimale la température souhaitée dans les problèmes liés au refroidissement par l'hélium II; cet objectif est particulièrement crucial pour les supraconducteurs multifilamentaires [3].

Nomenclature

P	pression, bar	*Symboles grecs*	
$\vec{q}$	flux de chaleur, $W \cdot m^{-2}$	λ_s	conductivité thermique du solide, $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$
r_d	source de chaleur, $W \cdot m^{-3}$	Ω	domaine occupé par hélium II
T	température, K	Γ_{HS}	interface hélium-solide

1. Introduction : Brève description du comportement de l'hélium II

Contrairement aux corps habituels, l'isotope stable de l'hélium 4 (noté ${}^4_2He$) n'est pas solide à température nulle et pression atmosphérique; il présente deux phases liquides distinctes, l'hélium I et l'hélium II, séparées par la ligne λ dans le diagramme de phases (*figure 1*). Les propriétés de l'hélium II sont interprétées dans le cadre du modèle à deux fluides: d'une part le fluide normal, doué d'une viscosité et d'une entropie, donc responsable des phénomènes thermiques; d'autre part le superfluide d'entropie nulle et qui s'écoule sans viscosité. Ces deux fluides indissociables interagissent lorsque le flux de chaleur transféré dépasse une valeur critique; il naît alors une force de friction mutuelle qui induit un gradient de température.

2. Représentation proposée pour le transfert thermique dans l'hélium II

Le transfert d'une densité de flux de chaleur $\vec{q}$ dans l'hélium II statique semble assez bien décrit par la loi dite de GORTER - MELLINK [1] qui, pour une pression P, s'écrit:

$$|\vec{q}|^2 \vec{q} = -f(T,P)\,\vec{\nabla}T \tag{1}$$

La fonction f appelée « fonction de transfert thermique» peut être obtenue expérimentalement. Elle n'est définie que pour $0 < T < T_\lambda(P)$, $T_\lambda(P)$ étant la valeur de la température à la pression P sur la ligne λ de transition « He I - He II » (*figure 1*). L'allure de f est sensiblement celle représentée sur la *figure 2* pour $P = 1$ bar; l'expression générale qui en est proposée dans [4] s'écrit:

$$f(T,P) = K(T_\lambda(P))\left[\left(\frac{T}{T_\lambda(P)}\right)^{5,6}\left(1-\frac{T}{T_\lambda(P)}\right)^{5,6}\right]^3; \tag{2}$$

dans laquelle la fonction $K(T_\lambda(P))$ est une donnée dont la valeur est fixée avec P.

Par ailleurs, lorsque le flux de chaleur provient d'un solide à température T_s, la condition à l'interface, connue sous le nom de loi de KAPITZA [2] s'écrit:

$$-\vec{q}\cdot\vec{n} = \alpha(T_s^4 - T^4); \tag{3}$$

le vecteur $\vec{n}$ correspond à la normale extérieure au fluide; « le coefficient de Kapitza » α est positif et dépend du milieu solide considéré et de la surface; on admet souvent que α est une constante.

Au vu des relations (1) (2) (3), on imagine aisément que l'évaluation du champ de températures dans un système refroidi par l'He II va être un problème très complexe; d'où la nécessité de procéder à une modélisation mathématique permettant d'introduire des méthodes de résolution déjà éprouvées.

3. Normalisation de l'équation de la chaleur stationnaire dans hélium II

Si l'on veut représenter le champ de températures dans l'hélium II statique et en régime établi, la loi de conservation de l'énergie sur laquelle on s'appuie prend alors la forme simple:

$$div\,\vec{q} = r_d, \tag{4}$$

dans laquelle r_d représente le terme source dimensionnel.

La première opération à effectuer consiste donc à expliciter $\vec{q}$ à partir de (1) ; il suffit pour cela de multiplier scalairement cette relation par elle-même pour en tirer l'expression de $|\vec{q}|^2$; ainsi, pour une pression P fixée, que nous nous abstiendrons désormais de mentionner dans les arguments de f, nous obtenons:

$$\vec{q} = -\frac{[f(T)]^{\frac{1}{3}}}{|\vec{\nabla}T|^{\frac{2}{3}}}\vec{\nabla}T. \tag{5}$$

Les lois (2) et (3) nous conduisent à effectuer (pour une longueur caractéristique adaptée L_c) les réductions dimensionnelles suivantes:

$$x = \frac{\underline{x}}{L_c}; \quad \theta = \frac{T}{T_\lambda}; \quad \beta = \left(\frac{KT_\lambda}{L_c}\right)^{\frac{1}{3}}; \quad r = \frac{r_d L_c}{\beta}; \quad \gamma = \frac{\alpha T_\lambda^4}{\beta} \tag{6}$$

de telle sorte qu'en posant

$$b = 5{,}6 \qquad \text{et} \qquad A(\theta) = \theta^b\left(1-\theta^b\right) \tag{7}$$

l'équation (4) et la condition d'interface (3) s'écrivent:

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{A(\theta)}{|\nabla\theta|^{\frac{2}{3}}}\frac{\partial\theta}{\partial x_i}\right] = r \tag{8}$$

$$\gamma\theta^4 + \frac{A(\theta)}{|\nabla\theta|^{\frac{2}{3}}}\frac{\partial\theta}{\partial n} = \gamma\theta_s^4 \tag{9}$$

Remarques

- on utilise dans l'équation (8), la convention de sommation sur les indices muets;
- le nombre γ apparaît comme un groupement adimensionnel important du problème;
- attention, malgré les apparences, la température réduite θ_s n'est généralement pas une donnée; elle dépend de celle de l'He II utilisé pour refroidir le solide;
- quoiqu'il en soit, compte tenu, d'une part de l'allure de la fonction A (c'est-à-dire à un coefficient près de celle de f représenté sur la *figure 2*), et d'autre part des non-linéarités dans les relations (8) (9), les problèmes thermiques dans lesquels intervient l'He II se présentent a priori comme nouveaux et difficiles du point de vue mathématique. Cependant, la présence du terme « module du gradient » évoque une famille de problèmes connus sous le nom de « p-gradients » ou « p-laplaciens », pour laquelle des méthodes de résolution sont d'ores et déjà disponibles [5] [6] [7] [8]; la forme générale des équations de cette famille est, pour une inconnue u et un terme source r définis sur un domaine Ω :

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\left[|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right] = r \qquad \text{sur } \Omega \qquad (p \text{ donné} \geq 1) \tag{10}$$

Nous proposons donc dans la section suivante un changement d'inconnue $\theta = g(u)$ dont le rôle est de mettre (8) sous la forme (10).

4. Transformation de l'équation de la chaleur en un problème p-laplacien

En appliquant au premier membre de l'équation (8) le changement formel d'inconnue $\theta = g(u)$, on obtient:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{A(\theta)}{|\nabla\theta|^{\frac{2}{3}}}\frac{\partial\theta}{\partial x_i}\right] = \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{(g'(u))^{\frac{1}{3}}A(g(u))}{|\nabla u|^{\frac{2}{3}}}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right]; \tag{11}$$

reste à définir l'application g qui conduise à

$$[g'(u)]^{\frac{1}{3}}A[g(u)] = 1; \tag{12}$$

compte tenu de la définition (7) de la fonction A, g doit être solution de l'équation différentielle:

$$\left[g^b(1-g^b)\right]^3 dg = du \tag{13}$$

qui s'intègre plus facilement dans le sens inverse:

$$u = g^{-1}(\theta) \overset{def}{=} h(\theta); \tag{14}$$

on obtient alors successivement

$$h'(\theta) = \left[\theta^b(1-\theta^b)\right]^3 > 0 \quad \text{pour} \quad \theta \in]0,1[\tag{15}$$

$$h(\theta) = \frac{\theta^{3b+1}}{3b+1} - 3\frac{\theta^{4b+1}}{4b+1} + 3\frac{\theta^{5b+1}}{5b+1} - \frac{\theta^{6b+1}}{6b+1}, \tag{16}$$

ce qui montre que h est une application strictement croissante et donc inversible de $]0,1[$ dans $]0,c[$, où $c = h(1)$ se déduit facilement de b: $c = 2.4844 \cdot 10^{-3}$.

En effectuant formellement le changement d'inconnue: $\theta = h^{-1}(u)$ dans (8), on est alors conduit à l'équation canonique annoncée pour les problèmes de « p-laplacien » lorsque Ω est le domaine occupé par l'He II: Trouver u défini dans Ω et à valeurs dans $]0,c[$ tel que:

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\left[|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right] = r \qquad \text{dans } \Omega \text{ avec } p = \frac{4}{3} \tag{17}$$

A l'équation (17) il faut bien sûr rajouter des conditions aux limites et des conditions de transmission; le champ de températures effectif de l'hélium II occupant le domaine Ω, se déduit alors facilement de la solution u du problème obtenu, par inversion numérique de la fonction h.

5. Bilan et perspectives après les transformations effectuées

Actuellement les méthodes mathématiques et numériques permettent de résoudre l'équation (17) lorsqu'on lui associe des conditions aux limites de type Dirichlet (température imposée T_D) ou de type Neumann (flux imposé Φ_N) sur la frontière $\partial\Omega$; ces conditions s'écrivent respectivement:

$$u = h(\theta_D) \text{ avec } \theta_D = \frac{T_D}{T_\lambda} \text{ et} \tag{18}$$

$$|\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\Phi_N}{\beta} \tag{19}$$

Cependant, dans les situations réalistes de refroidissement d'un ensemble par l'He II, on doit écrire pour chaque composante solide Ω_S : d'une part, l'équation de la chaleur classique associée à la loi de Fourier, d'autre part, deux conditions de transmission sur chaque interface Γ_{HS} avec l'He II; ces conditions sont, la continuité du flux et la loi de Kapitza. En tenant compte des mêmes réductions dimensionnelles et changement d'inconnue que précédemment, ces relations s'écrivent:

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\left[A^{-3}(g(u))\frac{\partial u}{\partial x_i}\right] = r_s \quad \text{avec} \quad r_s = \frac{rL_c^2}{\lambda_s T_\lambda} \quad \text{sur} \quad \Omega_S \tag{20}$$

$$A^{-3}[g(u)]\frac{\partial u}{\partial N}\bigg|_s = |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial N}\bigg|_{He\,II} \quad \text{sur} \quad \Gamma_{HS} \tag{21}$$

$$\gamma[g(u)]^4\Big|_s = \left\{\gamma[g(u)]^4 + |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial N}\right\}\bigg|_{He\,II} \quad \text{sur} \quad \Gamma_{HS} \tag{22}$$

Si on ajoute aux trois relations précédentes l'équation (17) écrite dans Ω_{He} (domaine occupé par l'He II), on doit compléter le système par des conditions aux limites réalistes sur la frontière externe de l'ensemble. Des méthodes mathématiques et numériques restent à inventer pour résoudre un tel problème.

Dans le cadre qui nous concerne particulièrement (celui du refroidissement des supraconducteurs), on peut avoir affaire à des systèmes multiéchelles (et en particulier multipériodiques); il faut donc, avant d'appliquer la technique d'homogénéisation, indispensable dans ces situations, avoir résolu toutes les difficultés évoquées ci-dessus.

Références

[1] C.J. Gorter and J.H. Mellink, On the irreversible process in liquid helium II, Physica (Den Haag) 15 (1949) 285-304.

[2] L.J. Challis, Kapitza resistance and acoustic transmission across boundaries at high frequencies, J. Phys. C. Sol. St. Phy., 7 (1974) 481-495.

[3] C. Tulita, Problèmes d'homogénéisation thermique liés à l'ingénierie des supraconducteurs, Thèse, Institut National Polytechnique de Lorraine, 1999.

[4] S.W. Van Sciver, Helium cryogenics, Plenum press, 1986.
[5] J.L. Lions, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod, Paris, 1969.
[6] I. Ekeland, R. Temam, Analyse convexe et problèmes variationnels, Dunod, Paris, 1974.
[7] M.C. Pelissier, Sur quelques problèmes non linéaires en glaciologie, Thèse, Université de Paris-Sud, 1975.
[8] R. Glowinski, A. Marocco, Sur l'approximation par éléments finis d'ordre 1, et la résolution par pénalisation-dualité, d'une classe de problèmes de Dirichlet non linéaires, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A 278 (1984) 1649-1652.

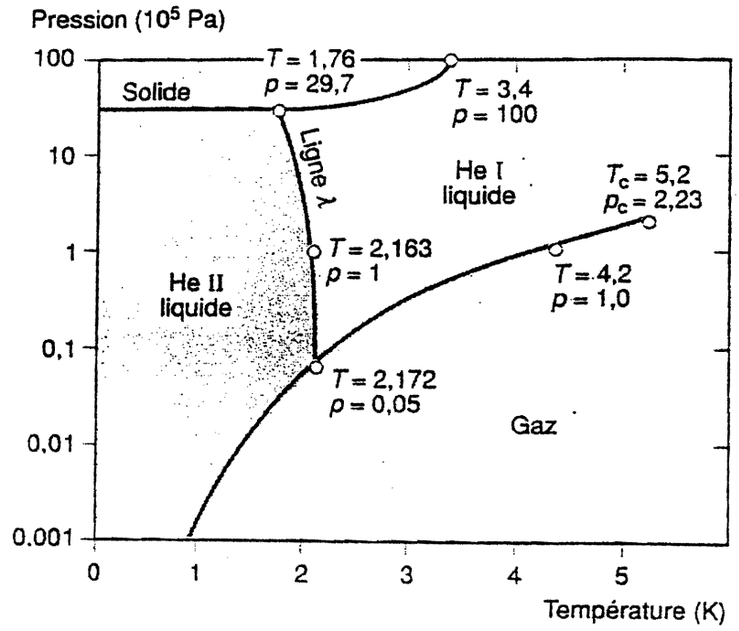

Figure 1 : *Diagramme des phases de hélium 4*

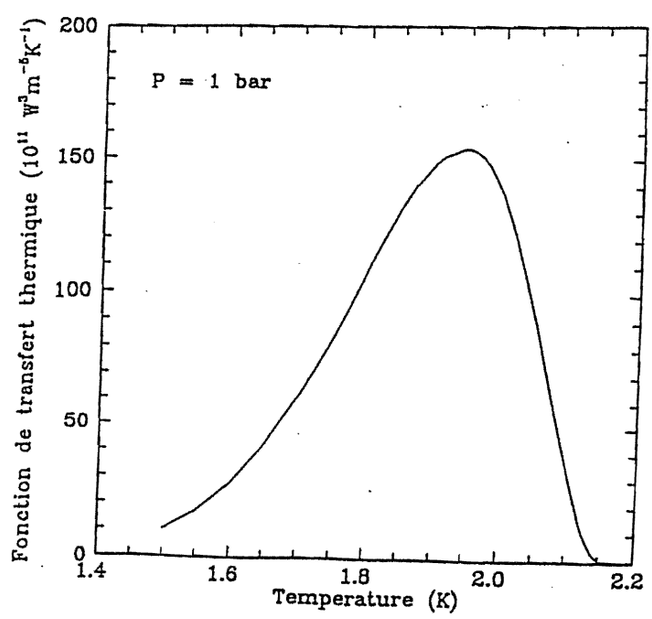

Figure 2 : *Fonction de transfert thermique de l'hélium II*
Valeurs extraites du programme HEPAK de V. Arp & al. cryodata 1992